# Lehmann

# álgebra

LIMUSA
NORIEGA EDITORES

# ÁLGEBRA

# ÁLGEBRA

CHARLES H. LEHMANN

Profesor adjunto de Matemáticas,
The Cooper Union School of Engineering

LIMUSA
NORIEGA EDITORES
MÉXICO • España • Venezuela • Colombia

Lehmann, Charles H.
Álgebra = College algebra / Charles H. Lehmann. -- México : Limusa, 2004.
464 p. : il. ; 15.5 cm.
ISBN 968-18-0116-4.
Rústica.
1.Álgebra
I.Tomás de Hoyos, tr.

LC: QA154 Dewey: 512 – dc21

Versión autorizada en español de la obra publicada en inglés con el título:
COLLEGE ALGEBRA
© John Wiley & Sons, Inc.

Colaborador en la traducción:
TOMÁS DE HOYOS
Profesor de matemáticas en el Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey, Nuevo León, México.

La presentación y disposición en conjunto de

ÁLGEBRA

son propiedad del editor. Ninguna parte de esta obra puede ser reproducida o transmitida, mediante ningún sistema o método, electrónico o mecánico (incluyendo el fotocopiado, la grabación o cualquier sistema de recuperación y almacenamiento de información), sin consentimiento por escrito del editor.

Derechos reservados:

© 2004, EDITORIAL LIMUSA, S.A. de C.V.

GRUPO NORIEGA EDITORES
Balderas 95, México, D.F.
C.P. 06040
☎ 8503 8050
01(800) 706 9100
📠 5512 2903
limusa@noriega.com.mx
www.noriega.com.mx

CANIEM Núm. 121

Hecho en México
ISBN 968-18-0116-4
39.1

# ÁLGEBRA

# Prólogo

Este texto está dedicado al estudio de aquellos temas del álgebra que tradicionalmente se estudian en la **universidad**. Aunque se esupone que solamente se ha cursado un curso de álgebra elemental aprovecharán mucho más este libro aquellos estudiantes que hayan llevado dos cursos de álgebra y uno de trigonometría plana. No es exagerado señalar la importancia que tiene el álgebra en los estudios universitarios, ya que es una experiencia bien conocida el hecho de que las deficiencias en esta materia impiden al estudiante cursar de manera satisfactoria la geometría analítica y el cálculo. Por esta razón le he dado una importancia primordial a la forma de exposición, y me he preocupado particularmente por dar la mayor claridad posible a los temas estudiados. Conviene observar que cada capítulo empieza con una introducción cuyo propósito es dar al estudiante no sólo una idea preliminar de lo que se va a tratar en el capítulo, sino también relacionar el tema correspondiente con otros posteriores y con otras ramas de las matemáticas. Se ha hecho un sincero esfuerzo para presentar la materia de modo que llene, en la forma más efectiva posible, las necesidades tanto del profesor como del estudiante. El material se ha arreglado de modo que puede ser fácilmente dividido en lecciones o temas individuales manteniéndose la unidad del desarrollo. Los resultados más importantes se han presentado en forma de teoremas, y también se han incluido en los resúmenes; de esta manera, cualquier referencia que el estudiante necesite en el futuro podrá ser localizada fácilmente.

Se ha procurado que el libro se pueda usar para cursos de diferente duración, por medio de la selección de determinados capítulos o de partes de ellos, sin que se afecte la continuidad de la materia.

Naturalmente, se ha dado mayor importancia a los últimos capítulos y a los temas superiores; sin embargo los primeros capítulos son algo más que un repaso del álgebra elemental, pues presentan la materia desde un punto de vista superior, que el estudiante ya está en posición de comprender dada la experiencia adquirida en su estudio preliminar del álgebra.

Algunas de las características especiales del libro permiten relacionar ciertos puntos con algunos temas de la matemática moderna. Para empezar, el capítulo 1 presenta una introducción elemental de los fundamentos, estructura y naturaleza del álgebra. Lo tratado en este capítulo representa sustancialmente el contenido de la cátedra que he dictado durante muchos años al empezar el curso en mis clases de álgebra en la universidad.

El capítulo 2 contiene un desarrollo completo del importante tema de las operaciones algebraicas. Se dan demostraciones elementales de las propiedades de las operaciones fundamentales en forma sencilla y atractiva, fácilmente comprensible para el estudiante. Además, en el lugar apropiado de este capítulo, se dedica un artículo a la introducción, en forma elemental, del importante concepto de campo de números.

El estudio de las desigualdades e inecuaciones (capítulo 6) se ha hecho en forma más completa que en la mayoría de los textos de álgebra. La experiencia ha demostrado que este es uno de los temas en el cual muchos estudiantes requieren ayuda considerable.

En el capítulo 8 se trata de un modo completo el tema de los números complejos; además se introducen y se discuten en forma elemental los importantes conceptos de grupo y de vector. Este capítulo concluye con un artículo sobre las funciones de variable compleja.

Se estudia con gran detalle todo lo relativo a permutaciones, combinaciones (capítulo 13) y cálculo de probabilidades (capítulo 14), prestándose una atención particular al estudio de la distribución binomial.

Lo relativo a determinantes ha sido tratado en forma especial. Dado que este punto presenta generalmente dificultades para el estudiante, se aborda en forma lenta y sencilla haciendo hincapié en las técnicas para el cálculo de determinantes. Después de que el estudiante ha aprendido *como* operar con determinantes, está en mucho mejor posición para entender y apreciar las demostraciones de los teoremas.

Los ejercicios son una característica especial del libro. Hay más de 2 000, además de más de 200 ejemplos completamente resueltos. Todos estos ejercicios son bastante más que simples manipulaciones de tipo mecánico, pues han sido pensados con propósitos definidos. Naturalmente, en primer lugar los ejercicios sirven para ampliar y completar la comprensión del estudiante tanto de los conocimientos teóricos como de las aplicaciones. Graduados por dificultad, los ejercicios varían desde los muy sencillos hasta aquellos que representan un reto a la habilidad del estudiante. Aparte, algunos ejercicios se han incluido con objeto de introducir temas adicionales que el profesor puede extender según crea conveniente.

Deseo expresar mi más sincero agradecimiento a mis amigos y colegas, profesor James N. Eastham y al Sr. Alan Wayne; cada uno de ellos se tomó la molestia de leer independientemente el manuscrito, y cada uno contribuyó grandemente al valor del libro a través de sus comentarios, sugerencias y crítica constructiva. También deseo manifestar mi agradecimiento a los miembros de la redacción de la casa *John Wiley and Sons* que prestaron constante ayuda y valiosa cooperación.

CHARLES H. LEHMANN

*Flushing, Nueva York*

# Contenido

1. **Conceptos fundamentales** . . . . . . . . . . . . . . . 1

1.1. Introducción . . . . . . . . . . . . . . . 1
1.2. Los fundamentos del álgebra . . . . . . . . . . 1
1.3. Sistemas de números usados en álgebra . . . . . . . . 2
1.4. Las operaciones algebraicas . . . . . . . . . . 7
1.5. Estructura del álgebra . . . . . . . . . . . 8
1.6. Naturaleza del álgebra . . . . . . . . . . . 8

2. **Operaciones algebraicas** . . . . . . . . . . . . . 11

2.1. Introducción . . . . . . . . . . . . . . . 11
2.2. Expresión algebraica, término, polinomio . . . . . . . . 11
2.3. Adición . . . . . . . . . . . . . . . . 13
2.4. Sustracción . . . . . . . . . . . . . . . 14
2.5. Multiplicación . . . . . . . . . . . . . . 21
2.6. Productos notables . . . . . . . . . . . . . 27
2.7. División . . . . . . . . . . . . . . . . 30
2.8. Campo de números . . . . . . . . . . . . . 38
2.9. Factorización . . . . . . . . . . . . . . 39
2.10. Mínimo común múltiplo . . . . . . . . . . . 43
2.11. Fracciones simples . . . . . . . . . . . . . 44
2.12. Fracciones compuestas . . . . . . . . . . . . 48
2.13. Exponentes . . . . . . . . . . . . . . . 51
2.14. Radicales . . . . . . . . . . . . . . . . 56
2.15. Condición necesaria y suficiente . . . . . . . . . 62
2.16. Resumen . . . . . . . . . . . . . . . . 64

3. **Concepto de función** . . . . . . . . . . . . . . 67

3.1. Introducción . . . . . . . . . . . . . . . 67
3.2. Constantes y variables . . . . . . . . . . . . 67
3.3. Definición de función . . . . . . . . . . . . 68
3.4. Tipos de funciones . . . . . . . . . . . . . 68
3.5. Notación de las funciones . . . . . . . . . . . 69
3.6. Clasificación de las funciones . . . . . . . . . . 72
3.7. Sistema de coordenadas unidimensional . . . . . . . . 74
3.8. Sistema de coordenadas rectangulares . . . . . . . . 75
3.9. Representación gráfica de funciones . . . . . . . . . 77

4. **La función lineal** . . . . . . . . . . . . . . . 81

4.1. Introducción . . . . . . . . . . . . . . . 81
4.2. La ecuación . . . . . . . . . . . . . . . 81

4.3. Ecuaciones equivalentes . . . . . . . . . . . . . . . . . 83
4.4. La función lineal, o de primer grado, con una incógnita . . . . 83
4.5. Problemas que se resuelven por medio de una ecuación lineal . . 85
4.6. La ecuación lineal, o de primer grado, con dos variables o incógnitas . . . . . . . . . . . . . . . . . 91
4.7. Sistema de ecuaciones lineales . . . . . . . . . . . . . 92
4.8. Problemas que pueden resolverse por medio de un sistema de ecuaciones lineales . . . . . . . . . . . . . . . . 97

**5. La función cuadrática . . . . . . . . . . . . . . . 101**

5.1. Introducción . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 101
5.2. La ecuación cuadrática, o de segundo grado, con una incógnita 101
5.3. Resolución por factorización . . . . . . . . . . . . . 101
5.4. Resolución por medio de una fórmula . . . . . . . . . . 103
5.5. Propiedades de la ecuación cuadrática . . . . . . . . . . 107
5.6. Ecuaciones de forma cuadrática . . . . . . . . . . . . 113
5.7. Ecuaciones con radicales . . . . . . . . . . . . . . 115
5.8. Gráfica de la función cuadrática . . . . . . . . . . . . 117
5.9. Máximos y mínimos . . . . . . . . . . . . . . . . 120
5.10. La ecuación de segundo grado con dos variables . . . . . . 123
5.11. Sistemas de ecuaciones de segundo grado . . . . . . . . . 125
5.12. Sistemas que comprenden una ecuación lineal . . . . . . . 126
5.13. Sistemas de ecuaciones de la forma $ax^2 + by^2 = c$ . . . . . . 127
5.14. Sistemas de ecuaciones de la forma $ax^2 + bxy + cy^2 = d$ . . . 129
5.15. Otros sistemas . . . . . . . . . . . . . . . . . . 131

**6. Desigualdades e inecuaciones . . . . . . . . . . . . 135**

6.1. Introducción . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 135
6.2. Definiciones y teoremas fundamentales . . . . . . . . . . 135
6.3. Desigualdades absolutas . . . . . . . . . . . . . . . 139
6.4. Inecuaciones de primer grado o lineales . . . . . . . . . 142
6.5. Inecuaciones de segundo grado o cuadráticas . . . . . . . 143
6.6. Otras inecuaciones . . . . . . . . . . . . . . . . . 150

**7. Inducción matemática. Teorema del binomio . . . . . . . 153**

7.1. Introducción . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 153
7.2. Naturaleza de la inducción matemática . . . . . . . . . . 153
7.3. Ejemplos de inducción matemática . . . . . . . . . . . 155
7.4. Teorema del binomio . . . . . . . . . . . . . . . . 159
7.5. Demostración del teorema del binomio . . . . . . . . . . 161
7.6. El término general . . . . . . . . . . . . . . . . . 164

**8. Números complejos . . . . . . . . . . . . . . . . 169**

8.1. Introducción . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 169
8.2. Definiciones y propiedades . . . . . . . . . . . . . . 169
8.3. Operaciones fundamentales . . . . . . . . . . . . . . 171
8.4. Representación rectangular . . . . . . . . . . . . . . 175
8.5. Representación polar . . . . . . . . . . . . . . . . 178

8.6. Potencias y raíces 183
8.7. Grupos 189
8.8. Vectores 191
8.9. Funciones de una variable compleja 194

**9. Variación de funciones 199**

9.1. Introducción 199
9.2. Definiciones y propiedades 199
9.3. Problemas de variación proporcional 202
9.4. Variación en las funciones algebraicas 206

**10. Progresiones 213**

10.1. Introducción 213
10.2. Progresión aritmética 214
10.3. Progresión geométrica 218
10.4. Progresión armónica 222
10.5. Progresión geométrica infinita 226

**11. Teoría de las ecuaciones 233**

11.1. Introducción 233
11.2. El problema general 234
11.3. Teorema del residuo y del factor 235
11.4. División sintética 236
11.5. Gráfica de un polinomio 240
11.6. Número de raíces 245
11.7. Naturaleza de las raíces 249
11.8. Regla de los signos de Descartes 252
11.9. Raíces racionales 256
11.10. Raíces irracionales 261
11.11. Transformación de ecuaciones 263
11.12. Método de Horner 268
11.13. Relaciones entre las raíces y los coeficientes 272

**12. Fracciones parciales 277**

12.1. Introducción 277
12.3. Teorema fundamental en la descomposición de una fracción en fracciones parciales 278
12.3. Factores lineales distintos 279
12.4. Factores lineales repetidos 280
12.5. Factores cuadráticos distintos 282
12.6. Factores cuadráticos repetidos 284

**13. Permutaciones y combinaciones 287**

13.1. Introducción 287
13.2. Teorema fundamental 287
13.3. Número de permutaciones 291
13.4. Combinaciones 295

13.5. División en subconjuntos . . . . . . . . . . . . . . . 299
13.6. Notación para sumas . . . . . . . . . . . . . . . . 302
13.7. Coeficientes del desarrollo de la potencia de un binomio . . . 302

**14. Probabilidad . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 309**

14.1. Introducción . . . . . . . . . . . . . . . . . . 309
14.2. Definiciones . . . . . . . . . . . . . . . . . . 310
14.3. Sucesos simples . . . . . . . . . . . . . . . . . 313
14.4. Sucesos compuestos . . . . . . . . . . . . . . . 318
14.5. Pruebas repetidas . . . . . . . . . . . . . . . . 324
14.6. Desarrollo del binomio . . . . . . . . . . . . . . 328

**15. Determinantes . . . . . . . . . . . . . . . . . . 337**

15.1. Introducción . . . . . . . . . . . . . . . . . . 337
15.2. Naturaleza de un determinante . . . . . . . . . . . 337
15.3. Determinates de segundo orden . . . . . . . . . . . 338
15.4. Determinantes de tercer orden . . . . . . . . . . . 343
15.5. Determinantes de cualquier orden . . . . . . . . . . 352
15.6. Sistemas de ecuaciones lineales . . . . . . . . . . . 363

**16. Logaritmos . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 375**

16.1. Introducción . . . . . . . . . . . . . . . . . . 375
16.2. Las funciones exponencial y logarítmica . . . . . . . . 375
16.3. Propiedades fundamentales de los logaritmos . . . . . . 380
16.4. Sistemas de logaritmos . . . . . . . . . . . . . . 385
16.5. Ecuaciones exponenciales . . . . . . . . . . . . . 386
16.6. Ecuaciones logarítmicas . . . . . . . . . . . . . . 388
16.7. Tablas de logaritmos . . . . . . . . . . . . . . . 390
16.8. Cálculo logarítmico . . . . . . . . . . . . . . . 395

**17. Interés y anualidades . . . . . . . . . . . . . . . 399**

17.1. Introducción . . . . . . . . . . . . . . . . . . 399
17.2. Interés simple . . . . . . . . . . . . . . . . . 399
17.3. Interés compuesto . . . . . . . . . . . . . . . . 401
17.4. Anualidades . . . . . . . . . . . . . . . . . . 407
17.5. Aplicaciones de las anualidades . . . . . . . . . . . 410

**Apéndice I. Lista de obras de consulta y datos . . . . . . . . 415**

A. Bibliografía . . . . . . . . . . . . . . . . . . 415
B. Trigonometría . . . . . . . . . . . . . . . . . . 416
C. El alfabeto griego . . . . . . . . . . . . . . . . 418

**Apéndice II. Tablas . . . . . . . . . . . . . . . . . 419**

1. Funciones trigonométricas naturales . . . . . . . . . . 420
2. Logaritmos decimales . . . . . . . . . . . . . . . 422

3. Monto compuesto de $ 1: $(1 + i)^n$ . . . . . . . . . . . . 424
4. Valor actual de $ 1: $(1 + i)^{-n}$ . . . . . . . . . . . . 425
5. Monto de una anualidad de $ 1: $s_{\overline{n}|i}$ . . . . . . . . . . . 426
6. Valor actual de una anualidad de $ 1: $a_{\overline{n}|i}$ . . . . . . . . . . 427

**Respuestas a los ejercicios de número impar . . . . . . . . 429**

**Indice . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 441**

# ÁLGEBRA

# 1

# Conceptos fundamentales

## 1.1. INTRODUCCION

El estudiante que inicia un curso de álgebra en la universidad, ha estudiado anteriormente uno o dos cursos de álgebra elemental, en los que se dio la mayor importancia a la mecanización de las operaciones algebraicas y a la obtención correcta de las soluciones. Poca o ninguna atención se puso entonces en los fundamentos, estructura y naturaleza del álgebra; es por esto que el propósito de este capítulo es considerar algunos de estos conceptos fundamentales del álgebra.

En los artículos siguientes se da una exposición elemental de las características particulares del álgebra y de los fundamentos sobre los que descansa esta materia. Este estudio deberá ser, por necesidad, breve, pues un estudio detallado de la estructura del álgebra, sobre una base lógica y rigurosa, realmente pertenece a tratados superiores. En el estudio de los conceptos fundamentales el lector necesitará utilizar sus conocimientos previos de álgebra elemental.

## 1.2. LOS FUNDAMENTOS DEL ALGEBRA

Cada una de las diferentes ramas de las matemáticas tiene una estructura lógica construida a partir de ciertas proposiciones fundamentales conocidas como *postulados*. El estudiante ya ha visto un ejemplo de esto al estudiar la geometría elemental. Allí se deducen, en forma de teoremas, las propiedades de las figuras geométricas, tomando como punto de partida ciertos conceptos primitivos elementales (introducidos sin definición), definiciones y postulados, siendo cada teorema una consecuencia lógica de uno o más de los teoremas precedentes o de los postulados. Análogamente, los fundamentos del álgebra descansan, como vamos a ver, en ciertos postulados fundamentales, conceptos primitivos y definiciones.

El punto de partida de una determinada rama de las matemáticas está asociado con el significado de ciertas palabras o expresiones básicas. Una palabra se *define* describiéndola en términos de otras palabras que a su vez son capaces de descripción posterior o bien son aceptadas como conocidas. Es evidente que este proceso nos conducirá a una palabra o palabras para las cuales no hay definición. Se hace entonces necesario *suponer* que tales palabras poseen significados que acordamos aceptar sin definición formal. Es en este momento cuando se establece la base para una ciencia deductiva tal como lo es el álgebra.

Ya que no hay restricciones al empezar, estamos en completa libertad para escoger los términos que vamos a aceptar sin definición. Es natural, y es lo acostumbrado, restringir tal selección a los conceptos más sencillos y fundamentales y que, además, no conduzcan posteriormente a contradicciones. El estudiante podrá recordar que su *primera* experiencia con la aritmética fue contar el número de objetos de un conjunto, y que para este propósito se usaron ciertos símbolos designados por 1, 2, 3, 4, . . . , y llamados números naturales. Nosotros daremos a tales números el nombre de *enteros* y *positivos*.

POSTULADO 1. Admitimos la existencia de los números *enteros* y *positivos*, los cuales se emplean al contar el número de objetos de un conjunto y que se designan por los símbolos 1, 2, 3, 4 . . .

El siguiente paso en la experiencia del estudiante con la aritmética consistió en la determinación del *número total* de objetos al reunir dos o más conjuntos de objetos. Esto requirió la operación llamada *adición.* En particular, para la determinación del *número total* de objetos en dos o más conjuntos del *mismo número de elementos,* se empleó la operación llamada *multiplicación*. Estas dos operaciones fundamentales conducen al postulado siguiente:

POSTULADO 2. Existen dos *operaciones* con los números enteros y positivos, llamadas *adición* y *multiplicación,* y designadas por medio de los símbolos + y × respectivamente.

Tomando estos dos postulados como punto de partida es posible crear todo el sistema de números utilizado en el álgebra, tal como se bosqueja en el artículo siguiente.

## 1.3. SISTEMAS DE NUMEROS USADOS EN ALGEBRA

Si con los números enteros y positivos se efectúan las operaciones de adición y multiplicación los resultados obtenidos son también números enteros y positivos. Evidentemente, los dos postulados fundamentales del álgebra (Art. 1.2) restringen todo cálculo a los números enteros y positivos y a las dos operaciones de adición y multiplicación. Para quitar esta restricción, y satisfacer la necesidad de disponer de otros números, como los números negativos y los fraccionarios, se hace necesario introducir otros conceptos.

En sus cursos de álgebra elemental el estudiante aprendió a utilizar letras para representar números. Según esto representemos por $a$ y $b$ a dos números enteros y positivos dados, los cuales vamos a sumar, y sea $c$ su *suma*. Entonces tenemos la igualdad y afirmamos que representa la *solución* del siguiente problema: *Dados* dos números enteros y positivos $a$ y $b$, *hallar* su suma $c$.

(1) $$a + b = c$$

Ahora consideremos el problema *inverso*, es decir, *dada* la suma $c$ de dos números enteros y positivos $a$ y $b$, y *dado* uno de ellos $a$, *encontrar* el otro $b$. La resolución de este problema requiere la operación *inversa* de la adición, la cual es llamada *sustracción*. Esta nueva operación se representa por medio del símbolo —, y escribimos la solución en la forma

(2) $$b = c - a,$$

en donde se afirma que $b$ es el resultado de *restar* $a$ de $c$. Por su experiencia anterior con los números el estudiante se dará cuenta de que las relaciones (1) y (2) son equivalentes, siendo posible obtener una cualquiera de ellas a partir de la otra.

Fijémonos ahora en el importante hecho de que en un sistema de números restringido a los enteros y positivos es imposible restar un número mayor de otro menor. Para hacer posible la sustracción en este caso, se introducen los nuevos números llamados números *enteros* y *negativos* y designados por los símbolos $-1, -2, -3 \ldots$

En particular, si restamos un número entero de sí mismo, obtenemos el importante número *cero* designado por el símbolo 0. Así, si $a$ representa cualquier número entero, tenemos la relación

(3) $$a - a = 0,$$

la cual podemos considerarla como *definición* del cero. Nótese que cero no es ni un número entero positivo ni un entero negativo.

Ahora vamos a considerar la operación de multiplicación ya postulada. Sean $a$ y $b$ las representaciones de dos números enteros dados que vamos a multiplicar entre sí, y sea $c$ la representación de su *producto*. Entonces escribimos la igualdad

(4) $$a \times b = c,$$

en la cual $a$ y $b$ se llaman *factores* de $c$, y afirmamos que dicha relación representa la *solución* del siguiente problema: *Dados* dos números enteros $a$ y $b$, *hallar* su producto $c$.

Consideremos ahora el problema *inverso*, es decir, *dado* el producto $c$ de dos números enteros $a$ y $b$, y *dado* el factor $a$, *hallar* el otro factor $b$. La resolución de este problema requiere una operación que sea *inversa* de la multiplicación y es la llamada *división*. Escribimos la solución en la forma

$$b = \frac{c}{a}, \tag{5}$$

que establece que $b$ es el resultado de *dividir* $c$ entre $a$. En la relación (5), $c$ se llama el *dividendo*, $a$ el *divisor* y $b$ el *cociente*.

Es importante observar que en un sistema de números limitado a los números enteros, no es siempre posible efectuar la operación de dividir. Así, si dividimos el entero 6 entre el entero 3, el resultado es 2, o sea otro entero. Pero si intentamos dividir el entero 5 entre el entero 3, la operación no es posible, ya que no existe ningún número entero que multiplicado por el entero 3 dé un producto igual al entero 5. Para hacer que en este caso, y en otros análogos, la división sea posible, se introducen nuevos números llamados números fraccionarios o *fracciones* y que representan como se indica en el segundo miembro de la igualdad (5), llamándose *numerador* al entero $c$ y *denominador* al entero $a$.

Habiendo incluido las fracciones en nuestro sistema de números, la operación de dividir expresada en la igualdad (5), es posible en todos los casos con una sola excepción, a saber, cuando el divisor $a$ es cero. Más adelante veremos que en la operación de dividir está excluida la *división entre cero*. En consecuencia las igualdades (4) y (5) son equivalentes, siendo posible obtener una cualquiera de ellas a partir de la otra, siempre y cuando *el divisor $a$ sea diferente de cero.*

Hasta este momento nuestro sistema de números está formado por los números enteros positivos y negativos, el cero y los números fraccionarios positivos y negativos. Estos números constituyen el *sistema de los números racionales.*

**Definición.** Se dice que un número es *racional* si puede ser expresado en la forma $p/q$ en donde $p$ es cualquier número entero positivo o negativo, o cero, y $q$ es cualquier número entero positivo o negativo.

Los números enteros son números racionales. Por ejemplo, $5 = {}^{5}\!/_{1} = {}^{10}\!/_{2}$, etc. También el cero es un número racional ya que $0 = 0/a$ en donde $a$ es cualquier entero diferente de cero.

Consideremos ahora el caso especial de la multiplicación en que todos los factores que se van a multiplicar son iguales. Así, si multiplicamos el número $a$ por sí mismo, obtenemos el producto $aa$, el cual generalmente escribimos en la forma $a^2$. En general, el producto de $n$ factores, cada uno de ellos iguales a $a$, se escribe en la forma $a^n$, recibiendo el número entero y positivo $n$ el nombre de *exponente*. En este caso decimos que hemos *elevado el número a a la enésima potencia*, operación que recibe el nombre de *potenciación*.

Esta operación se escribe en la forma

$$a^n = b, \tag{6}$$

y representa la solución al siguiente problema: *Dados* el número $a$ y el número entero y positivo $n$ *hallar* el número $b$ que es la *enésima potencia* de $a$. Consideremos ahora el problema *inverso*, es decir, *dados* el número $b$ y el entero y positivo $n$ *hallar* el número $a$ cuya *enésima potencia* es igual a $b$. La resolución a este problema requiere una operación que es *inversa* de la potenciación, llamada *radicación*. La solución se escribe en la forma

$$a = \sqrt[n]{b}, \tag{7}$$

la cual establece que $a$ es una *raíz enésima de b*. Por esta razón la operación de radicación también es llamada *extracción de una raíz*. En la igualdad (7), el símbolo $\sqrt{\phantom{x}}$ se llama *radical* y el entero $n$ se llama *índice de la raíz*.

Hemos llegado ahora a una importante etapa en el desarrollo del sistema de números usados en álgebra. Las operaciones de adición, sustracción, multiplicación, división y potenciación, cuando se aplican a números racionales producen resultados únicos que son también números racionales, es decir, no requieren ampliación del sistema de números.

Sin embargo, esto no es cierto para la radicación. Por ejemplo, la raíz cuadrada de 4 no tiene un resultado único pues puede ser $+2$ ó $-2$ ya que $(-2)^2 = 4$, o sea, lo mismo que $(+2)^2$. En este caso los resultados aunque no son únicos son todavía racionales. Sin embargo consideremos ahora la raíz cuadrada positiva de 2, la cual puede ser escrita simplemente como $\sqrt{2}$. No es difícil demostrar que este número no puede ser expresado en la forma $p/q$ de modo que llene el requisito de la definición de número racional. Un número como éste se llama *irracional*. El sistema de números racionales, junto con todos los números irracionales positivos y negativos constituyen el *sistema de números reales* del álgebra.

Investigaremos ahora la última ampliación de nuestro sistema de números. Hemos visto que la radicación no sería posible en algunos casos si nos limitáramos al sistema de números racionales. Fue esto lo que nos hizo añadir los números irracionales a nuestro sistema numérico. Podemos observar también que en nuestros ejemplos anteriores se han utilizado únicamente la raíz cuadrada de números positivos. Para que la radicación comprenda todos los casos, debemos considerar también la extracción de raíces de números negativos. Por ejemplo, tratemos de hallar la raíz cuadrada de —4, es decir, queremos hallar un número $a$ tal que $a^2 = -4$. Como una propiedad fundamental del sistema de los números reales es que el cuadrado (o una potencia par) de cualquier número real (positivo o negativo) es un número real positivo, resulta evidente que el número $a$ no puede pertenecer al sistema de números reales. Para hacer posible esta operación es necesario introducir una nueva clase de números.

Sea $c$ cualquier número positivo lo cual equivale a que $-c$ sea un número negativo y que $\pm\sqrt{-c}$ no sea número real. Podemos escribir

$$\pm\sqrt{-c} = \pm\sqrt{c}\sqrt{-1}. \tag{8}$$

En esta relación $\pm\sqrt{c}$ es un número real, lo que significa que si queremos dar algún significado a $\pm\sqrt{-c}$, debemos dar significado o sea definir, a $\sqrt{-1}$.

**Definición.** La cantidad $\sqrt{-1}$ se llama la *unidad imaginaria,* la cual se representa por medio del símbolo $i$, y tiene la propiedad de que $i^2 = -1$.

Según esta definición la relación (8) puede ser escrita en la forma

$$\pm\sqrt{-c} = \pm\sqrt{c}i.$$

Ya que $\pm\sqrt{c}$ es un número real, lo podemos representar por medio del número real $b$ resultando que $bi$ representa una nueva clase de números que definimos así:

**Definición.** Un número de la forma $bi$, en donde $b$ es cualquier número real e $i$ es la unidad imaginaria, se llama un *número imaginario puro.*

Más adelante encontraremos números que constan de la suma de un número real con un número imaginario puro. Son los números complejos que se definen así:

**Definición.** Un número de la forma $a + bi$, en donde $a$ y $b$ son números reales e $i$ es la unidad imaginaria, se llama un *número complejo.*

Debido a todo lo anterior podemos decir ahora que para hacer posibles en todos los casos las seis operaciones, fue necesario ampliar nuestro sistema de números hasta la inclusión de los números complejos. Pero podemos hacer una observación muy significativa respecto al número complejo $a + bi$. Si $a = 0$ pero $b \neq 0$, $a + bi$ toma la forma $bi$, lo cual significa que los números imaginarios puros son un caso especial de los números complejos. Si $b = 0$, $a + bi$ toma la forma $a$, y por lo tanto representa un número real. Según este punto de vista un número real es simplemente un caso particular de un número complejo, por lo cual se dice que el conjunto de todos los números reales es un subconjunto del conjunto de números complejos. Aunque a menudo tendremos ocasión de hacer una distinción precisa entre números reales y complejos, consideraremos, en virtud de nuestra última afirmación, que *el sistema de números usado en el álgebra es el de los números complejos.*

## 1.4. LAS OPERACIONES ALGEBRAICAS

Las seis operaciones que hemos visto en el artículo anterior: adición, sustracción, multiplicación, división, potenciación y radicación, son las operaciones algebraicas. Estas operaciones son de gran importancia no solo en álgebra sino también en cualquier otra rama de las matemáticas donde puedan ser usadas. Estas operaciones están sujetas a ciertas restricciones o condiciones llamadas *propiedades* o *leyes*. Es esencial para poder obtener resultados correctos, aplicar las operaciones de acuerdo con estas leyes. El uso inadecuado de las operaciones algebraicas es probablemente la causa de la mayor dificultad con que se encuentran no solo los estudiantes de álgebra sino también los de otras ramas de las matemáticas. Esta es la razón por la cual todo el siguiente capítulo se ha dedicado al tema de las operaciones algebraicas.

En los artículos precedentes hemos observado que para hacer posibles en todos los casos las operaciones algebraicas, fue necesario ampliar nuestro sistema de los números enteros y positivos, postulando originalmente, a los enteros y negativos, cero, fracciones, números irracionales y finalmente números complejos. Es natural que el estudiante se haga ahora la siguiente pregunta: ¿Será necesario introducir algún nuevo tipo de número diferente de los números complejos al efectuar las seis operaciones algebraicas con dichos números? La respuesta es no, pues más adelante veremos que la aplicación de las operaciones algebraicas a los números complejos siempre nos dará resultados que son también números complejos. Esto se expresa diciendo que el sistema o conjunto de los números complejos es *cerrado* respecto a las seis operaciones algebraicas, o lo que es lo mismo, que el sistema de números complejos es adecuado para la aplicación de todas las operaciones algebraicas.

## 1.5. ESTRUCTURA DEL ALGEBRA

Es imposible dar una respuesta concisa y al mismo tiempo satisfactoria a la pregunta: ¿Qué es el álgebra? Cualquier intento en este sentido estaría lejos de dar al estudiante un concepto adecuado de la materia en cuestión. Sin embargo, estamos ahora en condiciones de establecer que el álgebra tiene una estructura caracterizada por

(1) Un conjunto determinado de símbolos que representan números complejos.

(2) Un conjunto determinado de operaciones que se pueden efectuar con los símbolos (1), y que son las seis operaciones algebraicas.

(3) Las propiedades o leyes de las operaciones (2).

Los dos primeros puntos han sido ya considerados en los artículos 1.3 y 1.4 respectivamente, el punto (3) será estudiado en el capítulo siguiente.

Evidentemente, resulta que el álgebra tiene una estructura muy sencilla. Veremos en todo lo que sigue que todos los temas y problemas considerados en el álgebra resultan de sujetar los símbolos (1) a las operaciones (2) de acuerdo con las propiedades (3).

## 1.6. NATURALEZA DEL ALGEBRA

Es natural, y es lo acostumbrado, presentar inicialmente al estudiante los temas del álgebra como una generalización de los de la aritmética. Así es como el estudiante se encuentra por primera vez con los números negativos. También aprende a usar las letras como una representación de los números y pronto se da cuenta de la ventaja de representar con la letra *x*, o con cualquier otra letra, la cantidad desconocida al resolver ciertos problemas. Ahora veremos que estas ideas son ejemplos de la estructura del álgebra.

Podemos resumir lo expuesto en este capítulo caracterizando la *naturaleza del álgebra* en la siguiente definición.

**Definición fundamental.** Se dice que un proceso matemático es *algebraico* si contiene una o varias de las operaciones de adición, sustracción, multiplicación, división, potenciación y radicación aplicadas una o varias veces, en cualquier orden, a números complejos cualesquiera o a símbolos cualesquiera que representen números complejos.

Como un ejemplo de esta definición consideremos la expresión $2x^2 - 3xy + 4y^2$. Esta expresión es *algebraica* porque ha sido formada aplicando operaciones algebraicas a números y a letras que representan números.

Como otro ejemplo consideremos la ecuación cuadrática

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0.$$

El estudiante que ha estudiado esta ecuación recordará que su solución está dada por la fórmula

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Esta solución es algebraica ya que contiene operaciones algebraicas efectuadas con números. Es interesante observar que en el cálculo de esta fórmula intervienen las seis operaciones algebraicas.

Terminaremos exponiendo brevemente otro tema que arroja luz adicional sobre la naturaleza del álgebra.

Cuando el estudiante estudió geometría en la escuela secundaria se le dijo que esa materia es conocida con el nombre de geometría *euclidiana*. Tal vez se le haya dicho también que existen otras geometrías, conocidas con el nombre de geometrías *no euclidianas*, las cuales tienen propiedades muy diferentes a las de la geometría euclidiana. En forma análoga, como veremos ahora, existen otras álgebras con propiedades diferentes de las del álgebra que estamos estudiando.

Hay números cuya estructura es diferente de la de nuestros números complejos $a + bi$, o bien que son una generalización de ellos. Tales números se llaman *números hipercomplejos*. Un tipo de números hipercomplejos lo forman los llamados *cuaterniones*. No siendo un cuaternión un número complejo podemos esperar que presente diferencias en varios respectos. Una de ellas es la siguiente: la *multiplicación* de números complejos tiene la *propiedad conmutativa*, que establece que el producto de dos números es independiente del orden de los factores. Así, si $x$ e $y$ son dos números complejos, el producto $xy$ es idéntico al producto $yx$. Sin embargo, si $A$ y $B$ son dos cuaterniones, no es cierto, en general, que $AB$ y $BA$ sean iguales. Las propiedades y aplicaciones de los cuaterniones constituyen el campo de estudio conocido como el *álgebra de cuaterniones*.

Otra álgebra de gran interés es el *álgebra de matrices*. Cualquiera de los elementos básicos en esta álgebra recibe el nombre de *matriz;* esta álgebra es de gran importancia en las matemáticas y la física modernas. La multiplicación de matrices, al igual que la de cuaterniones, no tiene, en general, la propiedad conmutativa.

Existen muchas otras álgebras, aparte de las dos citadas anteriormente, pero su estudio cae fuera del propósito de este texto y corresponde a tratados más superiores. Para distinguirla de cualquier otro tipo de álgebra, la materia que vamos a estudiar en este libro recibe generalmente el nombre de *álgebra de los números complejos.*

# 2

# Operaciones algebraicas

## 2.1. INTRODUCCION

En este capítulo se tratará de las operaciones algebraicas (Art. 1.4) y de la manera de efectuarlas. Destaquemos, una vez más, la gran importancia de aprender a efectuar bien tales operaciones. La habilidad para manipular las expresiones algebraicas, con precisión y rapidez, es un requisito primordial para progresar satisfactoriamente en las aplicaciones del álgebra. Tal habilidad se adquiere principalmente por medio de la práctica. Por lo tanto, se insiste en la gran conveniencia de que el estudiante resuelva el mayor número posible de los problemas contenidos en las series de ejercicios de este capítulo.

## 2.2. EXPRESION ALGEBRAICA, TERMINO, POLINOMIO

De acuerdo con la definición fundamental de proceso algebraico (Art. 1.6), el resultado de un proceso de dicho tipo se llama *expresión algebraica.* Así, $3x^2y + z$ es una expresión algebraica porque se obtiene efectuando operaciones algebraicas con el número 3 y las letras $x$, $y$ y $z$, las cuales representan números. Otros ejemplos de expresiones algebraicas son $6x^2 - 7x + 8$, $2a + \frac{\sqrt{a}}{b}$, y $\frac{x^2 + 2}{x^3 - 5x^2 + 7}$.

La representación más sencilla de un número se hace por medio de cifras o de una literal. Así, por ejemplo, la cifra 5 ó la literal $b$. La más simple de las expresiones algebraicas en las que intervienen más de un número o literal, se obtiene combinando estos números y letras por medio de cualquiera de las operaciones algebraicas, con excepción de la adición y la sustracción. Las siguientes son ejemplos de esta clase de expresiones algebraicas: $5xy$, $2a^2b$, $3x/2y$, $4\sqrt{ac}$. Cada una de ellas se llama *término algebraico.*

Cualquier factor de un término algebraico se llama *coeficiente* de los factores restantes. Así, en el término $5xy$, 5 es coeficiente de $xy$ y $5x$ es coeficiente de $y$. Sin embargo, generalmente conviene considerar como coeficiente solamente a un número o una letra. Por lo tanto, 5 es coeficiente (numérico) de $xy$ en el término $5xy$ y $b$ es el coeficiente (literal) de $xy$ en el término $bxy$.

Los términos algebraicos que difieren únicamente en sus coeficientes se llaman términos *semejantes.* Por ejemplo $5xy$ y $-7xy$ son términos semejantes.

Si las literales de un término algebraico están combinadas solamente por medio de la operación de multiplicación, se dice que el *término es racional* entero. Por ejemplo, los términos $5xy$, $-\frac{3}{2}x^2$ y $\sqrt{5}ab^2c^3$ son todos racionales enteros.

Observamos que los exponentes de un término racional entero son números enteros y positivos. Se entiende por *grado* de un término racional entero a la suma de los mencionados exponentes. Por ejemplo, $5xy$ es de grado 2, $-\frac{3}{2}x^2$ es de grado 2 y $\sqrt{5}ab^2c^3$ es de grado 6.

Un solo término algebraico se llama *monomio.* Si dos o más expresiones algebraicas están enlazadas por los signos + o —, la expresión resultante se llama *suma algebraica.* Una suma algebraica de dos términos se llama *binomio* y una de tres términos es un *trinomio.* En general, una suma algebraica de dos o más términos se llama *multinomio.* Por ejemplo, el multinomio $4x^2 - 2x\sqrt{y} + y^2/2$ consta de los términos $4x^2$, $-2x\sqrt{y}$ e $y^2/2$. Obsérvese que *los términos de un multinomio están separados por los signos + o —.*

El tipo particular del multinomio formado solamente por términos racionales enteros se llama *polinomio.* Son ejemplos de polinomios: $2x^2 + 3xy + y^2$, $\sqrt{2}z^3 - \frac{4}{3}z^2 + 4z - 8$, y $3x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 8x + 5$. Se entiende por *grado* de un polinomio el grado del término de mayor grado. Así, los tres polinomios anteriores son de grados 2, 3 y 4, respectivamente. Si todos los términos de un polinomio son del mismo grado, se dice que es *homogéneo.* Por lo tanto, el primer polinomio es homogéneo, pero el segundo y el tercero no lo son.

En este capítulo consideraremos únicamente las operaciones algebraicas con expresiones algebraicas del tipo anteriormente descrito. Además, si hay alguna observación en sentido contrario, consideraremos que dichas operaciones se aplicarán *únicamente a números reales.* Posteriormente haremos un estudio especial de los números completos (Capítulo 8).

## 2.3. ADICION

La adición es una operación que se caracteriza por los siguientes cinco postulados llamados *propiedades* o *leyes* de la adición.

(1) *Ley de existencia. La adición es siempre posible.* Es decir, siempre es posible efectuar esta operación con dos o más números, y el resultado es también un número.

(2) *Ley de unicidad. La adición es única.* Es decir, dados dos números cualesquiera $a$ y $b$ existe un solo número $c$ tal que $a + b = c$. El número $c$ es la *suma* de $a$ y $b$.

(3) *Ley conmutativa. La adición es conmutativa.* Esto es, si $a$ y $b$ son dos números cualesquiera, entonces $a + b = b + a$. En otras palabras la suma de dos (o más) números es independiente del orden de los sumandos.

*Ejemplo:* $2 + 5 = 5 + 2$.

(4) *Ley asociativa. La adición es asociativa.* Esto es, si $a, b, c$ son tres números cualesquiera entonces $(a + b) + c = a + (b + c)$. En otras palabras, la suma de tres (o más) números es independiente de la manera en que éstos se agrupen.

*Ejemplo:* $(2 + 5) + 8 = 2 + (5 + 8)$.

(5) *Propiedad aditiva de la igualdad.* Si $a, b,$ y $c$ son números cualesquiera tales que $a = b$, entonces $a + c = b + c$.

El lector podrá reconocer en esta propiedad al conocido axioma que dice: si a números iguales se añaden números iguales resultan sumas iguales.

Estas leyes pueden ser generalizadas a cualquier número de sumandos.

Al describir la ley asociativa de la suma usamos un *símbolo de agrupación* llamado *paréntesis* que se representa por el símbolo ( ). El propósito de este símbolo es indicar que todos los términos encerrados en él deben ser considerados como un solo número. Otros símbolos de agrupación son: el *paréntesis rectangular* [ ], la *llave* { }, y la *barra* o *vínculo* ——, la cual se çoloca arriba de las cantidades que se van a agrupar, como, por ejemplo, en $2 + \overline{5 + 8}$.

La suma de expresiones algebraicas cuyos términos son todos positivos se efectúa exactamente como en la aritmética. Sin embargo si algunos de los términos son negativos el proceso requiere un método especial. Ya que los números negativos se introducen para hacer posible la sustracción en todos los casos (Art. 1.3), es preferible diferir la consideración de los problemas de adición algebraica hasta después de estudiar la sustracción.

## 2.4. SUSTRACCION

En el Art. 1.3 describimos la sustracción como la operación inversa de la adición. La sustracción queda *definida* bajo la siguiente

HIPOTESIS. Dados dos números cualesquiera $a$ y $c$, existe un número $b$ y solo uno tal que

$$a + b = c. \tag{1}$$

Este número $b$ está dado por la igualdad

$$b = c - a, \tag{2}$$

que se lee "$b$ es igual a $c$ menos $a$" y en la cual diremos que $b$ es la *diferencia* obtenida al *restar* el *sustraendo* $a$ del *minuendo* $c$.

*Ejemplo:* $5 + 2 = 7$, siendo $2 = 7 - 5$.

También podemos decir que $b$ es el número que debe ser *sumado* con $a$ para producir el número $c$. Así, de (1) y (2) obtenemos la relación

$$a + (c - a) = c. \tag{3}$$

La sustracción tiene la siguiente propiedad:

*Propiedad sustractiva de la igualdad.* Si $a$, $b$ y $c$ son números cualesquiera tales que $a = b$, entonces $a - c = b - c$.

El estudiante reconocerá esta ley como el conocido axioma que dice: si se restan números iguales de números iguales las diferencias son iguales.

Es importante observar que según la hipótesis hecha anteriormente el resultado de la sustracción es *único*. Ahora veremos cómo se puede hacer posible la operación de restar en cualquier caso. Para ello veamos primero lo que significa la expresión "un número es *mayor* que otro".

**Definición.** Se dice que el número $x$ es *mayor* que el número $y$, si $x - y$ es un número positivo. Entonces escribimos $x > y$, que se lee "$x$ es mayor que $y$".

*Ejemplo:* $7 > 5$, ya que $7 - 5 = 2$, siendo 2 un número positivo.

La relación $x > y$ implica también que $y$ es *menor* que $x$, escribiéndose $y < x$. Estas dos relaciones son, por supuesto, equivalentes.

Haciendo referencia a la anterior relación (2), resulta que se deben considerar tres casos.

(I) $a < c$. Entonces $b = c - a$ es un número positivo. Este caso corresponde al caso aritmético ordinario en que se resta un número de otro mayor.

(II) $a = c$. En este caso $b = c - a = c - c = 0$ por definición de cero (Art. 1.3). Por lo tanto, de (1) tenemos

$$a + 0 = a$$

y luego, por la ley conmutativa de la suma (Art. 2.3), tenemos

$$a + 0 = 0 + a = a, \tag{4}$$

lo cual expresa una importante propiedad del cero.

(III) $a > c$. En este caso se trata de restar un número de otro menor. Esta es la primera desviación importante respecto a las operaciones aritméticas.

De $a > c$ se concluye que $a - c = p$, en donde $p$ es un número positivo, de modo que la expresión $c - a$ de la relación (2) no tiene sentido en un sistema restringido a los números enteros y positivos. Para hacer posible la resta en este caso *definimos* a $c - a$ en la relación (2) como un *número negativo* y escribimos

$$c - a = -p,$$

$$c - a = -(a - c). \tag{5}$$

Como un ejemplo de la relación (5) tenemos

$$5 - 7 = -(7 - 5) = -2.$$

En el caso particular en que $c = 0$, el número negativo $c - a$ que hemos definido toma la forma $0 - a$, que se abrevia escribiendo $-a$ y se llama el *negativo de a*. Esto es,

$$0 - a = -a. \tag{6}$$

El número positivo $p$ se escribe a veces $+p$, leyéndose "más $p$" para hacer destacar el signo positivo. El número negativo $-p$, que se lee "menos $p$" siempre va precedido del signo negativo. Si $p$ es cualquier número positivo, es conveniente llamar a $-p$ su *número negativo correspondiente*. Así, $-5$ es el número negativo correspondiente a 5.

El *valor absoluto* de cualquier número $a$, se representa por $|a|$, y significa su valor aritmético ordinario sin considerar el signo. Por ejemplo $|5| = 5$ y $|-2| = 2$. Evidentemente, cualquier número positivo y su número negativo correspondiente tienen el mismo valor absoluto.

Al hablar de los números con signos hemos usado los signos positivo y negativo como *signos de cualidad que denotan "número positivo"* o *"número negativo"*. Sin embargo estos mismos signos han sido usados previamente como *signos de operación*. Este doble uso o significado de los signos positivo y negativo queda justificado con los teoremas siguientes.

**Teorema 1.** *La suma de cualquier número positivo con su correspondiente número negativo es cero.*

DEMOSTRACION. Sea $a$ cualquier número positivo, de modo que $-a$ es su número negativo correspondiente. Entonces por la anterior relación (6),

$$a + (-a) = a + (0 - a).$$

Si ahora hacemos $c = 0$ en la relación (3), que es la definición de sustracción, tenemos $a + (0 - a) = 0$, de modo que el segundo miembro de la igualdad anterior se anula.

Por lo tanto, $a + (-a) = 0$, como se quería demostrar.

Un ejemplo sencillo de este teorema es $5 + (-5) = 0$.

**Teorema 2.** *La operación de sumar un número negativo es equivalente a la operación de restar un número positivo que tenga el mismo valor absoluto.*

DEMOSTRACION. Sea $a$ un número cualquiera y $b$ un número positivo, de modo que $-b$ es su número negativo correspondiente. Vamos a probar que

$$a + (-b) = a - b. \tag{7}$$

Por la ley de unicidad de la adición (Art. 2.3),

$$a + (-b) = c. \tag{8}$$

Añadiendo $b$ a ambos lados (propiedad aditiva de la igualdad, Artículo 2.3),

$$[a + (-b)] + b = c + b.$$

de donde, por la ley asociativa, $a + [(-b) + b] = c + b$.

Por el teorema 1, $(-b) + b = 0$.

Luego, $a + 0 = c + b$,

y por (4), $a = c + b$,

y por las relaciones (1) y (2), tenemos

$$c = a - b. \tag{9}$$

De las igualdades (8) y (9) obtenemos (7) que es lo que se quería demostrar.

También se puede establecer, por medio del teorema 2 y de la definición de sustracción, el teorema siguiente:

**Teorema 3.** *La operación de restar un número negativo es equivalente a la operación de sumar un número positivo del mismo valor absoluto.*

Es decir, si $a$ es un número cualquiera y $b$ es un número positivo, siendo $-b$ su número negativo correspondiente, entonces

$$a - (-b) = a + b$$

la demostración de este teorema se deja como ejercicio.

Ahora estamos en situación de caracterizar completamente la operación de la adición algebraica.

**Teorema 4.** *Si $a$, $b$ y $p = a + b$ son tres números positivos, de modo que $-a$, $-b$ y $-p$ representan, respectivamente sus números negativos correspondientes, entonces en la adición algebraica son válidas las siguientes relaciones:*

I. $a + b = p$.
II. $-a + (-b) = -a - b = -(a + b) = -p$.
III. Si $a > b$, entonces $a + (-b) = a - b$.
Si $a < b$, entonces $a + (-b) = a - b = -(b - a)$.

La relación I es aritmética y es parte de la hipótesis. Las relaciones II y III son consecuencia del teorema 2 y de la relación (5).

Estas relaciones pueden ser enunciadas como sigue:

I y II. Para sumar dos números de signos iguales súmense sus valores absolutos y antepóngase a la suma el signo común.

III. Para sumar dos números de signos contrarios réstese el de menor valor absoluto del de mayor valor absoluto y antepóngase a la diferencia el signo del número que tenga mayor valor absoluto.

Ejemplos:

$$2 + 5 = 7.$$
$$(-2) + (-5) = -2 - 5 = -(2 + 5) = -7.$$
$$(-2) + (5) = -2 + 5 = 5 - 2 = 3.$$
$$(2) + (-5) = 2 - 5 = -(5 - 2) = -3.$$

Las relaciones del teorema 4 pueden ser generalizadas a tres o más números.

Como una consecuencia directa de los teoremas 2, 3 y 4, se establece el siguiente procedimiento para restar:

**Teorema 5.** *La operación de restar un número de otro consiste en cambiar el signo del sustraendo y luego proceder como en la suma algebraica (Teorema 4).*

Ahora podemos observar una sencilla pero importante propiedad que relaciona a los números positivos y negativos y el cero. Sea $a$ un número positivo y por lo tanto $-a$ un número negativo. Por la relación (4):

$$a + 0 = a,$$

de donde, por la definición de sustracción, relación (2), tenemos

(10) $$a - 0 = a.$$

Por el teorema 3, $0 - (-a) = 0 + a$

de donde, por la relación (4), resulta:

(11) $$0 - (-a) = a.$$

Ahora, de la definición anterior de "mayor que" se concluye de (10) que

(12) $$a > 0,$$

y de (11), que $0 > -a$, o sea,

(13) $$-a < 0.$$

De las relaciones (12 y (13) tenemos:

**Teorema 6.** *Un número positivo es mayor que cero y un número negativo es menor que cero.*

De este teorema se infiere que el *cero no es ni un número positivo ni un número negativo*. Consecuentemente, con el nombre *números no negativos* designamos a todos los números positivos *y al cero*. Si $a$ es un número de esta clase (no negativo) escribimos $a \geq 0$, que se lee "$a$ es mayor o igual que cero".

Ahora veamos unos ejemplos de operaciones de adición y sustracción algebraicas.

**Ejemplo 1.** Calcular la suma de las siguientes expresiones algebraicas: $x^3 + 2x^2y - 4xy^2$, $2x^3 - 4x^2y + 3y^3$, $2xy^2 - 4y^3$.

SOLUCION. Primero escribimos las expresiones de modo que los términos semejantes queden en columna. Luego aplicamos las leyes de la suma enunciadas en el Teorema 4. El resultado es el siguiente:

$$\begin{array}{rrrrr}
 & x^3 + 2x^2y & - 4xy^2 & \\
 & 2x^3 - 4x^2y & & + 3y^3 \\
 & & 2xy^2 & - 4y^3 \\
\hline
\text{Suma} = & 3x^3 - 2x^2y & - 2xy^2 & - y^3
\end{array}$$

**Ejemplo 2.** Hallar la diferencia obtenida al restar $a^3 - 3a^2 + 4a - 7$ de $2a^3 + a^2 - 3a - 5$.

SOLUCION. Escribimos el sustraendo debajo del minuendo de modo que los términos semejantes queden en columna. Entonces, considerando que el signo de cada término del sustraendo cambia, sumamos los términos semejantes de acuerdo con el Teorema 5.

$$\begin{array}{lr}
\text{Minuendo} & 2a^3 + a^2 - 3a - 5 \\
\text{Sustraendo} & a^3 - 3a^2 + 4a - 7 \\
\cline{2-2}
\text{Diferencia} & a^3 + 4a^2 - 7a + 2.
\end{array}$$

Si al lector le parece más sencillo, al escribir el sustraendo se puede cambiar el signo de cada término y luego sumar.

La adición y sustracción de expresiones algebraicas a menudo requieren el uso de símbolos de agrupación (Art. 2.3). La simplificación de tales expresiones requiere quitar estos símbolos. Según nuestros resultados anteriores tenemos el siguiente procedimiento para manejar una expresión algebraica que está encerrada entre paréntesis.

Un paréntesis precedido del signo más puede suprimirse sin hacer ningún otro cambio. Un paréntesis precedido del signo menos puede suprimirse cambiando el signo de cada uno de los términos encerrados en él.

Si una expresión contiene más de un símbolo de agrupación puede usarse cualquier orden para suprimir dichos símbolos. Sin embargo, es generalmente más sencillo suprimir un símbolo de agrupación en cada paso, suprimiendo cada vez el símbolo que no tiene en su interior otros símbolos de agrupación.

**Ejemplo 3.** Simplificar la expresión:

$$5a - (2a - \{4a + 2b + [a - 3b]\}).$$

SOLUCION. Suprimiendo primero el paréntesis rectangular tenemos

$$\begin{aligned}
&5a - (2a - \{4a + 2b + a - 3b\}) \\
&= 5a - (2a - 4a - 2b - a + 3b) \\
&= 5a - 2a + 4a + 2b + a - 3b = 8a - b.
\end{aligned}$$

Al adquirir práctica, el estudiante puede efectuar dos o más pasos a la vez acortando considerablemente la simplificación.

## EJERCICIOS. GRUPO 1.

En cada uno de los ejercicios 1-5 calcular la suma de las expresiones algebraicas dadas.

1. $2a^3 - 2a^2b + 2b^3$, $3a^2b - 4ab^2 - 4b^3$, $2ab^2 - a^3$.
2. $4m^2 - 3mn + 2n^2$, $6mn - 2n^2 + 5$, $3n^2 - 3 - 2m^2$.
3. $x^2 - 4xy + 3y^2$, $2x^2 + 2xy - 2y^2$, $2xy - y^2 - x^2$.
4. $3x^3 - 8x^2 + 9x$, $-x^3 + 3x^2 - 8$, $2x^3 - 2x^2 - 7x + 5$.
5. $c^2 + 2cd - 2d$, $3c - 3cd - 2d^2$, $c^2 + 4d - 2c + 2d^2$.

En cada uno de los ejercicios 6-10 hallar la diferencia obtenida al restar la segunda expresión de la primera.

6. $3a - 2b + 4c - d,\ 2a + b - 3c - d.$
7. $x^3 - 4x^2 + 2x - 5,\ -x^3 + 2x^2 - 3x - 3.$
8. $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3,\ a^3 - 4a^2b + 2ab^2 + b^3.$
9. $2a + 4by - 2cy^2 + dy^3,\ 2dy^3 - 2by - a + 3cy^2.$
10. $m^4 + 6m^3 - 7m^2 + 8m - 9,\ 2m^3 + 3m^2 - 4m - 3.$

En los ejercicios 11-15, $A = x^3 + 2x^2 - 3x + 1$, $B = 2x^3 - x^2 + 4x - 7$, y $C = x^3 + x^2 - 6x - 2$.

11. Calcular $A + B - C$.
12. Calcular $A - B + C$.
13. Calcular $A - B - C$.
14. Calcular $B - A + C$.
15. Calcular $B - A - C$.

16. Demostrar que la suma de todas las expresiones en los ejercicios 11-15 es igual a la expresión en el ejercicio 11.

En cada uno de los ejercicios 17-21, simplificar la expresión dada.

17. $5 - \{2 + 3 - (4 - \overline{3 - 2}) + [5 - 8]\}.$
18. $4 + [5 - (6 - 9 + \{7 - 2\}) - (12 - 5)].$
19. $x + 2y - (4y - x + [3x - 2y] - \{2x - 2y\}).$
20. $4a - [6b + \{2a - [3b + a - \overline{b + 4a}]\}].$
21. $m + 2n - \{3m - \overline{2m + n} - (2n - [m - 4n])\}.$

22. (*a*) Hallar el número que debe añadirse a $-8$ para que la suma sea igual a 15. (*b*) Encontrar el número que debe añadirse a 7 para que la suma sea igual a $-3$.

23. (*a*) Hallar el número que debe restarse de 4 para que la diferencia sea 6. (*b*) Encontrar el número que debe restarse de $-11$ para que la diferencia sea 4.

24. (*a*) Hallar el número que al restarle 8 se obtenga $-2$. (*b*) Encontrar el número que al disminuirle $-7$ resulte 4.

25. Hallar la expresión que debe sumarse a $3a - 2b + 4c$ para obtener $2a + 3b - 2c$.

26. Encontrar la expresión que debe restarse de $4x + 2y - 7$ para que la diferencia sea igual a $3x - y + 5$.

27. Encontrar la expresión que debe disminuirse en $2m - 2n + 3p$ para obtener una diferencia igual a $4m + n - 2p$.

Cada uno de los ejercicios 28-31 se refiere a un problema de sustracción.

28. El minuendo es $2a^2 + 2ab - b^2$; la diferencia es $a^2 + 3ab - 2b^2$. Hallar el sustraendo.

29. El sustraendo es $x^2 + 3x - 7$; la diferencia es $3x^2 - 3x + 4$. Encontrar el minuendo.

30. La diferencia es $x^2 + 2xy - 3y^2$; el minuendo es $3x^2 - 2xy + y^2$. Hallar el sustraendo.

31. La diferencia es $a^3 + 3a^2 - 2a + 5$; el sustraendo es $2a^3 - 2a^2 + a - 5$. Hallar el minuendo.

32. Por medio de la definición de "mayor que" comprobar las siguientes relaciones: $9 > 2$; $-2 > -9$; $2 > -9$.

33. Si $a$ es un número positivo, comprobar las siguientes relaciones: $-3a > -5a$; $a > -2a$; $-4a < -a$.

34. Ampliar a tres o más números la ley de unicidad de la adición.

35. Ampliar a tres o más números la ley conmutativa de la adición.
36. Generalizar a cuatro o más números la ley asociativa de la adición.
37. Demostrar que la suma de cualquier número negativo con su valor absoluto es igual a cero.
38. Demostrar el Teorema 3 del Art. 2.4.
39. Dar una demostración detallada del Teorema 4 del Art. 2.4.
40. Dar una demostración detallada del Teorema 5 del Art. 2.4.

## 2.5. MULTIPLICACION

Como se observó en el Art. 1.2, la multiplicación, al igual que la adición, es una de las operaciones postuladas en el álgebra. Se le caracteriza por medio de cinco propiedades o leyes análogas a las de la adición (Art. 2.3). Al enunciar estas leyes observemos que el signo de multiplicar × o · generalmente se omite al tratarse de dicha operación efectuada con letras. Es decir, $a \times b$, $a \cdot b$ y $ab$ tienen el mismo significado.

(1) *Ley de existencia. La multiplicación es siempre posible.* Es decir, siempre es posible efectuar esta operación para dos o más números cualesquiera y el resultado es también un número.

(2) *Ley de unicidad. La multiplicación es única.* Esto es, para dos números dados cualesquiera $a$ y $b$, existe un número $c$ y sólo uno tal que $ab = c$. El número único $c$ se llama el *producto* de $a$ por $b$, siendo $a$ y $b$ sus *factores*. Los factores $a$ y $b$ reciben también los nombres de *multiplicando* y *multiplicador*, respectivamente.

(3) *Ley conmutativa. La multiplicación es conmutativa.* Esto es, si $a$ y $b$ son dos números cualesquiera entonces $ab = ba$. En otras palabras, el producto de dos (o más) números es independiente del orden en que se efectúe la multiplicación.

$$\textit{Ejemplo:}\quad 2 \times 5 = 5 \times 2.$$

(4) *Ley asociativa. La multiplicación es asociativa.* Es decir, si $a$, $b$ y $c$ son tres números cualesquiera entonces $(ab)c = a(bc)$. En otras palabras, el producto de tres (o más) números es independiente del orden en que se les agrupa.

$$\textit{Ejemplo:}\quad (2 \cdot 5)8 = 2(5 \cdot 8).$$

(5) *Propiedad multiplicativa de la igualdad.* Si $a$, $b$ y $c$ son números cualesquiera tales que $a = b$ entonces $ac = bc$.

El lector reconocerá en esta propiedad al conocido axioma que dice que si números iguales se multiplican por números iguales los productos resultan iguales.

La multiplicación y la adición están relacionadas por medio de la importante propiedad siguiente:

*Propiedad distributiva. La multiplicación es distributiva con respecto a la adición.* Es decir, si $a$, $b$ y $c$ son tres números cualesquiera entonces $a(b + c) = ab + ac$.

*Ejemplo:* $3(2 + 7) = 3 \times 2 + 3 \times 7$.

Estas leyes pueden ser ampliadas a cualquier número de cantidades.

Ahora deduciremos algunas de las propiedades fundamentales de la multiplicación. Empezaremos extendiendo la propiedad distributiva.

**Teorema 7.** *La multiplicación es distributiva con respecto a la sustracción. Esto es, para tres números cualesquiera $a$, $b$, $c$,*

$$a(b - c) = ab - ac.$$

DEMOSTRACION. Sea

$$b - c = x. \tag{1}$$

Por la definición de sustracción (Art. 2.4),

$$b = c + x.$$

Por la propiedad multiplicativa de la igualdad (5),

$$ab = a(c + x),$$

y por la propiedad distributiva que acabamos de enunciar,

$$ab = ac + ax,$$

y, por la definición de sustracción

$$ax = ab - ac.$$

Sustituyendo $x$ por su valor dado en (1),

$$a(b - c) = ab - ac,$$

como se quería demostrar

**Teorema 8.** *El producto de cualquier número por cero es igual a cero.*

DEMOSTRACION. Sea $a$ un número cualquiera. Por la definición de cero (Art. 1.3),

$$\begin{aligned} a \cdot 0 &= a(b - b) \\ &= ab - ab \qquad \text{(por el Teorema 7).} \\ &= 0, \qquad \text{(por la definición de cero),} \end{aligned}$$

como se quería demostrar.

En los dos teoremas siguientes vamos a establecer la ley de los signos de la multiplicación. Para ello necesitamos el siguiente postulado:

POSTULADO. El producto de dos números positivos es un número positivo.

**Teorema 9.** *El producto de un número positivo por un número negativo es un número negativo.*

DEMOSTRACION. Sean $a$ y $b$ dos números positivos cualesquiera, y por lo tanto, $-b$ un número negativo. Sea

$$a(-b) = x. \tag{2}$$

Por la propiedad aditiva de la igualdad (Art. 2.3),

$$a(-b) + ab = x + ab,$$

y por la propiedad distributiva,

$$a[(-b) + b] = x + ab.$$

Pero, por la definición de cero, $(-b) + b = 0$.
Por lo tanto, $a \cdot 0 = x + ab$.
Por el Teorema 8, $0 = x + ab$,

de donde, por la definición de sustracción

$$x = 0 - ab,$$

y, por la relación (6) del Art. 2.4, $x = -ab$, de modo que de (2) $a(-b) = -ab$.

Y como $a$ y $b$ son ambos positivos, por el postulado resulta que su producto $ab$ es positivo, y, por tanto, $-ab$ es un número negativo, como se quería demostrar.

**Teorema 10.** *El producto de dos números negativos es un número positivo.*

DEMOSTRACION. Sean $a$ y $b$ dos números positivos cualesquiera y, por lo tanto, $-a$ y $-b$ dos números negativos. Sea

$$(-a)(-b) = x. \tag{3}$$

Por la propiedad aditiva de la igualdad

$$(-a)(-b) + a(-b) = x + a(-b).$$

Por la propiedad distributiva y el Teorema 9,

$$(-b)[(-a) + a] = x - ab,$$

de donde, por la definición de cero, $(-b)\cdot 0 = x - ab$.
Por el Teorema 8, $0 = x - ab$,
de donde por la definición de sustracción, $0 + ab = x$,
y por la relación (4) del Art. 2.4, $ab = x$,
de modo que, por (3), $(-a)(-b) = ab$.

Y como $a$ y $b$ son números positivos, $ab$ será positivo (según nuestro postulado anterior) con lo cual el teorema queda demostrado.

Como consecuencia de los Teoremas 9 y 10 tenemos la siguiente regla:

### Regla de los signos de la multiplicación

1. El producto de dos números de signos iguales es positivo; el producto de dos números de signos contrarios es negativo.

2. En general, el producto de un número cualquiera de factores es positivo si no hay factores negativos o bien si el número de factores negativos es *par;* el producto será negativo si el número de factores negativos es *impar.*

*Ejemplos:*

$$\begin{aligned} 2 \times 5 &= 10. \\ (2)(-5) &= -(2)(5) = -10. \\ (-2)(-5) &= +(2)(5) = 10. \\ (2)(-3)(-5) &= +(2)(3)(5) = 30. \\ (2)(3)(-5) &= -(2)(3)(5) = -30. \end{aligned}$$

Ahora podemos establecer un teorema muy importante del cual haremos uso más adelante. Este teorema es el recíproco del Teorema 8, y su enunciado es como sigue:

**Teorema 11.** *Si el producto de dos números es igual a cero, por lo menos uno de los factores es igual a cero.*

DEMOSTRACION. Sean $a$ y $b$ dos números tales que

$$ab = 0.$$

Si $a = 0$, el teorema queda demostrado. Supongamos $a \neq 0$ (léase "$a$ no es igual a 0"); entonces, deberemos demostrar que $b = 0$. Tomemos como hipótesis lo contrario de la conclusión deseada, o sea, $b \neq 0$. Ya que ahora se supone que tanto $a$ como $b$ son diferentes de 0 resulta, por el Teorema 6 (Art. 2.4), cada uno de estos números debe ser positivo o negativo. Entonces, por la regla de los signos si coinciden en signo $ab$ será positivo, y si tienen signo distinto, $ab$ será negativo. Pero esto contradice nuestra hipótesis de que $ab = 0$. Por lo tanto, nuestro supuesto de que $b \neq 0$ es falso, con lo cual queda demostrado el teorema.

**Corolario.** *Si el producto de dos o más factores es igual a cero, por lo menos uno de los factores es igual a cero.*

Consideremos ahora la multiplicación de expresiones algebraicas. Al efectuar esta operación resulta conveniente calcular los términos del producto por medio de las llamadas *leyes de los exponentes*. Ya hemos dicho, al estudiar la potenciación (Art. 1.3), que la notación $a^n$, en donde $a$ es cualquier número y $n$ es un número entero y positivo que se llama *exponente*, representa el producto de $n$ factores todos iguales a $a$, diciéndose que $a^n$ es la *enésima potencia* de $a$. En particular, se acostumbra omitir el exponente 1, y las potencias $a^2$ y $a^3$ reciben los nombres de *cuadrado de a* y *cubo de a*, respectivamente. Por ahora necesitamos solamente las tres siguientes leyes de los exponentes, en donde $a$ y $b$ son dos números cualesquiera y $m$ y $n$ son números enteros y positivos.

I. $a^m a^n = a^{m+n}$.
*Ejemplo:* $2^3 \cdot 2^2 = 2^5$.
II. $(a^m)^n = a^{mn}$.
*Ejemplo:* $(2^3)^2 = 2^6$.
III. $(ab)^m = a^m b^m$.
*Ejemplo:* $(3 \cdot 2)^3 = 3^3 \cdot 2^3$.

Estas leyes se demuestran con gran facilidad. Por ejemplo, para la I, tenemos, por la ley asociativa de la multiplicación,

$$\begin{aligned} a^m a^n &= (a \cdot a \cdot a \ldots \text{ hasta } m \text{ factores})(a \cdot a \cdot a \ldots \text{ hasta } n \text{ factores}) \\ &= a \cdot a \cdot a \ldots \text{ hasta } m + n \text{ factores} \\ &= a^{m+n}. \end{aligned}$$

Las demostraciones de las leyes II y III son análogas y se dejan como ejercicios para el estudiante.

Utilizando estas leyes y la regla de los signos podemos obtener el producto de dos o más monomios, como se indica a continuación.

**Ejemplo 1.** Calcular los productos indicados:

(a) $(2a^2b)(—3ab^2)$; (b) $(—4xy^2z)(—2x^2yz)(xyz^2)$;
(c) $(—3m^2n^3)^2$; (d) $(—2p^2q)^3$.

SOLUCION.

(a) $(2a^2b)(—3ab^2) = —6a^{2+1}b^{1+2} = 6a^3b^3$.
(b) $(—4xy^2z)(—2x^2yz)(xyz^2) = 8x^{1+2+1}y^{2+1+1}z^{1+1+2} = 8x^4y^4z^4$.
(c) $(—3m^2n^3)^2 = (—3)^2(m^2)^2(n^3)^2 = 9m^4n^6$.
(d) $(—2p^2q)^3 = (—2)^3(p^2)^3q^3 = —8p^6q^3$.

Consideremos ahora el producto de un monomio y un polinomio. El procedimiento utilizado es una consecuencia inmediata de la propiedad distributiva.

**Ejemplo 2.** Efectuar el producto $a^2b(2ax — 3by — 2ab^2)$.

SOLUCION. Por la propiedad distributiva,

$$\begin{aligned} a^2b(2ax - 3by - 2ab^2) &= (a^2b)(2ax) - (a^2b)(3by) - (a^2b)(2ab^2) \\ &= 2a^3bx - 3a^2b^2y - 2a^3b^3. \end{aligned}$$

Finalmente, consideremos el producto de dos polinomios. Se aplica también la propiedad distributiva. En efecto, consideremos por sencillez, el producto de dos binomios. Entonces, por la propiedad distributiva,

$$(a+b)(x+y) = (a+b)x + (a+b)y$$

y aplicando nuevamente esta propiedad, $= ax + bx + ay + by.$

Así vemos, como se notó en el Ejemplo 2, que el producto de dos expresiones consta de la suma algebraica de los productos obtenidos al multiplicar cada término del multiplicando por cada término del multiplicador. En la práctica es conveniente escribir el multiplicador debajo del multiplicando, estando ambos ordenados según las potencias descendentes de una cierta literal, y luego colocar los productos en columnas de modo que los términos semejantes aparezcan uno debajo de otro para facilitar la suma. Este procedimiento se aplica en el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 3.** Multiplicar $x^2 + xy - 2y^2$ por $3y^2 - 2xy + x^2$.

SOLUCION. Se escribe el multiplicando y el multiplicador ordenados según las potencias descendentes de $x$ y se dispone la operación como sigue:

$$\begin{array}{lrrrrrl} & x^2 & +\ xy & -\ 2y^2 & & & \text{multiplicando} \\ & x^2 & -\ 2xy & +\ 3y^2 & & & \text{multiplicador} \\ \hline (1) & x^4 & +\ x^3y & -\ 2x^2y^2 & & & \\ (2) & & -2x^3y & -\ 2x^2y^2 & +\ 4xy^3 & & \\ (3) & & & 3x^2y^2 & +\ 3xy^3 & -\ 6y^4 & \\ \hline \text{Producto} & x^4 & -\ x^3y & -\ x^2y^2 & +\ 7xy^3 & -\ 6y^4. & \end{array}$$

Las filas (1), (2) y (3) se obtienen multiplicando cada término por $x^2$, $-2xy$, y $3y^2$, respectivamente. El producto es la suma algebraica de estos tres productos.

NOTAS

1. Las operaciones algebraicas pueden ser comprobadas parcialmente sustituyendo las literales por valores numéricos. Así, en el ejemplo anterior, si hacemos $x = 2$ y $y = 3$, obtenemos los siguientes valores:

Multiplicando $= 4 + (2)(3) - 2(9) = -8.$
Multiplicador $= 4 - 2(2)(3) + 3(9) = 19.$
Producto $= 16 - (8)(3) - (4)(9) + 7(2)(27) - 6(81) = -152,$
y $(-8)(19) = -152.$

2. Si tanto el multiplicando como el multiplicador son polinomios homogéneos entonces el producto es también un polinomio homogéneo, tal como se ha visto en el ejemplo anterior.

## 2.6. PRODUCTOS NOTABLES

En la lista siguiente aparecen algunas de las fórmulas de productos notables que son útiles en diversos problemas de multiplicación y de factorización. Se recomienda que el estudiante memorice estas nueve fórmulas, todas las cuales pueden establecerse por multiplicación directa.

1. $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.
2. $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.
3. $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$.
4. $(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$.
5. $(ax+b)(cx+d) = acx^2 + (ad+bc)x + bd$.
6. $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.
7. $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$.
8. $(a+b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$.
9. $(a-b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$.

Utilizando doble signo es posible combinar ciertos pares de dichas fórmulas en una sola. Por ejemplo, los tipos uno y dos pueden expresarse conjuntamente así:

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2.$$

El tipo 1 se obtiene utilizando los signos superiores y el tipo 2 por medio de los signos inferiores. Una observación similar es aplicable a los pares 6 y 7, y 8 y 9.

Algunas de estas fórmulas pueden enunciarse fácilmente con palabras. Por ejemplo, el producto notable del tipo 1 dice: El cuadrado de la suma de dos números cualesquiera es igual a la suma de los cuadrados de dichos números más el doble de su producto.

Al llegar a este punto conviene hacer resaltar la importancia de una habilidad que el estudiante debe adquirir lo más pronto posible. Es la de saber reconocer *formas matemáticas* y saber generalizarlas. Así, ya que el producto notable de tipo 1 es aplicable para obtener el cuadrado de la suma de dos números o expresiones *cualesquiera*, las cuales pueden estar representadas por una gran variedad de formas, conviene saber aplicarlo en los diferentes casos ya que la operación a efectuar es la misma.

**Ejemplo 1.** Calcular $[x^2 + 2x + y - 3]^2$.

SOLUCION. $[x^2 + 2x + y - 3]^2 = [(x^2 + 2x) + (y - 3)]^2$

Por el tipo 1,

$$= (x^2 + 2x)^2 + 2(x^2 + 2x)(y - 3) + (y - 3)^2$$
$$= (x^4 + 4x^3 + 4x^2) + (2x^2y - 6x^2 + 4xy - 12x) + (y^2 - 6y + 9)$$
$$= x^4 + 4x^3 + 2x^2y - 2x^2 + 4xy + y^2 - 12x - 6y + 9.$$

Análogamente, el estudiante debe observar que el tipo 3 se refiere al producto de la suma y la diferencia de unas *mismas dos cantidades.*

**Ejemplo 2.** Encontrar el producto de $x + y - 2$ y $x - y + 2$.

SOLUCION. Naturalmente podemos obtener este producto por multiplicación directa, como en el ejemplo 3 del Art. 2.5. Sin embargo, también podemos escribir

$$(x + y - 2)(x - y + 2) = [x + (y - 2)][x - (y - 2)]$$

Por el tipo 3, $= x^2 - (y - 2)^2$

Por el tipo 2, $= x^2 - (y^2 - 4y + 4)$

$$= x^2 - y^2 + 4y - 4.$$

**Ejemplo 3.** Calcular $(3x^2 - 2y)^3$.

SOLUCION. Por el tipo 7, tenemos

$$(3x^2 - 2y)^3 = (3x^2)^3 - 3(3x^2)^2(2y) + 3(3x^2)(2y)^2 - (2y)^3$$
$$= 27x^6 - 54x^4y + 36x^2y^2 - 8y^3.$$

Finalmente, consideremos el cuadrado de un polinomio cualquiera. Por multiplicación directa, tenemos

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc.$$

Este resultado es un caso particular del teorema siguiente:

**Teorema 12.** *El cuadrado de un polinomio cualquiera es igual a la suma de los cuadrados de cada uno de sus términos, más el doble producto de cada término con cada uno de los términos que le siguen.*

Este teorema puede demostrarse por un método llamado *inducción matemática* que será estudiado más adelante. El estudiante observará que los tipos 1 y 2 son casos especiales de este teorema. Asimismo notará que este teorema se puede usar para obtener el resultado del ejemplo 1.

## EJERCICIOS. GRUPO 2

En cada uno de los ejercicios 1-15 hallar el producto indicado.

1. $(8a^2b)(-2ab^2)$.
2. $(-ab^2c)(3a^2bc)(2abc^2)$.
3. $xy^2(x^2 - 2y + 4)$.
4. $(2x^2 - 5y)(4x + 2y^2)$.
5. $(a^2 + 2ab - 2b^2)(3a - 7b)$.
6. $(x^2 - 3xy + y^2)(2x - 3y + 2)$.

7. $(a^2 - 2ab + 4b^2)(a + 2b)$. Comprobar el resultado haciendo $a = 2$ y $b = 3$.

8. $(x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz)(x + y + z)$.

9. $(m^3 - m^2 + m - 1)(-m^3 + m^2 - m + 1)$.

10. $(2 + 3x^2 + x^3)(x^2 - 1 + 4x)$.

11. $(x + a)(y + a)(z + a)$.

12. $(x^2 - x - 1)^2(x^2 + x + 1)$.

13. $(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4)(a - b)$.

14. $(a^2 - ab + b^2 + a + b + 1)(a + b - 1)$.

15. $(a^2 - a + 1)(a^4 - a^2 + 1)(a^2 + a + 1)$. Comprobar el resultado haciendo $a = 2$.

16. Demostrar que la ley de unicidad de la multiplicación puede ser ampliada para el producto de tres o más números.

17. Demostrar que la ley conmutativa de la multiplicación puede ser ampliada para el producto de tres o más números.

18. Demostrar que la ley asociativa de la multiplicación puede ser ampliada para el producto de cuatro o más números.

19. Demostrar que la propiedad distributiva puede ser ampliada para el producto de cuatro o más números.

20. Demostrar el corolario del Teorema 11 (Art. 2.5).

21. Comprobar los ejemplos numéricos dados para ilustrar las leyes de los exponentes I, II y III (Art. 2.5).

22. Demostrar las leyes de los exponentes II y III (Art. 2.5).

23. Dar ejemplos que muestren la diferencia entre las leyes de los exponentes I y II (Art. 2.5).

24. Demostrar que la ley de los exponentes I puede generalizarse a tres o más factores, es decir, demostrar que $a^m a^n a^p \dots a^r = a^{m+n+p \dots +r}$.

25. Demostrar que la ley de los exponentes III puede generalizarse a tres o más factores, es decir, demostrar que $(abc \dots z)^m = a^m b^m c^m \dots z^m$.

26. Demostrar que la ley de los exponentes III puede generalizarse en la forma $(a^p b^q c^r \dots)^m = a^{pm} b^{qm} c^{rm} \dots$

27. Demostrar que el producto de dos polinomios homogéneos es también un polinomio homogéneo y que el grado del producto es igual a la suma de los grados del multiplicando y el multiplicador.

Los ejercicios 28-34 se refieren a los nueve tipos de productos notables mencionados en el Art. 2.6.

28. Comprobar por multiplicación directa los tipos 1, 2 y 3.

29. Comprobar por multiplicación directa los tipos 4 y 5.

30. Comprobar por multiplicación directa los tipos 6 y 7.

31. Comprobar por multiplicación directa los tipos 8 y 9.

32. Enunciar con palabras los tipos 2 y 3.

33. Enunciar con palabras los tipos 6 y 7.

34. Utilizando dobles signos expresar en un solo enunciado: (a) los tipos 6 y 7; (b) los tipos 8 y 9.

35. Comprobar el resultado del ejemplo 1 del Art. 2.6 utilizando el Teorema 12.

En los ejercicios 36-50 calcular las expresiones dadas por medio de las formas tipo y del Teorema 12 del Art. 2.6.

36. $(2x^2 - 3y^2)^2$.

37. $(a^2 - ab)^2$.
38. $(a^2 + 3)(a^2 - 3)$.
39. $(ax + xy)(ax - xy)$.
40. $(x^2 + x + 1)(x^2 + x - 1)$.
41. $(a - b + c)(a + b + c)$.
42. $(2x + 5)(3x - 2)$.
43. $(4x - 2)(3x + 2)$.
44. $(2c^2 + d^2)^3$.
45. $(3m - 2n^2)^3$.
46. $(a + b)^4$.
47. $(x^4 + 1)(x^2 + 1)(x^2 - 1)$.
48. $(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)(x^4 - x^2 + 1)$.
49. $(a - b + c - d)^2$.
50. $(2w - x + 2y - z)^2$.

## 2.7. DIVISION

En el Art. 1.3 describimos la división como la operación inversa de la multiplicación. La división se *define* indirectamente por medio del postulado siguiente:

POSTULADO. Dados dos números cualesquiera $a$ y $c$, $a \neq 0$, existe un número $b$ y sólo uno tal que

$$ab = c. \tag{1}$$

Este número $b$ está dado por la igualdad

$$b = \frac{c}{a}, \qquad a \neq 0, \tag{2}$$

que se lee "$b$ es igual a $c$ dividido entre $a$", y se dice que $b$ es el *cociente* obtenido al dividir el *dividendo* $c$ entre el *divisor* $a$.

*Ejemplo:* $5 \cdot 2 = 10$, de donde $2 = 10/5$.

También podemos decir que $b$ es el número por el que hay que multiplicar $a$ para obtener el producto $c$. Así, de (1) y (2) tenemos la igualdad

$$a \cdot \frac{c}{a} = c, \qquad a \neq 0. \tag{3}$$

NOTA. En la relación (2) la operación de dividir fue indicada por medio de una línea horizontal. También puede utilizarse con una línea oblicua o con el símbolo $\div$ o simplemente con dos puntos:. Así, $\frac{c}{a}$ $c/a$, $c \div a$ y $c:a$ tienen el mismo significado.

*Propiedad divisora de la igualdad.* Si $a$, $b$ y $c$ son tres números cualesquiera tales que $a = b$ y $c \neq 0$, entonces $a/c = b/c$.

El estudiante reconocerá en esta ley al conocido axioma que dice: si números iguales son divididos entre números iguales, no nulos, los cocientes son iguales.

Es importante notar que según el postulado enunciado el resultado de la división es *único*. También importa observar que la división es posible en todo caso excepto cuando el divisor es cero. Esto es consecuencia del teorema siguiente:

**Teorema 13.** *La división entre cero es imposible.*

DEMOSTRACION. Al definir la división por medio de la igualdad (1), o sea,

$$ab = c, \tag{1}$$

especificamos que el número $b$ es único siempre que $a \neq 0$. Supongamos, contra esta definición, que $a = 0$. Ya que no hay restricciones sobre el número $c$ tenemos dos casos.

*Caso (1).* $c = 0$. En este caso la igualdad (1) toma la forma

$$ab = 0. \tag{4}$$

Pero si $a = 0$, $b$ puede ser *cualquier* número (Teorema 8, Art. 2.5), y esto es contrario a la condición de *unicidad de b*.

*Caso (2).* $c \neq 0$. En este caso, si la relación (1) es $a = 0$, también $c$ debe ser igual a cero, por el Teorema 8 (Art. 2.5), lo cual es una contradicción.

Por tanto, en ambos casos, el suponer que $a = 0$ conduce a contradicciones, lo que demuestra el teorema.

El teorema anterior no significa que no se pueda dividir el cero entre otro número. En este caso tenemos:

**Teorema 14.** Si cero se divide entre cualquier número no nulo, el cociente es cero.

DEMOSTRACION. Para $c = 0$ en la relación (1) tenemos

$$ab = 0. \tag{4}$$

Ya que $a \neq 0$, como consecuencia del Teorema 11 (Art. 2.5) resulta que $b = 0$. Esto es, en la igualdad (2), $b = c/a = 0/a = 0$, como se quería demostrar.

Para el caso particular en que $c = a \neq 0$, de la relación (1) resulta

$$ab = a, \tag{5}$$

de donde

$$b = \frac{a}{a}.$$

En este caso el cociente $b$ es la *unidad* que se representa por 1, o sea el símbolo del entero positivo uno, y podemos escribir

$$b = \frac{a}{a} = 1,$$

de esta igualdad y de (5) tenemos las relaciones

$$a \cdot 1 = a, \quad 1 \cdot a = a, \quad \text{y} \quad a = \frac{a}{1}.$$

Para el caso particular en que $c = 1$, la igualdad (1) expresa que

$$ab = 1. \tag{6}$$

En este caso el cociente de $b$ se llama el *recíproco de a,* y se escribe

$$b = \frac{1}{a}, \qquad a \neq 0,$$

de esta igualdad y de (6) se obtiene $a \cdot \frac{1}{a} = 1.$

De estos resultados se deducen las siguientes propiedades:

**Propiedades de la unidad**

1. El resultado de multiplicar o de dividir cualquier número por la unidad es igual al mismo número.
2. El producto de cualquier número no nulo por su recíproco es igual a la unidad.

Ahora vamos a establecer la regla de los signos de la división. Para esto utilizaremos las igualdades (1) y (2), es decir,

$$ab = c, \tag{1}$$

$$b = \frac{c}{a}, \qquad a \neq 0. \tag{2}$$

Por la regla de los signos de la multiplicación (Art. 2.5), si en (1) son $a$ y $c$ ambos positivos, o ambos negativos, entonces $b$ debe ser positivo. Asimismo, si $a$ es positivo y $c$ es negativo, o si $a$ es negativo y $c$ positivo, entonces $b$ debe ser negativo. Luego, de la igualdad (2) se deduce la siguiente regla:

**Regla de los signos de la división**

El cociente de dos números es positivo o negativo según el dividendo y el divisor tengan signos iguales o contrarios.

Por lo tanto, si $a$, $b$ y $c$ son todos positivos, podemos escribir

$$b = \frac{c}{a} = \frac{-c}{-a}; \qquad -b = \frac{-c}{a} = \frac{c}{-a} = -\frac{c}{a}.$$

**Teorema 15.** *El producto de dos cocientes $a/b$ y $c/d$ es otro cociente, dado por la igualdad*

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}.$$

DEMOSTRACION. Por las leyes asociativa y conmutativa de la multiplicación (Art. 2.5), tenemos

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} \cdot bd = \left(\frac{a}{b} \cdot b\right) \cdot \left(\frac{c}{d} \cdot d\right)$$

y por la relación (3) $\qquad = ac,$

de donde, por la ley divisora de la igualdad

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}.$$

**Corolario 1.** $\qquad \dfrac{ac}{bd} = \dfrac{a}{d} \cdot \dfrac{c}{b}.$

**Corolario 2.** $\qquad \dfrac{ac}{b} = \dfrac{a}{b} \cdot c = a \cdot \dfrac{c}{b}.$

**Corolario 3.** $\qquad \dfrac{a}{b} = \dfrac{a}{1} \cdot \dfrac{1}{b} = a \cdot \dfrac{1}{b}.$

Esto es, *dividir entre un número es equivalente a multiplicar por su recíproco.*

También, como consecuencia del Teorema 15, para $m$ entero y positivo tenemos,

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \ldots (m \text{ factores}) = \frac{a \cdot a \cdot a \ldots (m \text{ factores})}{b \cdot b \cdot b \ldots (m \text{ factores})} = \frac{a^m}{b^m}.$$

Lo cual significa que ahora podemos añadir a las tres leyes de los exponentes del Art. 2.5 las siguientes:

*Ley de los exponentes IV.* $\left(\dfrac{a}{b}\right)^m = \dfrac{a^m}{b^m}$, $m$ entero y positivo.

También podemos obtener la

*Ley de los exponentes V.* Para $a \neq 0$ y $m$ y $n$ enteros y positivos tales que $m > n$,

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}.$$

Pues por la ley de los exponentes I (Art. 2.5), tenemos

$$(a^{m-n})(a^n) = a^{m-n+n} = a^m,$$

de donde por la definición de división, $a^{m-n} = \dfrac{a^m}{a^n}$.

Como una consecuencia directa del Teorema 15 y de la ley de exponentes V, tenemos

**Teorema 16.** *Si a y b son ambos diferentes de cero, y m, n r y s son números enteros y positivos tales que m >n y r > s, entonces*

$$\frac{a^m b^r}{a^n b^s} = a^{m-n} b^{r-s}.$$

NOTA. El Teorema 16 puede ser extendido a tres o más cocientes.

En este artículo limitamos la operación de dividir a expresiones racionales enteras de modo que los exponentes usados sean todos positivos. Los exponentes negativos y fraccionarios y el exponente cero serán considerados en artículos posteriores.

Ahora veamos cómo se divide un monomio racional y entero entre otro de grado inferior:

**Ejemplo 1.** Efectuar las siguientes divisiones:

(a) $(6a^3b^2) \div (-2a^2b)$; (b) $(5x^3y^3z) \div 2x^2yz$;
(c) $(-4m^4n^3) \div (-2m^3n^2)$.

SOLUCION. Por los teoremas 15 y 16 tenemos

(a) $$\frac{6a^3b^2}{-2a^2b} = \frac{6}{-2} \cdot \frac{a^3}{a^2} \cdot \frac{b^2}{b} = -3ab.$$

(b) $$\frac{5x^3y^3z}{2x^2yz} = \frac{5}{2} \cdot \frac{x^3}{x^2} \cdot \frac{y^3}{y} \cdot \frac{z}{z} = \frac{5}{2} xy^2 \cdot 1 = \frac{5}{2} xy^2.$$

(c) $$\frac{-4m^4n^3}{-2m^3n^2} = \frac{-4}{-2} \cdot \frac{m^4}{m^3} \cdot \frac{n^3}{n^2} = 2mn.$$

Consideremos ahora la división de un polinomio entre un monomio.

**Teorema 17.** *Para dividir un polinomio entre un monomio se divide cada término del polinomio entre el monomio, y se suman los cocientes obtenidos. Esto es:*

$$\frac{a+b+c}{m} = \frac{a}{m} + \frac{b}{m} + \frac{c}{m}.$$

DEMOSTRACION. Por el Corolario 3 del Teorema 15,

$$\frac{a+b+c}{m} = \frac{1}{m}(a+b+c)$$

(por la ley distributiva de la multiplicación, Art. 2.5) $= \frac{1}{m}\cdot a + \frac{1}{m}\cdot b + \frac{1}{m}\cdot c$

por el Corolario 3, Teorema 15, $= \frac{a}{m} + \frac{b}{m} + \frac{c}{m}.$

**Ejemplo 2.** Dividir $2a^3bx - 3a^2b^2y - 2a^3b^3$ entre $a^2b$.

SOLUCION. Por el Teorema 17 tenemos

$$\frac{2a^3bx - 3a^2b^2y - 2a^3b^3}{a^2b} = \frac{2a^3bx}{a^2b} - \frac{3a^2b^2y}{a^2b} - \frac{2a^3b^3}{a^2b}$$
$$= 2ax - 3by - 2ab^2.$$

Esta operación puede ser efectuada fácilmente en un solo paso.

Se recomienda que el estudiante compare este problema con el ejemplo 2 del Art. 2.5.

Finalmente consideremos el problema de dividir un polinomio entre otro. Se trata de obtener una expresión (el cociente) tal que multiplicada por el divisor, produzca el dividendo. Por lo tanto, el dividendo estará formado por todos los productos parciales obtenidos de la multiplicación del divisor por cada término del cociente. (Antes de ver como se resuelve el ejemplo 3 hágase un repaso del producto de dos polinomios estudiado en el Art. 2.5).

### Procedimiento para dividir un polinomio entre otro

1. Se ordenan el dividendo y el divisor, según las potencias descendentes de una misma literal.
2. Se divide el primer término del dividendo entre el primer término del divisor, y el resultado es el primer término del cociente. Se multiplica todo el divisor por este término y se resta el producto obtenido del dividendo.
3. El residuo obtenido en el paso 2 se toma como nuevo dividendo y se repite el proceso del paso 2 para obtener el segundo término del cociente.
4. Se repite este proceso hasta que se obtenga un residuo nulo o de grado inferior que el del divisor.

**Ejemplo 3.** Dividir $x^4 - x^3y - x^2y^2 + 7xy^3 - 6y^4$ entre $x^2 + xy - 2y^2$.

SOLUCION. La operación se dispone como sigue:

$$\begin{array}{r|rrrrr}
 & \multicolumn{5}{l}{x^2 - 2xy + 3y^2 = \text{cociente}} \\ \cline{2-6}
x^2 + xy - 2y^2) & x^4 & - x^3y & - x^2y^2 & + 7xy^3 & - 6y^4 \\
 & x^4 & + x^3y & - 2x^2y^2 & & \\ \cline{2-4}
 & & -2x^3y & + x^2y^2 & + 7xy^3 & \\
 & & -2x^3y & - 2x^2y^2 & + 4xy^3 & \\ \cline{3-5}
 & & & 3x^2y^2 & + 3xy^3 & - 6y^4 \\
 & & & 3x^2y^2 & + 3xy^3 & - 6y^4 \\ \cline{4-6}
\end{array}$$

Se recomienda que el estudiante compare esta operación con la correspondiente operación de multiplicación dada en la solución del ejemplo 3 del Art. 2.5.

Si el residuo es cero, como en este ejemplo, la división se llama *exacta* y se dice que el dividendo es *exactamente divisible* entre el divisor, el cual recibe el nombre de *divisor exacto* o *factor* del dividendo.

Si en una división $A$ es el dividendo, $B$ el divisor, $Q$ el cociente y $R$ el residuo tenemos: Si $R = 0$, la división es exacta y escribimos

$$\frac{A}{B} = Q.$$

de donde

$$A = BQ.$$

Esta igualdad muestra que la división exacta puede comprobarse verificando que el dividendo es igual al producto del divisor y el cociente.

Si $R \neq 0$, la división puede convertirse en exacta si el dividendo original es diminuido en $R$. Entonces escribimos

$$\frac{A - R}{B} = Q,$$

de donde $$A - R = BQ \quad \text{y}$$

(7) $$A = BQ + R.$$

La relación (7) muestra que *cualquier* división puede ser comprobada verificando que el dividendo es igual al producto del divisor por el cociente más el residuo.

Si dividimos la relación (7) entre $B$, obtenemos

(8) $$\frac{A}{B} = Q + \frac{R}{B}.$$

**Ejemplo 4.** Dividir $a^3 - 3a^2 + 4a - 7$ entre $a^2 + a - 1$.

SOLUCION. La operación se dispone como sigue:

$$
\begin{array}{r|l}
 & a - 4 = \text{cociente} \\
\cline{2-2}
a^2 + a - 1 & a^3 - 3a^2 + 4a - 7 \\
 & a^3 + a^2 - a \\
\cline{2-2}
 & \quad -4a^2 + 5a \\
 & \quad -4a^2 - 4a + 4 \\
\cline{2-2}
 & \qquad\qquad 9a - 1 = \text{residuo.}
\end{array}
$$

De acuerdo con la relación (8), podemos escribir el resultado así:

$$\frac{a^3 - 3a^2 + 4a - 7}{a^2 + a - 1} = a - 4 + \frac{9a - 11}{a^2 + a - 1}$$

El estudiante debe comprobar el resultado por medio de la relación (7).

## EJERCICIOS. GRUPO 3

En cada uno de los ejercicios 1-22, efectuar la división indicada y comprobar el resultado.

1. $(8x^4y^3z^2) \div (-4x^2y^2z)$.
2. $(-15a^2m^3n^4) \div (-5am^2n^2)$.
3. $(4abx^3 - 8b^2x^2y) \div (2bx^2)$.
4. $(2a^2mx^2y) + 6a^2nyz^2) \div (2a^2y)$.
5. $(2x^2 + xy - 6y^2) \div (x + 2y)$.
6. $(x^3 - y^3) \div (x - y)$.
7. $(3a^2 - 10ab + 3b^2) \div (3a - b)$.
8. $(a^3 + b^3) \div (a + b)$.
9. $(m^4 - n^4) \div (m + n)$.
10. $(m^4 - n^4) \div (m - n)$.
11. $(x^5 + y^5) \div (x + y)$.
12. $(x^5 - y^5) \div (x - y)$.
13. $(3x^3 - 5x^2y - 8xy^2 - 2y^3) \div (3x + y)$.
14. $(a^5 - 4a^4 + 3a^3 + 3a^2 - 3a + 2) \div (a^2 - a - 2)$.
15. $(2a^4 - a^3b - 6a^2b^2 + 7ab^3 - 2b^4) \div (a^2 + ab - 2b^2)$.
16. $(2x^5 + 3x^4 - 5x^3 + 2x^2 + 7x - 6) \div (2x^2 + x - 2)$.
17. $(2x^2 + 3xy - 2y^2 - 2x + 6y - 4) \div (x + 2y - 2)$.
18. $(x^3 - 3x^2 + x - 5) \div (x - 2)$.
19. $(4a^4 + 2a^3 - 4a^2 + 3a - 7) \div (2a - 1)$.
20. $(x^3 + 2x^2 - 3x + 4) \div (x^2 - x + 2)$.
21. $(a^4 - a^3b - ab^3 + b^4) \div (a^2 + ab + b^2)$.
22. $(x^4 + 2x^3 + 3x^2 - 4x + 2) \div (x^3 + x^2 - x + 1)$.
23. Resolver el ejemplo 14 ordenando el dividendo y el divisor según las potencias ascendentes de $a$.
24. Resolver el ejemplo 16 ordenando el dividendo y el divisor según las potencias ascendentes de $x$.
25. Comprobar el ejemplo 15 haciendo $a = 2$ y $b = 1$.
26. Comprobar el ejemplo 17 haciendo $x = 1$ e $y = 1$.
27. En una división exacta el dividendo es $x^3 + 3x^2y + xy^2 - 2y^3$ y el cociente es $x^2 + xy - y^2$. Hallar el divisor.

28. En una división exacta, el dividendo es $x^4 - y^4$ y el cociente es $x^3 + x^2y + xy^2 + y^3$. Hallar el divisor.

29. Demostrar que $3x - 5$ es un factor de $6x^2 - 31x + 35$.

30. Demostrar que $a + b + c$ es un factor de $a^2 - b^2 - 2bc - c^2$.

31. Si $2x - 3y + 1$ es un factor de $4x^2 - 4xy - 3y^2 - 2x + 7y - 2$, hallar el otro factor.

32. Si $a^2 + 2a - 1$ es un factor de $2a^4 + 3a^3 - 6a^2 - 3a + 2$, hallar el otro factor.

33. En una división el dividendo es $a^3 - 2a^2 + a - 3$, el divisor es $a + 3$, y el cociente es $a^2 + 5a + 16$. Calcular el residuo sin efectuar la división.

34. En una división el dividendo es $x^4 - 2x^3 - x^2 - x - 1$, el divisor es $x^2 + x + 1$, y el residuo es $x - 2$. Calcular el cociente.

35. En una división el dividendo es $x^5 + 2x^4 - x^3 + 2x^2 - x + 2$, el cociente es $x^2 + 2x - 2$, y el residuo es $3x^2 + 7x - 4$. Hallar el divisor.

36. En una división el divisor es $x^2 + 1$, el cociente es $x^2 + 2x + 2$, y el residuo es $-4x - 1$. Hallar el dividendo.

37. Demostrar los Corolarios 1, 2 y 3 del Teorema 15 (Art. 2.7).

38. Demostrar el Teorema 16 (Art. 2.7).

39. Si un polinomio homogéneo es exactamente divisible entre otro polinomio homogéneo, demostrar que el cociente es también un polinomio homogéneo cuyo grado es la diferencia entre los grados del dividendo y el divisor.

40. Demostrar que la unidad está relacionada con las operaciones de multiplicación y división en una forma que es análoga a la relación del cero respecto a las operaciones de suma y resta.

## 2.8. CAMPO DE NUMEROS

Anticipándonos al análisis de la operación de factorización que aparece en el artículo siguiente, consideremos ahora un importante concepto de las matemáticas, a saber, el concepto de *campo de números.*

**Definición.** Se dice que un conjunto de números forma un *campo de números* si la suma, diferencia, producto y cociente (excluyendo la división entre cero) de dos números cualesquiera del conjunto (sean iguales o diferentes), son también elementos del mismo conjunto.

Los siguientes conjuntos de números son ejemplos de campos de números:

(1) Todos los números racionales.
(2) Todos los números reales.
(3) Todos los números complejos.

Consideremos ahora el tipo 3 de los productos notables mencionados en el Art. 2.6, es decir,

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2.$$

Aquí, dados los factores $a + b$ y $a - b$, obtenemos su producto $a^2 - b^2$. Recíprocamente, dada la expresión $a^2 - b^2$, o sea la diferencia de los cuadrados de dos números, podemos expresarla como producto de $a + b$ y $a - b$, o sea la suma y la diferencia de los dos números. Como consecuencia de esto podemos escribir, para cada uno de los tres tipos de campos de números arriba citados,

(1) $x^2 - 1 = (x + 1)(x - 1)$.
(2) $x^2 - 2 = x^2 - (\sqrt{2})^2 = (x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2})$.
(3) $x^2 + 1 = x^2 - i^2 = (x + i)(x - i)$,
siendo $i = \sqrt{-1}$ e $i^2 = -1$ (Art. 1.3).

Ahora nos preguntamos ¿hasta dónde podemos prolongar la factorización? Aunque se puede factorizar utilizando números de los tres campos citados, en general limitaremos nuestras factorizaciones al campo de los números racionales. Es decir, nuestros factores serán expresiones racionales y enteras con coeficientes racionales. Así, factorizaremos $a^2 - b^2$, como hemos indicado pero no intentaremos continuar tratando de factorizar, por ejemplo, $a - b$ en la forma

$$a - b = (\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b}).$$

Una expresión algebraica que es igual al producto de dos o más factores en un determinado campo de números se dice que es *reducible* en ese campo y, en el caso contrario, se le llama *irreducible*. Así, en nuestros tres ejemplos anteriores, (1) es reducible en el campo de los números racionales, pero (2) no lo es. La expresión (3) es irreducible, en el campo de los números reales.

Una propiedad o teorema que es verdadero en un campo de números puede no serlo en otro campo.

## 2.9. FACTORIZACION

Hemos visto que el problema de la multiplicación consiste en obtener el producto de dos o más expresiones dadas, las cuales se llaman los *factores* de ese producto. Ahora, vamos a estudiar el problema inverso, que consiste en obtener los factores de un producto dado. De acuerdo con lo dicho en el artículo anterior limitaremos tales factorizaciones al campo de los números racionales.

Consideremos aquí la factorización de ciertos tipos de polinomios que serán usados en problemas posteriores. La mayor parte de estos tipos de factorización tienen su fundamento en las fórmulas de productos notables del Art. 2.6.

(1) *Monomio factor común.* Si cada término de una expresión contiene un monomio que es factor común, ese monomio es un factor de toda la expresión como consecuencia directa de la propiedad distributiva (Art. 2.5). En general, al factorizar *cualquier* expresión, conviene separar el factor común de todos los términos, en caso de que lo haya.

**Ejemplo 1.** Factorizar: (*a*) $2ab^2x^2 - 4ab^2xy + 6ab^2y^2$.
(*b*) $3m^2n^3 + 3m^3n^2 - 6mn$.

SOLUCION. (a) $2ab^2x^2 - 4ab^2xy + 6ab^2y^2 = 2ab^2(x^2 - 2xy + 3y^2)$.
(b) $3m^2n^3 + 3m^3n^2 - 6mn = 3mn(mn^2 + m^2n - 2)$.

(2) *Trinomio que es un cuadrado perfecto.* Los Tipos 1 y 2 de los productos notables del Art. 2.6,

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2,$$

sugieren la forma de factorizar un trinomio equivalente al cuadrado de la suma o la diferencia de dos cantidades.

**Ejemplo 2.** Factorizar $9x^2 - 12xy + 4y^2$.

SOLUCION.
$$\begin{aligned} 9x^2 - 12xy + 4y^2 &= (3x)^2 - 2(3x)(2y) + (2y)^2 \\ &= (3x - 2y)^2. \end{aligned}$$

(3) *Diferencia de dos cuadrados.* La forma de factorizar queda sugerida en este caso por el tipo 3 de los productos notables del Art. 2.6,

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2,$$

lo cual nos dice que la diferencia de los cuadrados de dos cantidades tiene dos factores, uno es la suma de ellas y el otro su diferencia.

**Ejemplo 3.** Factorizar $4a^4x^6 - 25b^6y^4$.

SOLUCION.
$$\begin{aligned} 4a^4x^6 - 25b^6y^4 &= (2a^2x^3)^2 - (5b^3y^2)^2 \\ &= (2a^2x^3 + 5b^3y^2)(2a^2x^3 - 5b^3y^2). \end{aligned}$$

(4) *Trinomio general.* Consideremos cualquier trinomio que no sea un cuadrado perfecto. La forma de sus factores se deduce del tipo 5 de los productos notables del Art. 2.6,

$$(ax + b)(cx + d) = acx^2 + (ad + bc)x + bd.$$

Suponiendo que el trinomio dado sea factorizable, nuestro problema consiste en obtener cuatro números *a, b, c* y *d* tales que *a* y *c* sean factores del coeficiente de $x^2$, *b* y *d* sean factores del término constante y la suma de los productos cruzados $ad$ y $bc$ sea el coeficiente de $x$. Estos números se obtienen mediante ensayos.

**Ejemplo 4.** Factorizar $6x^2 - 11x - 10$.

SOLUCION. Como primer ensayo escribimos dos pares de números cuyos productos sean el 6 y el $-10$, en dos columnas separadas, o sea

$$\begin{array}{ccc} 6 & & 5 \\ & \times & \\ 1 & & -2 \\ \multicolumn{3}{c}{= -7.} \end{array}$$

y tomamos la suma de los productos cruzados: $6(-2) + 1(5) = -7$. Ya que la suma de los productos cruzados debe ser $-11$ (coeficiente de $x$) se hace necesario utilizar una diferente selección de factores, por ejemplo:

$$\begin{array}{ccc} 3 & & 2 \\ & \times & \\ 2 & & -5 \\ \multicolumn{3}{c}{-11,} \end{array}$$

para la cual la suma de productos cruzados es $3(-5) + 2(2) = -11$. Por tanto, los factores buscados son $3x + 2$ y $2x - 5$.

NOTAS

1. Si el coeficiente de $x^2$ es la unidad, como en el tipo 4 de los productos notables del Art. 2.6, entonces el proceso es más sencillo, pues solo consiste en determinar dos números cuya suma y producto son conocidos.
2. Si los factores de un trinomio de segundo grado no pueden obtenerse por ensayos, se verá que se les puede encontrar con un método que estudiaremos más adelante y que está relacionado con la función cuadrática.

(5) *Polinomio de cuatro términos.* Algunos polinomios de cuatro términos pueden ser ordenados y agrupados de modo que presenten un factor común.

**Ejemplo 5.** Factorizar $12xy + 3y - 8x - 2$.

SOLUCION. 
$$\begin{aligned} 12xy + 3y - 8x - 2 &= 3y(4x + 1) - 2(4x + 1) \\ &= (4x + 1)(3y - 2). \end{aligned}$$

(6) *Polinomio que es un cubo perfecto.* En este tipo nos limitaremos al caso en que el polinomio dado es el cubo de un binomio. La forma de un polinomio así, corresponde a los tipos 6 y 7 de los productos notables del Art. 2.6,

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3.$$

**Ejemplo 6.** Factorizar $8x^3 - 36x^2y + 54xy^2 - 27y^3$.

SOLUCION. El hecho de que este polinomio puede ser un cubo perfecto queda sugerido al observar que los términos primero y último son cubos perfectos, es decir, $(2x)^3$ y $(-3y)^3$. Entonces escribimos el polinomio dado en la forma del cubo de un binomio que acabamos de mencionar

$$\begin{aligned} 8x^3 - 36x^2y + 54xy^2 - 27y^3 &= (2x)^3 - 3(2x)^2(3y) + 3(2x)(3y)^2 - (3y)^3 \\ &= (2x - 3y)^3. \end{aligned}$$

(7) *Suma y diferencia de dos cubos.* En este caso los factores se deducen de los tipos 8 y 9 de los productos notables del Art. 2.6,

$$(a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2) = a^3 \pm b^3.$$

**Ejemplo 7.** Factorizar $8x^6 + 27y^3$.

SOLUCION.
$$\begin{aligned} 8x^6 + 27y^3 &= (2x^2)^3 + (3y)^3 \\ &= (2x^2 + 3y)([2x^2]^2 - [2x^2][3y] + [3y]^2) \\ &= (2x^2 + 3y)(4x^4 - 6x^2y + 9y^2). \end{aligned}$$

NOTA 3. Más tarde probaremos por inducción matemática (Capítulo 7) que si $n$ es un número entero y positivo entonces:

$x^n + y^n$ tiene el factor $x + y$ cuando $n$ es impar,
$x^n - y^n$ tiene el factor $x - y$ cuando $n$ es impar o par,
$x^n - y^n$ tiene el factor $x + y$ cuando $n$ es par.

En todos los ejemplos anteriores las expresiones dadas pueden reconocerse fácilmente como pertenecientes a una determinada forma tipo. Sin embargo, a veces sucede que una expresión dada, que aparentemente no pertenece a un tipo determinado, puede reducirse a él, haciendo alguna transformación, tal como ordenar los términos o sumar y restar un término adecuado. Este proceso se ha utilizado en los siguientes ejemplos. Para resolver estos problemas se requiere mucha habilidad a fin de reconocer las formas matemáticas fundamentales como ya se mencionó en el Art. 2.6.

**Ejemplo 8.** Factorizar $a^2 + 2ab + b^2 - 3a - 3b - 4$.

SOLUCION. Los primeros tres términos representan $(a + b)^2$, y los dos siguientes equivalen a $-3(a + b)$. Esto sugiere que tenemos un trinomio general (tipo 4) utilizando en lugar de $x$ la cantidad $a + b$. En consecuencia escribimos

$$\begin{aligned} a^2 + 2ab + b^2 - 3a - 3b - 4 &= (a + b)^2 - 3(a + b) - 4. \\ &= ([a + b] + 1)([a + b] - 4) \\ &= (a + b + 1)(a + b - 4). \end{aligned}$$

**Ejemplo 9.** Factorizar $x^4 + 4x^2 + 16$.

SOLUCION. Si el segundo término fuera $8x^2$, tendríamos un cuadrado perfecto. Esto sugiere añadir $4x^2$, y para conservar la igualdad, restar $4x^2$. La expresión resultante será entonces factorizable:

$$\begin{aligned} x^4 + 4x^2 + 16 &= x^4 + 8x^2 + 16 - 4x^2 \\ &= (x^2 + 4)^2 - (2x)^2 \end{aligned}$$

Y por el tipo 3

$$= (x^2 + 4 + 2x)(x^2 + 4 - 2x).$$

## 2.10. MINIMO COMUN MULTIPLO

Un polinomio que es divisible exactamente entre otro se llama un *múltiplo* de ese último.

Por ejemplo, $x^2 - y^2$ es un múltiplo de $x + y$.

Un polinomio que es múltiplo de dos o más polinomios se llama *múltiplo común* de estos polinomios.

Por ejemplo $x^2 - y^2$ es un múltiplo común de $x + y$ y $x - y$.

Evidentemente, dos o más polinomios pueden tener más de un múltiplo común. Aquel múltiplo común de dos o más polinomios que tiene el menor grado posible se llama el *mínimo común múltiplo* de dichos polinomios y generalmente se le designa con la abreviatura M.C.M.

La determinación del M.C.M. es una consecuencia de la definición, es decir, el M.C.M. de dos o más polinomios es igual al producto de todos los factores diferentes de estos polinomios, tomando cada factor con el máximo exponente con que aparezca.

Ya que más adelante tendremos que utilizar el M.C.M. de dos o más polinomios, explicaremos su determinación por medio de un ejemplo.

**Ejemplo.** Hallar elM.C.M. de $x^2 - y^2$, $x^2 + 2xy + y^2$, y $x^3 + y^3$.

SOLUCION. Primero escribiremos cada polinomio en forma factorizada:

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 &= (x + y)(x - y). \\ x^2 + 2xy + y^2 &= (x + y)^2. \\ x^3 + y^3 &= (x + y)(x^2 - xy + y^2). \end{aligned}$$

Los factores diferentes son $x + y$, $x - y$ y $x^2 - xy + y^2$. El mayor exponente de $x + y$ es 2 y el de los otros factores es 1. Por lo tanto,

$$\text{M.C.M.} = (x + y)^2(x - y)(x^2 - xy + y^2).$$

NOTA. Generalmente conviene conservar el M.C.M. en su forma factorizada.

## EJERCICIOS. GRUPO 4

En cada uno de los ejercicios 1-30 factorizar la expresión dada.

1. $2x^3y^2 - 6xy^3$.
2. $16a^4 - 24a^2b + 9b^2$.
3. $8b^2m^2 + 24b^2mn + 18b^2n^2$.
4. $9u^2 - 4v^2$.
5. $x^2 + 2xy + y^2 - a^2$.
6. $a^2 + b^2 - c^2 - 2ab$.
7. $m^2 - b^2 - 2mn + n^2$.
8. $x^2 - x - 20$.
9. $6a^2 + 5a - 6$.
10. $6b^2 + 13b - 28$.
11. $12x^2 - 29x + 15$.
12. $2x^2 + 3xy - 2y^2$.
13. $10m^2 - 13mn - 3n^2$.
14. $2a^2 + ab - 6b^2$.
15. $x^2 + 2xy + y^2 + x + y - 6$.
16. $x^2 - 2xy + y^2 + 6x - 6y + 8$.
17. $x^2 + 3x - 2xy - 6y$.
18. $3ax^2 - 6by + 9ay - 2bx^2$.
19. $4a^2mx + 8a^2nx - 2a^2my - 4a^2ny$.
20. $x^3 + 6x^2y + 12xy^2 + 8y^3$.
21. $8x^3 - 12x^2y + 6xy^2 - y^3$.
22. $8x^3 - 64y^3$.
23. $a^3b^6 + 27c^6d^3$.
24. $a^6 - b^6$.
25. $1 + my - y^2 - my^3$.
26. $x^4 + x^2 + 1$.
27. $x^8 + x^4 + 1$.
28. $a^4 + b^4 - 7a^2b^2$.
29. $4x^2y^2 - (x^2 + y^2 - z^2)^2$.
30. $8 - 8x^2 + x^3 - x^5$.

En cada uno de los ejercicios 31-39, hallar el M.C.M. de las expresiones dadas y expresar el resultado en la forma factorizada.

31. $2x^2 + 3x - 2,\ 6x^2 - 7x + 2$.
32. $6x^2,\ 3xy^2,\ 12x^3y$.
33. $a^2 + ab - 2b^2,\ 3a^2 + 4ab - 4b^2$.
34. $x^4 - 1,\ x^3 + 1,\ 2x^2 + 2$.
35. $x^2 - x - 2,\ x^2 + 4x + 3,\ x^2 + x - 6$.
36. $2x^2 - 4xy + 2ax - 4ay,\ 6xy - 12by - 12y^2 + 6bx,\ 3xy + 3ab + 3ay + 3bx$.
37. $x^4 - 16,\ x^2 + 5x + 6,\ x^2 + x - 6$.
38. $x - y,\ x^2 - y^2,\ x^3 - y^3,\ x^4 - y^4$.
39. $2m^3 + m^2 - 3m,\ m^2 - n - m + mn,\ 2m^2 + 2mn + 3m + 3n$.
40. Demostrar que el método usado en aritmética para obtener el M.C.M. de dos o más números es el mismo que el que se emplea en álgebra para obtener el M.C.M. de dos o más polinomios.

## 2.11. FRACCIONES SIMPLES

Una *fracción* es el cociente indicado de dos cantidades. Por ejemplo, si $A$ es el dividendo y $B$ es el divisor (no nulo), el cociente $A/B$ es una fracción, recibiendo $A$ el nombre de *numerador* y $B$ el de *denominador*.

Las operaciones con fracciones se efectúan en álgebra del mismo modo que en aritmética. Sin embargo, usaremos expresiones algebraicas en lugar de números y además se considerarán tanto cantidades positivas como negativas. Ya que las fracciones tienen su origen en la operación de dividir, los resultados del Art. 2.7 tendrán aplicación inmediata. Por ejemplo, la regla de los signos de la división es aplicable directamente a las fracciones.

Una *fracción algebraica simple* es aquella en que el numerador y el denominador son expresiones racionales enteras. Son ejemplos de fracciones simples:

$$\frac{2}{x+1}, \quad \frac{x-1}{x^2+x+4}, \quad \text{y} \quad \frac{x^2-2x+2}{x+1}.$$

Una fracción simple se llama *propia* si el grado del numerador es menor que el grado del denominador, y se llama *impropia* si el grado del numerador es mayor o igual que el grado del denominador. Por ejemplo, $\frac{2}{x+1}$ y $\frac{x-1}{x^2+x+4}$ son fracciones propias, mientras que $\frac{x^2-2x+2}{x^2+1}$ y $\frac{x^2-2x+2}{x+1}$ son fracciones impropias.

Una fracción impropia puede escribirse como la suma de un polinomio y una fracción propia. Así, como vimos en el ejemplo 4 del Art. 2.7,

$$\frac{a^3-3a^2+4a-7}{a^2+a-1} = a-4+\frac{9a-11}{a^2+a-1}.$$

El siguiente teorema es fundamental para operar con fracciones.

**Teorema 18.** *El valor de una fracción no varía si el numerador y el denominador se multiplican (o dividen) por una misma cantidad no nula.*

DEMOSTRACION. Por definición y propiedad de la unidad (Art. 2.7), tenemos

$$\frac{a}{b} = \frac{a}{b}\cdot 1 = \frac{a}{b}\cdot\frac{c}{c}$$

y por el Teorema 15 (Art. 2.7) $\qquad = \frac{ac}{bc}.$

Ya que la división entre un número es equivalente a la multiplicación por su recíproco (Teorema 15, Corolario 3), por la primera parte de la demostración tenemos:

$$\frac{a}{b} = \frac{a\cdot\frac{1}{d}}{b\cdot\frac{1}{d}} = \frac{\frac{a}{d}}{\frac{b}{d}}.$$

Del Teorema 18 resulta

*Ley de los exponentes VI.* Si $a \neq 0$ y $m$ y $n$ son enteros positivos tales que $a < n$

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{1}{a^{n-m}}.$$

En efecto: por el Teorema 18, $a^m/a^n$ no varía si dividimos el numerador y el denominador entre $a^m$. Entonces el numerador queda como $a^m/a^n = 1$ (por la definición de unidad), y el denominador queda como $a^m/a^n = a^{n-m}$, por la ley de los exponentes V (Art. 2.7).

Ahora consideremos, en este orden la simplificación, adición y sustracción, y multiplicación y división de fracciones.

(*1*) *Simplificación de fracciones.* Se dice que una fracción está reducida a *sus términos más sencillos* o *totalmente simplificada,* cuando no existe ningún factor común al numerador y denominador. Evidentemente una fracción dada puede reducirse a sus términos más sencillos dividiendo el numerador y el denominador entre los factores que tengan en común, de acuerdo con el Teorema 18. Este proceso se llama también *cancelación* de factores comunes.

**Ejemplo 1.** Simplificar la fracción $\dfrac{2x^3 - 2x}{4x^4 - 8x^3 - 12x^2}$

SOLUCION. Primeramente factorizaremos el numerador y el denominador y luego cancelaremos los factores comunes a ellos:

$$\frac{2x^3 - 2x}{4x^4 - 8x^3 - 12x^2} = \frac{2x(x^2 - 1)}{4x^2(x^2 - 2x - 3)} = \frac{2x(x+1)(x-1)}{(2x)^2(x+1)(x-3)}$$
$$= \frac{x-1}{2x(x-3)}$$

(2) *Adición y sustracción.* Si dos fracciones tienen denominador común entonces su suma o diferencia se obtiene como una consecuencia inmediata del Teorema 17 (Art. 2.7). Esto es,

$$(1) \qquad \frac{a}{m} \pm \frac{b}{m} = \frac{a \pm b}{m}.$$

Este método puede ser ampliado para obtener la suma algebraica de tres o más fracciones que tengan un denominador común.

Si dos fracciones no tienen un denominador común, entonces pueden ser transformadas en otras fracciones equivalentes que sí lo tengan, lo cual permite operar como en el caso anterior. Así, si $b$ y $d$ son diferentes, entonces, por el Teorema 18,

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} \pm \frac{bd}{bd}$$

Por (1)
$$= \frac{ad \pm bc}{bd}.$$

Al transformar dos o más fracciones dadas en fracciones equivalentes con denominador común, conviene usar su *menor denominador común*, que es el M.C.M. de los denominadores (Art. 2.10).

**Ejemplo 2.** Calcular la suma de las fracciones:

$$\frac{x}{(x-1)^2} - \frac{x-3}{x^2-1} + \frac{3}{x+1}.$$

SOLUCION. El menor denominador común es (Art. 2.10)

$$(x-1)^2(x+1).$$

La transformación de cada fracción en otra equivalente cuyo denominador sea el menor denominador común se efectúa como sigue:

$$\frac{x}{(x-1)^2} = \frac{x(x+1)}{(x-1)^2(x+1)} = \frac{x^2+x}{(x-1)^2(x+1)}.$$

$$\frac{x-3}{x^2-1} = \frac{(x-3)(x-1)}{(x^2-1)(x-1)} = \frac{x^2-4x+3}{(x-1)^2(x+1)}.$$

$$\frac{3}{x+1} = \frac{3(x-1)^2}{(x+1)(x-1)^2} = \frac{3x^2-6x+3}{(x-1)^2(x+1)}.$$

$$\frac{x}{(x-1)^2} - \frac{x-3}{x^2-1} + \frac{3}{x+1}$$

$$= \frac{x^2+x-(x^2-4x+3)+3x^2-6x+3}{(x-1)^2(x+1)} = \frac{3x^2-x}{(x-1)^2(x+1)}.$$

En la práctica resulta suficiente escribir sólo las dos últimas igualdades.

(3) *Multiplicación y división.* Por el Teorema 15 (Art. 2.7),

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

que dice: *el producto de dos fracciones es otra fracción cuyo numerador y denominador son, respectivamente, el producto de los numeradores y el producto de los denominadores de las fracciones dadas.*

El problema de obtener el cociente de dos fracciones se reduce al de hallar el producto de dos fracciones, puesto que la división entre un número (no nulo) es equivalente a la multiplicación por su recíproco (Teorema 15, Corolario 3). Veamos cómo se obtiene el recíproco de una fracción. Representemos por $r$ el recíproco de la fracción $a/b$. Entonces, ya que el producto de cualquier número no nulo y su recíproco es igual a la unidad (Art. 2.7), tenemos

$$\frac{a}{b}\cdot r = 1.$$

De esta relación, aplicando las leyes multiplicativa y divisora de la igualdad resulta:

Multiplicando por $b$, $a \cdot r = b$,

Dividiendo entre $a$, $r = \dfrac{b}{a}$.

Esto es, *el recíproco de una fracción es otra fracción con el numerador y el denominador intercambiados.* Se dice que el recíproco de una fracción se obtiene *invirtiendo* la fracción dada.

Por lo tanto, *el cociente de dos fracciones es igual al producto del dividendo por el recíproco del divisor,* esto es,

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}.$$

**Ejemplo 3.** Dividir $\dfrac{x^2 + x - 6}{x^2 - 1}$ entre $\dfrac{x^2 - 4}{x + 1}$.

SOLUCION. Como se acaba de indicar, invertimos el divisor y luego procedemos como en la multiplicación:

$$\frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 1} \div \frac{x^2 - 4}{x + 1} = \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 1} \cdot \frac{x + 1}{x^2 - 4}$$
$$= \frac{(x^2 + x - 6)(x + 1)}{(x^2 - 1)(x^2 - 4)}.$$

Ya que se acostumbra simplificar los resultados, factorizaremos el numerador y el denominador y resulta:

$$\frac{(x + 3)(x - 2)(x + 1)}{(x + 1)(x - 1)(x + 2)(x - 2)} = \frac{x + 3}{(x - 1)(x + 2)}.$$

## 2.12. FRACCIONES COMPUESTAS

Una *fracción compuesta* es aquella que contiene una o más fracciones ya sea en su numerador o en su denominador, o en ambos. Son ejemplos de fracciones compuestas:

$$\frac{\dfrac{x + 2}{x^2 - 1} + \dfrac{3}{x + 1}}{\dfrac{2x - 5}{x^2 + 2x - 3}} \quad \text{y} \quad \frac{\dfrac{x + 2}{2x^2 - 3x - 2}}{1 - \dfrac{4}{2x + 1}}.$$

Se entiende por *simplificación de una fracción compuesta* su transformación a una fracción simple, reducida a sus términos más sencillos, que sea equivalente a ella. Pueden usarse dos métodos. Uno consiste en transformar el numerador y el denominador en fracciones simples (si es necesario) y luego proceder como en la división de fracciones (Art. 2.11). El otro método, que generalmente es el más sencillo, consiste en obtener una fracción simple multiplicando el numerador y el denominador originales por el menor denominador común de todas las fracciones, de acuerdo con el Teorema 18 (Art. 2.11).

**Ejemplo 1.** Simplificar $\dfrac{\dfrac{x+2}{x^2-1}+\dfrac{3}{x+1}}{\dfrac{2x-5}{x^2+2x-3}}$.

SOLUCION. Utilizaremos el primer método, o sea la división de una fracción simple entre otra:

$$\frac{\dfrac{x+2}{x^2-1}+\dfrac{3}{x+1}}{\dfrac{2x-5}{x^2+2x-3}}=\frac{\dfrac{x+2}{x^2-1}+\dfrac{3(x-1)}{(x+1)(x-1)}}{\dfrac{2x-5}{(x+3)(x-1)}}=\frac{\dfrac{4x-1}{(x+1)(x-1)}}{\dfrac{2x-5}{(x+3)(x-1)}}$$

$$=\frac{4x-1}{(x+1)(x-1)}\cdot\frac{(x+3)(x-1)}{2x-5}=\frac{(4x-1)(x+3)}{(x+1)(2x-5)}$$

**Ejemplo 2.** Simplificar $\dfrac{\dfrac{x+2}{2x^2-3x-2}}{1-\dfrac{4}{2x+1}}$

SOLUCION. Ahora aplicaremos el segundo método.

Como $2x^2-3x-2=(2x+1)(x-2)$, resulta que el menor denominador común de las fracciones del numerador y el denominador es $(2x+1)(x-2)$. Por tanto, multiplicando el numerador y el denominador por $(2x+1)(x-2)$, tenemos

$$\frac{\dfrac{x+2}{2x^2-3x-2}}{1-\dfrac{4}{2x+1}}=\frac{x+2}{(2x+1)(x-2)-4(x-2)}=\frac{x+2}{(x-2)(2x-3)}\,.$$

**EJERCICIOS. GRUPO 5**

1. $\dfrac{a^2+ab}{a^2-b^2}$.
2. $\dfrac{x^2+4x+3}{x^2+2x-3}$.
3. $\dfrac{x^2-y^2}{x^3+y^3}$.
4. $\dfrac{ac-2ad+2bc-4bd}{a^2c+4abc+4b^2c}$.
5. $\dfrac{2x-x^2-x^3}{x^3-3x+2}$.
6. $\dfrac{m^2-mn}{m^3-m^2n+mn-n^2}$.

En cada uno de los ejercicios 7 y 8, expresar la fracción impropia dada como la suma de un polinomio y una fracción propia.

7. $\dfrac{x^3 + 4x^2 - 2x + 1}{x^2 + 1}$.　　8. $\dfrac{x^3 + 2}{x + 1}$.

En cada uno de los ejercicios 9 y 10 transformar la expresión dada en una fracción impropia.

9. $x^2 + x + 1 + \dfrac{2}{x - 1}$.　　10. $x^2 + 2x + 2 + \dfrac{x + 7}{x^2 - 2}$.

En cada uno de los ejercicios 11-20, efectuar la suma algebraica indicada.

11. $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x + 1} + \dfrac{1}{x - 1}$.　　12. $\dfrac{m}{m + 1} - \dfrac{m}{m - 1} + \dfrac{2}{m^2 - 1}$.

13. $\dfrac{1 - x}{2 + x} - \dfrac{1 + x}{2 - x} - \dfrac{3x}{x^2 - 4}$.　　14. $\dfrac{2}{a - 1} + \dfrac{a + 1}{a^2 + a + 1} - \dfrac{a^2 - 2}{a^3 - 1}$.

15. $\dfrac{a + 1}{a^2 + a + 1} - \dfrac{2a^3 - 1}{a^4 + a^2 + 1} + \dfrac{a - 1}{a^2 - a + 1}$.

16. $\dfrac{1}{(a - b)(a - c)} - \dfrac{1}{(b - c)(a - b)} - \dfrac{1}{(a - c)(c - b)}$.

17. $\dfrac{a}{(a - b)(a - c)} + \dfrac{b}{(b - c)(b - a)} + \dfrac{c}{(c - a)(c - b)}$.

18. $\dfrac{a^2}{(a - b)(a - c)} + \dfrac{b^2}{(b - c)(b - a)} + \dfrac{c^2}{(a - c)(b - c)}$.

19. $\dfrac{x + y}{(y - z)(z - x)} + \dfrac{y + z}{(z - x)(x - y)} + \dfrac{z + x}{(x - y)(y - z)}$.

20. $\dfrac{b - c}{a^2 - (b - c)^2} + \dfrac{c - a}{b^2 - (c - a)^2} + \dfrac{a - b}{c^2 - (a - b)^2}$.

En cada uno de los ejercicios 21-28, efectuar la operación indicada y simplificar, si es posible, el resultado.

21. $\dfrac{5x^2y}{3ab^2} \cdot \dfrac{9a^2b}{10xy^2}$.　　22. $\dfrac{(a - 2b)^2}{x^3} \cdot \dfrac{x^2}{a^2 - 4b^2}$.

23. $\dfrac{ax}{a + x} \cdot \left(\dfrac{x}{a} - \dfrac{a}{x}\right)$.　　24. $\dfrac{4x^2 - 9x^2}{x^2 - y^2} \div \dfrac{2x + 3y}{x - y}$.

25. $\dfrac{x^2 - 4x + 3}{x^2 + 5x + 6} \div \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^2 + x - 6}$.　　26. $\left(a - \dfrac{b^2}{a}\right) \div \left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}\right)$.

27. $\dfrac{x^3 - 1}{x^3 - 2x^2 - 3x} \cdot \dfrac{x + 1}{x^2 + x - 2} \div \dfrac{x^2 + x + 1}{x^3 - x^2 - 6x}$.

28. $\dfrac{x^2 + xy - xz}{(x + y)^2 - z^2} \div \dfrac{x}{(x + z)^2 - y^2} \cdot \dfrac{xy - y^2 - yz}{(x - y)^2 - z^2}$.

29. Demostrar que multiplicar una fracción por una cantidad es equivalente a multiplicar su numerador por esa cantidad.

30. Demostrar que dividir una fracción entre una cantidad no nula es equivalente a multiplicar su denominador por esa cantidad.

En cada uno de los ejercicios 31-34, convertir en fracciones simples las fracciones compuestas dadas. En geometría analítica se presentan fracciones de este tipo al calcular el ángulo de dos rectas.

31. $\dfrac{\frac{4}{3}-\frac{2}{9}}{1+\frac{4}{3}\cdot\frac{2}{9}}$.

32. $\dfrac{\frac{2}{3}+\frac{1}{5}}{1-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{5}}$.

33. $\dfrac{\frac{5}{2}-\frac{3}{7}}{1+\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{7}}$.

34. $\dfrac{-\frac{5}{8}-\frac{1}{3}}{1-\frac{5}{8}\cdot\frac{1}{3}}$.

En cada uno de los ejercicios 35-45 simplificar la fracción compuesta dada.

35. $\dfrac{\frac{a^2}{x}-x}{\frac{a}{x}+1}$.

36. $\dfrac{\frac{1}{b}-\frac{1}{a}}{\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}}$.

37. $\dfrac{\frac{x}{x-y}-\frac{x}{x+y}}{\frac{y}{x-y}+\frac{x}{x+y}}$

38. $\dfrac{\frac{m^4-n^4}{m^2-2mn+n^2}}{\frac{m^2-mn}{m-n}}$

39. $\dfrac{\frac{x^2+x-2}{x^2-x-6}}{\frac{x^2+5x+6}{x^2-9}}$

40. $1-\dfrac{1}{1+\frac{1}{x}}$

41. $\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-\frac{1}{x}}}$

42. $\dfrac{1}{x+\dfrac{1}{1+\frac{1+x}{1-x}}}$

43. $\dfrac{x-\frac{x^2+y^2}{y}}{\frac{1}{x}-\frac{1}{y}}\div\dfrac{x^3+y^3}{x^2-y^2}$.

44. $\dfrac{x^2+x+1}{(x+1)^2-x^2}\div\dfrac{x+\frac{1}{1+x}}{1+\frac{x}{1+x}}$.

45. $\left(\frac{2}{x}-\frac{1}{a+x}+\frac{1}{a-x}\right)\div\left(\frac{a+x}{a-x}-\frac{a-x}{a+x}\right)$

## 2.13. EXPONENTES

Ya hemos visto las seis leyes relativas a los exponentes (Arts. 2.5, 2.7, 2.11), que repetimos a continuación para fácil referencia.

I. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$.

II. $(a^m)^n = a^{mn}$.

III. $(ab)^m = a^m b^m$.

IV. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^m = \dfrac{a^m}{b^m}$.

V. $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, \quad m > n$.

VI. $\dfrac{a^m}{a^n} = \dfrac{1}{a^{n-m}}, \quad m < n$.

Debe tenerse muy en cuenta que estas leyes han sido establecidas solamente para exponentes enteros y positivos. Si se quiere que estas leyes sean también válidas para exponentes que no sean números enteros y positivos, es necesario establecer el significado que se debe dar a los exponentes negativos.

Sea $q$ un número entero y positivo y por tanto $1/q$ una fracción positiva. Consideremos ahora el significado que debe tener $1/q$ como exponente, es decir, el significado de $a^{1/q}$ cuando $a \neq 0$. Para que la ley de exponentes I sea válida para este exponente fraccionario, deberá verificarse que

$$a^{1/q} \cdot a^{1/q} \cdot a^{1/q} \cdots q \ factor = a^{1/q+1/q+1/q+\ \dots\ q \text{ términos}}$$

$$= a^{\left(\frac{1}{q}\right)q} = a.$$

Esto es, $a^{1/q}$ tiene que tener la propiedad de que su potencia de grado $q$ sea igual a $a$. Entonces definimos $a^{1/q}$ como *una raíz de índice $q$ de $a$*, y escribimos

$$a^{1/q} = \sqrt[q]{a},$$

en donde el símbolo $\sqrt{\ }$ se llama *signo radical* y el entero $q$ es el *índice de la raíz* (véase Art. 1.3). Para $q = 2$ es costumbre omitir el índice, correspondiendo a la operación llamada *raíz cuadrada.*

NOTA. Veremos más adelante que cualquier número (excepto cero) tiene $q$ raíces distintas de índice $q$, y esta es la razón para referirnos a $a^{1/q}$ como "*una*" raíz de índice $q$ de $a$. Por ejemplo, el número 4 tiene dos raíces cuadradas: $+2$ y $-2$. Para evitar ambigüedades asignaremos a $a^{1/q}$ un valor único llamado la *raíz principal,* o valor principal de la raíz, que está definido como sigue:

*El índice $q$ es par.* Si $a$ es positivo, existen dos raíces reales de igual valor absoluto y de signos contrarios. En este caso la raíz principal es la raíz positiva. Por ejemplo, el valor principal de la raíz cuadrada de 4 es $+2$, y se representa por $4^{1/2}$ y la raíz cuarta de 81 es $+3$, y se representa por $81^{1/4}$.

*El índice q es impar.* Si $a$ es positivo, existe solamente una raíz real que es positiva y que se toma como la raíz principal. Si $a$ es negativo existe una raíz real negativa que se toma como la raíz principal. Por ejemplo, el valor principal de la raíz cúbica de 8 es $+2$, que se representa por $8^{1/3}$; el valor principal de la raíz cúbica de $-8$ es $-2$, que se representa por $(-8)^{1/3}$.

En general, si $p$ y $q$ son enteros y positivos, para que se verifique la ley de exponentes **II** deberemos tener que

$$(a^{p/q})^q = a^{(p/q\cdot q)} = a^p,$$

de donde, por definición,

$$a^{p/q} = \sqrt[q]{a^p},$$

esto es, $a^{p/q}$ significa *la raíz de índice q de la potencia de grado p* de $a$. Como antes, limitamos el valor de la raíz a la raíz principal.

$$8^{2/3} = \sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{64} = 4.$$

*Ejemplo.*

Observemos además, que por la ley de los exponentes **II** podemos escribir

$$a^{p/q} = (a^{1/q})^p = (\sqrt[q]{a})^p,$$

esto es, $a^{p/q}$ significa también la potencia de grado $p$ de la raíz de índice $q$ de $a$. En otras palabras, si usamos solamente la raíz principal, una potencia de exponente fraccionario se puede calcular efectuando la potencia y la raíz en cualquier orden.

Así, en el ejemplo anterior, podemos escribir también

$$8^{2/3} = (\sqrt[3]{8})^2 = (2)^2 = 4.$$

Por lo tanto, *en un exponente fraccionario el numerador significa una potencia y el denominador una raíz.*

Para que la ley de los exponentes **I** sea válida para el exponente cero, debemos tener, para $m = 0$,

$$a^0 \cdot a^n = a^{0+n} = a^n,$$

de donde, por las definiciones de división y de unidad (Art. 2.7),

$$a^0 = \frac{a^n}{a^n} = 1, \quad a \neq 0.$$

Es decir, *cualquier número no nulo afectado del exponente cero es igual a la unidad. El símbolo $0^0$ no está definido.*

Consideremos ahora el significado de los exponentes negativos. Sea $m$ un número entero y positivo y, por tanto, $-m$ un número entero y negativo. Entonces, suponiendo que la ley de los exponentes I, sea válida para exponentes negativos, tendremos:

$$a^m \cdot a^{-m} = a^{m-m} = a^0 = 1,$$

de donde

$$a^{-m} = \frac{1}{a^m}, \quad a \neq 0,$$

y

$$a^m = \frac{1}{a^{-m}}, \quad a \neq 0.$$

Esto es, *el significado de un exponente negativo queda dado por la igualdad*

$$a^{-m} = \frac{1}{a^m}, \quad a \neq 0.$$

Por tanto, en una fracción, cualquier factor puede ser transpuesto del numerador al denominador y viceversa siempre que se cambie el signo de su exponente.

Por ejemplo

$$\frac{a^2b}{x^{-1}y^2} = \frac{xy^{-2}}{a^{-2}b^{-1}} = \frac{a^2bx}{y^2}, \text{ etc.}$$

Ya hemos establecido el significado de los exponentes fraccionarios cero y negativo, o sea de todos los exponentes *racionales*. Puede demostrarse que estos significados son compatibles con las seis leyes de los exponentes. Más adelante consideraremos los exponentes *irracionales* (Capítulo 16).

Las operaciones algebraicas con potencias de exponentes fraccionarios se efectúan exactamente en la misma forma que si los exponentes fuesen números enteros y positivos. Veamos algunos ejemplos.

Muchos problemas con potencias son problemas de simplificación. En general, consideraremos que una expresión dada está simplificada cuando está escrita en su forma más simple, estando todas las fracciones simplificadas y todos los exponentes fraccionarios reducidos a sus términos más sencillos (Art. 2.11).

**Ejemplo 1.** Calcular (a) $(-27)^{2/3}$; (b) $(32)^{2/5}$; (c) $64^{1/3} \cdot 8^{-2/3}$.

SOLUCION. (a) $(-27)^{2/3} = [(-27)^{1/3}]^2 = (-3)^2 = 9.$

(b) $$(32)^{2/5} = (32^{1/5})^2 = (2)^2 = 4.$$

(c) $$64^{1/3} \cdot 8^{-2/3} = \frac{64^{1/3}}{8^{2/3}} = \frac{4}{(8^{1/3})^2} = \frac{4}{2^2} = 1.$$

**Ejemplo 2.** Simplificar $\left[(8a^6)^{-1/3}\cdot\dfrac{1}{(a^{-2})^{1/2}}\right]^{-1}$

SOLUCION. $$\left[(8a^6)^{-1/3}\cdot\frac{1}{(a^{-2})^{1/2}}\right]^{-1} = \left[\frac{1}{(2^3a^6)^{1/3}}\cdot\frac{1}{a^{-1}}\right]^{-1}$$
$$= \left[\frac{1}{2a^2}\cdot a\right]^{-1} = \left[\frac{1}{2a}\right]^{-1} = 2a.$$

**Ejemplo 3.** Multiplicar $xy^{-1/2} - x^{1/2} + y^{1/2}$ por $x^{1/2} + y^{1/2} + x^{-1/2}y$.

SOLUCION. Aquí procederemos como en los exponentes enteros (véase el ejemplo 3 del Art. 2.5). La operación se dispone como sigue:

$$\begin{array}{rrrrr}
xy^{-1/2} - x^{1/2} + y^{1/2} & & & & \\
x^{1/2} + y^{1/2} + x^{-1/2}y & & & & \\
\hline
x^{3/2}y^{-1/2} & - x & + x^{1/2}y^{1/2} & & \\
 & x & - x^{1/2}y^{1/2} & + y & \\
 & & x^{1/2}y^{1/2} & - y & + x^{-1/2}y^{3/2} \\
\hline
x^{3/2}y^{-1/2} & & + x^{1/2}y^{1/2} & & + x^{-1/2}y^{3/2}.
\end{array}$$

**Ejemplo 4.** Expresar como fracción compuesta y simplificar

$$\frac{a^{-1}b^{-2} + a^{-2}b^{-1}}{b^{-2} - a^{-2}}$$

SOLUCION. $$\frac{a^{-1}b^{-2} + a^{-2}b^{-1}}{b^{-2} - a^{-2}} = \frac{\dfrac{1}{ab^2} + \dfrac{1}{a^2b}}{\dfrac{1}{b^2} - \dfrac{1}{a^2}}$$

Multiplicando el numerador y el denominador por $a^2b^2$, $$= \frac{a + b}{a^2 - b^2} = \frac{1}{a - b}.$$

## EJERCICIOS. GRUPO 6

1. Demostrar que el significado dado al exponente cero en el Art. 2.13 es compatible con las leyes de los exponentes II-VI.

2. Demostrar que el significado dado a los exponentes negativos en el Art. 2.13 es compatible con las leyes de los exponentes II-VI.

En cada uno de los Ejercicios 3-10 calcular la expresión dada.

3. $16^{3/4}$.　　4. $(-8)^{4/3}$.　　5. $25^{-1/2}$.　　6. $4^{5/2}\cdot 2^{-3}$.

7. $(1\frac{7}{9})^{-3/2}$.　　8. $\dfrac{(0.008)^{1/3}}{5^{-1}}$.　　9. $\dfrac{18^{-1/2}}{32^{-1/2}}$.　　10. $\dfrac{8^{-2/3}\cdot 16^{-1/4}}{32^{-3/5}}$

En cada uno de los Ejercicios 11-18 simplificar la expresión dada y escribir el resultado con exponentes positivos.

11. $(2a^2 \div 8a^{-2})^{-1/2}$. 12. $[-8(x^6y^{-6})^{1/2}]^{1/3}$. 13. $[m^{-1}(m\{m^3\}^{1/2})^{1/5}]^{-2}$.

14. $\left[\dfrac{27^{-1}a^{-1}b^2}{(3a^{1/3})^{-3}b^5}\right]^{-1/3}$. 15. $\dfrac{ma^{1/3}}{9nb} \div \left(\dfrac{3n^{1/2}a^{1/3}}{b^{-1/2}}\right)^{-2}$ 16. $\dfrac{x^{-1}+y^{-1}}{x^{-1}y^{-1}}$.

17. $\left(\dfrac{4x^{-2}}{9x^2}\right)^{-1/2} \div \left(\dfrac{8x^3}{27y^3}\right)^{-1/3}$. 18. $\dfrac{(16x^2y^{-3})^{-1/2}}{(3x^{-4}y)^{-1/4}} \cdot \dfrac{(3^{1/2}x^4y^{1/2})^{-1/2}}{(2x^{1/2}y^{3/4})^{-2}}$.

En cada uno de los Ejercicios 19-27 hallar el producto indicado.

19. $(x^{1/2} + y^{1/2})(x^{1/2} - y^{1/2})$. 20. $(x^{1/2} + y^{1/2})^2$.
21. $(x^{1/2} + x^{-1/2})^2$. 22. $(x + x^{-1})(x - x^{-1})$.
23. $(x^{1/3} - y^{1/3})^3$. 24. $(x^{2/3} + y^{2/3})^3$.
25. $(a^{2/3} + a^{1/3}b^{1/3} + b^{2/3})(a^{1/3} - b^{1/3})$. 26. $(a^2 - 1 + a^{-2})(a^2 + 1 + a^{-2})$.
27. $(m^{5/2} - m^2 + m^{3/2} - m + m^{1/2} - m^0)(m^{1/2} + m^0)$.

En cada uno de los Ejercicios 28-32 efectuar la división indicada y comprobar el resultado.

28. $(x - y) \div (x^{1/2} - y^{1/2})$. 29. $(x + y) \div (x^{1/3} + y^{1/3})$.
30. $(x^{3n/2} - x^{-3n/2}) \div (x^{n/2} - x^{-n/2})$. 31. $(a^{1/2} - x) \div (a^{1/6} - x^{1/3})$.
32. $(x^{9/5} - x^{7/5} - 8x + 9x^{3/5} - 7x^{1/5} + 6x^{-1/5}) \div (x^{4/5} + 2x^{2/5} - 3)$.

En cada uno de los Ejercicios 33-40 simplificar la expresión dada.

33. $\left[\dfrac{x^{-1/2}y^{-2/3}}{x^{-1/6}y^{-1}} \div \dfrac{x^{-2}y^2}{(xy)^{-3}}\right]^{-3}$. 34. $\left[\left(\dfrac{x^{-1/c}y^{b/c}}{x^{\frac{b+c}{c}}y^{\frac{1}{c}}}\right)^{-1} \div \left(\dfrac{x}{y}\right)^{\frac{b+c}{c}}\right]^c$.

35. $\dfrac{x^{-2} - 2(xy)^{-1} + y^{-2}}{\left(\dfrac{y}{x}\right)^{-2} + xy^{-1} - 2x^0}$. 36. $\dfrac{[(a^m)^{1/r}(a^q)^{1/n}]^{nr}}{[b^{n/q}(b^{r/m})]^{mq}} \div \left[\left(\dfrac{a}{b}\right)^q\right]^r$.

37. $\dfrac{8 - 2x^2 + 2(4 - x^2)^{1/2}}{1 - \dfrac{x^2}{(4 - x^2)^{1/2}} + \dfrac{2}{\left(1 - \dfrac{x^2}{4}\right)^{1/2}}}$

38. $\left(x^{\frac{a+b}{c-a}}\right)^{\frac{1}{b-c}} \cdot \left(x^{\frac{c+a}{b-c}}\right)^{\frac{1}{a-b}} \cdot \left(x^{\frac{b+c}{a-b}}\right)^{\frac{1}{c-a}}$.

39. $\left[\dfrac{x^{-1} + y^{-1}}{x^{-1} - y^{-1}}\right]^{-1} \div \left[\dfrac{y^{-2} + x^{-2}}{y^{-2} - x^{-2}}\right]^{-1} + (x^{-3} + y^{-3})^0$.

40. $\dfrac{(x - x^{-1})(y - y^{-1})}{xy + (xy)^{-1}} + \dfrac{x^2 + y^2 - (x^{-2} + y^{-2})}{x^2y^2 - (xy)^{-2}}$.

## 2.14. RADICALES

La expresión $\sqrt[q]{a}$, que representa la raíz principal de índice $q$ de $a$, se llama *radical*, y la cantidad $a$ que aparece bajo el signo radical se llama *radicando* o *subradical*. Al índice de la raíz, $q$, se le llama también *orden* del radical.

En el Art. 2.13 establecimos, por definición, que

$$a^{1/q} = \sqrt[q]{a},$$

lo cual significa que los radicales pueden ser sustituidos por potencias. Por tanto, las operaciones con radicales pueden efectuarse utilizando las leyes de los exponentes (Art. 2.13), sobrentendiéndose que toda raíz utilizada es la raíz principal. De estas leyes relativas a los exponentes obtenemos las siguientes *leyes de los radicales:*

I. $\sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[m]{b} = \sqrt[m]{ab.}$

II. $\dfrac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}} \sqrt[m]{\dfrac{a}{b}}, \qquad b \neq 0.$

III. $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[mn]{a} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}.$

Estas leyes las utilizaremos para simplificar radicales y para efectuar con ellas las diversas operaciones algebraicas. Debe observarse que si $m$ y $n$ sor números pares, los subradicales $a$ y $b$ deben ser números no negativos.

(1) *Simplificación.* Se dice que el radical simple $\sqrt[q]{a}$ está *simplificado* cuando satisface las siguientes condiciones:

(a) El subradical no contiene factores afectados de exponentes mayores que el índice $q$ del radical.

(b) El subradical no contiene fracciones.

(c) El índice del radical es el menor posible.

**Ejemplo 1.** Simplificar: (a) $\sqrt[3]{8a^5}$; (b) $\sqrt{\dfrac{27}{2}}$; (c) $\sqrt[6]{27}$.

SOLUCION. (a) $\sqrt[3]{8a^5} = \sqrt[3]{2^3a^3 \cdot a^2}.$

Por la ley I, $\qquad = \sqrt[3]{2^3a^3} \cdot \sqrt[3]{a^2}$

$$= 2a\sqrt[3]{a^2}.$$

(b) Por la ley II, $\sqrt{\dfrac{27}{2}} = \dfrac{\sqrt{27}}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{3^2 \cdot 3}}{\sqrt{2}}$

Por la ley I, $\qquad = \dfrac{3\sqrt{3}}{\sqrt{2}}.$

El siguiente paso consiste en quitar el radical del denominador, operación que se conoce con el nombre de *razonalización del denominador.* Para esto se multiplica el numerador y el denominador por $\sqrt{2}.$ Resulta:

$$\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$

Por la ley I, $$= \frac{3\sqrt{3\cdot 2}}{2} = \frac{3}{2}\sqrt{6}.$$

Este resultado puede ser obtenido más directamente como sigue:

$$\sqrt{\frac{27}{2}} = \frac{\sqrt{27}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{27}}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{54}}{2} = \frac{\sqrt{9\cdot 6}}{2} = \frac{3}{2}\sqrt{6}.$$

Debido a que la racionalización de denominadores tiene gran importancia, lo estudiaremos con mayor detalle en el inciso (4).

(c) $$\sqrt[6]{27} = \sqrt[6]{3^3} = 3^{3/6} = 3^{1/2} = \sqrt{3}.$$

(2) *Adición y sustracción.* Se dice que dos radicales son *semejantes* si después de que han sido simplificados constan del mismo subradical y el mismo índice.

Por ejemplo, $3\sqrt[4]{7}$ y $-2\sqrt[4]{7}$ son radicales semejantes.

La suma algebraica de radicales semejantes se efectúa como la de términos semejantes, o sea se multiplica la suma de sus coeficientes por el radical común.

**Ejemplo 2.** Calcular la suma indicada:

$$4\sqrt{2} - 2\sqrt{18} + 3\sqrt{32} - \sqrt{50}.$$

SOLUCION. Primero simplificaremos los términos, en caso de que sea posible. Así tenemos,

$$4\sqrt{2} - 2\sqrt{18} + 3\sqrt{32} - \sqrt{50} = 4\sqrt{2} - 2\sqrt{9\cdot 2} + 3\sqrt{16\cdot 2} - \sqrt{25\cdot 2}$$

$$= 4\sqrt{2} - 6\sqrt{2} + 12\sqrt{2} - 5\sqrt{2} = 5\sqrt{2}.$$

(3) *Multiplicación y división.* Para multiplicar dos radicales primero se reducen al mismo índice, en caso de que sea necesario, y luego se aplica la ley I.

**Ejemplo 3.** Multiplicar $\sqrt[3]{2}$ por $\sqrt{3}$.

SOLUCION. El M.C.M. de los índices 3 y 2 es 6. Por tanto, convertiremos cada radical al índice 6. Así resulta:

$$\sqrt[3]{2} = 2^{1/3} = 2^{2/6} = \sqrt[6]{4}.$$

$$\sqrt{3} = 3^{1/2} = 3^{3/6} = \sqrt[6]{27}.$$

De donde, $$\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt{3} = \sqrt[6]{4}\cdot\sqrt[6]{27}$$

Por la ley I, $$= \sqrt[6]{4\cdot 27} = \sqrt[6]{108}.$$

La multiplicación de expresiones de dos o más términos, ya sea que algunos o todos contengan radicales, se efectúa igual que con expresiones algebraicas ordinarias (Art. 2.5). El producto de los radicales se efectúa como acabamos de indicar.

**Ejemplo 4.** Multiplicar $3\sqrt{x}+2\sqrt{y}$ por $2\sqrt{x}-3\sqrt{y}$.

SOLUCION. Se ordenan las expresiones y se procede como en la multiplicación ordinaria. La operación se dispone como sigue:

$$\begin{array}{lll}
3\sqrt{x} & +\,2\sqrt{y} & \\
2\sqrt{x} & -\,3\sqrt{y} & \\
\hline
6x & +\,4\sqrt{xy} & \\
 & -\,9\sqrt{xy} & -\,6y \\
\hline
6x & -\,5\sqrt{xy} & -\,6y.
\end{array}$$

Para dividir un radical entre otro se reducen, si es necesario, al mismo índice y luego se aplica la ley II.

**Ejemplo 5.** Efectuar las divisiones indicadas:

$$\text{(a)}\ \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{2}};\qquad \text{(b)}\ \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}};\qquad \text{(c)}\ \frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{3}}.$$

SOLUCION. (a) Por la ley II, $\dfrac{\sqrt{10}}{\sqrt{2}}=\sqrt{\dfrac{10}{2}}=\sqrt{5}.$

(b) Si en este caso aplicamos directamente la ley II, obtenemos $\sqrt{\dfrac{7}{2}}$, que es un radical no simplificado. Por tanto, procederemos como en el ejemplo 1(b) racionalizando el denominador.

$$\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{7}\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{14}}{2}.$$

(c) Transformando ambos radicales al índice 6 tenemos,

$$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{3}}=\frac{\sqrt[6]{27}}{\sqrt[6]{9}}=\sqrt[6]{3}.$$

Si el dividendo consta de varios términos y el divisor es un solo radical entonces la división se efectúa dividiendo cada término del dividendo entre el divisor. Pero si el divisor consta de dos o más términos, y por lo menos uno de éstos es un radical, entonces es conveniente racionalizar el divisor.

(4) *Racionalización del denominador.* Si deseamos calcular $1/\sqrt{2}$ utilizando 1.414 como aproximación de $\sqrt{2}$, entonces debemos dividir la unidad entre 1.414. Pero si primero racionalizamos el denominador, como en los ejemplos 1(b) y 5(b), la operación aritmética es más sencilla, pues resulta:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1.414}{2} = 0.707.$$

En general, *racionalizar el denominador* de una fracción dada significa transformar esa fracción en otra equivalente cuyo denominador sea racional. Ahora veremos el caso en que el denominador de la fracción es una expresión de dos o más términos que contienen radicales.

Se dice que una expresión con radicales es un *factor de racionalización* de otra expresión con radicales si su producto es racional. Por ejemplo, $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ y $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ son factores de racionalización, uno del otro, pues

$$(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b}) = a - b.$$

Veamos el uso de los factores de racionalización.

**Ejemplo 6.** Dividir $\sqrt{22}$ entre $2\sqrt{3} + \sqrt{11}$.

SOLUCION. El problema equivale a racionalizar el denominador de la fracción

$$\frac{\sqrt{22}}{2\sqrt{3} + \sqrt{11}}$$

Es obvio que un factor de racionalización para este denominador es $2\sqrt{3} - \sqrt{11}$. Por tanto, tenemos

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{22}}{2\sqrt{3} + \sqrt{11}} &= \frac{\sqrt{22}}{2\sqrt{3} + \sqrt{11}} \cdot \frac{2\sqrt{3} - \sqrt{11}}{2\sqrt{3} - \sqrt{11}} \\ &= \frac{2\sqrt{66} - 11\sqrt{2}}{12 - 11} = 2\sqrt{66} - 11\sqrt{2}.\end{aligned}$$

El proceso de racionalización puede repetirse si así lo requiere el problema.

**Ejemplo 7.** Racionalizar el denominador de $\dfrac{1}{1 + \sqrt{2} - \sqrt{3}}$.

SOLUCION, Ya que para este problema no disponemos de un factor de racionalización primero multiplicaremos el numerador y el denominador por $1+\sqrt{2}+\sqrt{3}$, obteniendo así una racionalización parcial, y luego efectuaremos una segunda racionalización. Así:

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}=\frac{1}{(1+\sqrt{2})-\sqrt{3}}\cdot\frac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}{(1+\sqrt{2})+\sqrt{3}}$$

$$=\frac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}{(1+\sqrt{2})^2-3}=\frac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}+2+\sqrt{6}}{4}.$$

**EJERCICIOS. GRUPO 7.**

1. Por medio de las leyes de los exponentes del Art. 2.13, demostrar las leyes sobre radicales dadas en el Art. 2.14.

2. Si $m$ y $n$ son números enteros y positivos, demostrar que

$$\sqrt[n]{a^m}=(\sqrt[n]{a})^m.$$

3. Si $m$, $n$ y $p$ son números enteros y positivos, demostrar que

$$\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[np]{a^{mp}}.$$

En cada uno de los ejercicios 4-11 simplificar el radical dado.

4. $\sqrt{8a^3}$. 5. $\sqrt[3]{-27b^5}$. 6. $\sqrt[4]{32m^5n^6}$. 7. $\sqrt{45a^5x^3}$.
8. $\sqrt{\frac{5}{3}}$. 9. $\sqrt{\frac{75a^3}{2}}$. 10. $\sqrt[4]{25m^2}$. 11. $\sqrt[6]{8a^3}$.

En cada uno de los Ejercicios 12-15, hallar la suma indicada.

12. $\sqrt{20}-\sqrt{45}+\sqrt[4]{25}+2\sqrt[6]{125}$.
13. $\sqrt{48}-2\sqrt[4]{9}+\sqrt{8}-\sqrt{50}$.
14. $\sqrt{28}+21\sqrt{\frac{1}{7}}-\frac{4\sqrt{14}}{\sqrt[4]{4}}+\sqrt[4]{49}$.
15. $\sqrt[3]{48}+2\sqrt[6]{4}-3\sqrt[3]{6}-\sqrt[3]{2}+2\sqrt[6]{36}$.

En cada uno de los Ejercicios 16-31, efectuar la operación indicada.

16. $(2\sqrt{15})(\sqrt{27})$.
17. $(3\sqrt{6})(\sqrt{8})$.
18. $(\sqrt[3]{3})(\sqrt{2})$.
19. $(\sqrt{15})\div(\sqrt{3})$.
20. $(\sqrt{15})\div(\sqrt{6})$.
21. $(\sqrt[3]{4})\div(\sqrt[4]{2})$.
22. $(3\sqrt{2}+2\sqrt{3}-\sqrt{5})\sqrt{3}$.
23. $(3\sqrt{2}+2\sqrt{3}-\sqrt{5})\div\sqrt[3]{3}$.
24. $\sqrt[3]{4}-2\sqrt{3}-\sqrt{2})\sqrt[3]{2}$.
25. $(\sqrt[3]{4}-2\sqrt{3}-\sqrt{2})\div\sqrt[3]{2}$.
26. $(2\sqrt{x}-3\sqrt{y})^2$.
27. $(3\sqrt{2}-2\sqrt{3})^2$.
28. $\sqrt{7+\sqrt{13}}\cdot\sqrt{7-\sqrt{13}}$.
29. $(\sqrt{3}-\sqrt{2})^3$.
30. $\sqrt[3]{7+\sqrt{22}}\cdot\sqrt[3]{7-\sqrt{22}}$.
31. $(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5})$.

32. Calcular el valor de $x^2+2x-2$ cuando $x=-1-\sqrt{3}$.

33. Calcular el valor de $2x^2+3x-3$ cuando $x=\frac{-3+\sqrt{33}}{4}$.

En cada uno de los Ejercicios 34-43, racionalizar el denominador.

34. $\dfrac{3}{\sqrt{3}-3}$.

35. $\dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$.

36. $\dfrac{2-\sqrt{6}}{5+2\sqrt{6}}$.

37. $\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$.

38. $\dfrac{1}{2+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$.

39. $\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$

40. $\dfrac{\sqrt{a+1}+\sqrt{a}}{\sqrt{a+1}-\sqrt{a}}$.

41. $\dfrac{\sqrt{1+a^2}-\sqrt{1-a^2}}{\sqrt{1+a^2}+\sqrt{1-a^2}}$.

42. $\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{5}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$.

43. $\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{5}-\sqrt{7}}{\sqrt{2}+\sqrt{5}+\sqrt{7}}$.

44. Simplificar $\dfrac{8-2x^2+2\sqrt{4-x^2}}{1-\dfrac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}+\dfrac{2}{\sqrt{1-\dfrac{x^2}{4}}}}$.

45. Simplificar $\dfrac{\sqrt{a}}{\dfrac{\sqrt{(a-b)^3}}{(x+1)^2}-\dfrac{a-b}{x+1}}-\dfrac{\sqrt{a^2-ab}}{\dfrac{\sqrt{(a-b)^3(x-1)}}{x^2-1}-a+b}$.

## 2.15. CONDICION NECESARIA Y SUFICIENTE

Consideremos ahora el significado de la expresión "condición necesaria y suficiente" que se utiliza frecuentemente en matemáticas. Primero veremos lo que significa esta frase por medio de un ejemplo. Recordemos el siguiente teorema de la geometría elemental.

Si un triángulo es isósceles, los ángulos opuestos a los lados iguales son iguales.

Este teorema afirma que si un triángulo es isósceles, *necesariamente* se infiere que los ángulos opuestos a los lados iguales son iguales. Por lo tanto, la existencia de dos ángulos iguales es una *condición necesaria* para que el triángulo sea isósceles.

Pero el *recíproco* de este teorema también es verdadero, es decir:

Si dos ángulos de un triángulo son iguales, los lados opuestos a estos ángulos son también iguales, lo que equivale a decir que el triángulo es isósceles.

Este teorema afirma que la existencia de dos ángulos iguales es *suficiente* para que el triángulo sea isósceles. En consecuencia, decimos que la existencia de dos ángulos iguales es una *condición suficiente* para que el triángulo sea isósceles. Entonces podemos combinar ambos teoremas en el siguiente enunciado único: *Una condición necesaria y suficiente* para que un triángulo sea isósceles es que dos de sus ángulos sean iguales.

Una frase equivalente que con frecuencia sustituye a la anterior es "*si y sólo si*". Así, por ejemplo, el teorema anterior puede enunciarse así: Un triángulo es isósceles *si y sólo si* dos de sus ángulos son iguales.

En general, si la hipótesis A de un teorema implica la validez de una conclusión B, entonces B es una *condición necesaria* para A. Si, además, recíprocamente, B implica la validez de A, entonces B es una *condición suficiente* para A.

En el Art. 2.5 establecimos el Teorema 8 y su recíproco el Teorema 11, los cuales volvemos a enunciar aquí:

**Teorema 8.** *El producto de cualquier número por cero es igual a cero.*

**Teorema 11.** *Si el producto de dos números es igual a cero, uno por lo menos de estos números es igual a cero.*

Podemos combinar estos dos teoremas en el siguiente enunciado único: Una *condición necesaria y suficiente* para que el producto de dos números sea cero es que por lo menos uno de los factores sea igual a cero.

La generalización del Teorema 11, que enunciamos en forma de corolario, es de tanta importancia para la resolución de ecuaciones, que volvemos a enunciarla en forma de teorema en la siguiente forma:

**Teorema 19.** *El producto de dos o más factores es igual a cero si y sólo si por lo menos uno de estos factores es igual a cero.*

Más adelante tendremos ocasión de hacer uso frecuente de este teorema.

Consideremos ahora el concepto de condición necesaria y suficiente en relación con el significado del término *definición*. Dar la *definición de un objeto* significa describirlo de tal modo que se le pueda identificar con toda precisión entre todos los objetos de su clase. Analizando cuidadosamente esta afirmación se concluye que: Una definición expresa una *condición necesaria y suficiente* para la existencia del objeto definido. Por ejemplo, supongamos que estamos definiendo una expresión algebraica de tipo $A$ por medio de una propiedad característica $P$ que $A$ posee. Entonces, en el conjunto de todas las expresiones algebraicas, una expresión es de tipo $A$ *si y sólo si* posee la propiedad $P$.

Como caso particular consideremos la definición de número *racional*, dada en el Art. 1.3, como el número que tiene la propiedad característica $P$ de que se puede expresar en la forma $p/q$ en donde $p$ es cualquier número entero, positivo o negativo, o cero, y $q$ es cualquier número entero positivo o negativo. Esto significa que todo número racional tiene la propiedad $P$, y recíprocamente, todo número que tiene la propiedad $P$ es un número racional. Para hacer destacar esta característica podemos volver a enunciar nuestra definición como sigue: Un número es racional *si y sólo si* puede ser expresado en la forma $p/q$, en donde $p$ es cualquier número entero positivo o negativo, o cero, y $q$ es cualquier número entero positivo o negativo.

Conforme avancemos en nuestro estudio del álgebra tendremos nuevas ocasiones para establecer diversas condiciones necesarias y suficientes.

## 2.16. RESUMEN

En este capítulo hemos estudiado las seis operaciones algebraicas aplicadas a números reales y a varias expresiones algebraicas que representan números reales. Sin embargo no hemos considerado los números complejos, ya que, como antes se indicó, haremos un estudio especial de dichos números en un capítulo posterior.

En los demás capítulos estudiaremos diferentes temas y aplicaciones en los que constantemente se hará uso de las operaciones algebraicas. El estudiante no debe vacilar en volver a este capítulo siempre que tenga alguna duda sobre el procedimiento correcto para efectuar alguna operación algebraica.

Cerramos este capítulo con un grupo de ejercicios diversos los cuales, en general, son un poco más difíciles que los de los grupos anteriores. El lector encontrará que en algunos de estos ejercicios se pone a prueba su habilidad matemática.

### EJÉRCICIOS. GRUPO 8

1. Si $a > b$ y $b > c$, demostrar que $a > c$.

2. Si $a$ y $b$ son dos números diferentes, demostrar que si $a > b$ el número $x = \dfrac{a+b}{2}$, es mayor que $a$ y menor que $b$. Esto es, si $a > b$, demostrar que $a > x > b$.

3. En el ejercicio 2, si $a < b$, demostrar que $a < x < b$.

4. Si $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$, demostrar que $\dfrac{a+b}{a-b} = \dfrac{c+d}{c-d}$.

5. Si $\dfrac{a_1}{b_1} = \dfrac{a_2}{b_2} = \dfrac{a_3}{b_3} = r$, demostrar que $\dfrac{a_1 + a_2 + a_3}{b_1 + b_2 + b_3} = r$.

6. Hallar el paso incorrecto en la siguiente demostración:

Sea $a = b$.
Multiplicado por $a$ $\qquad a^2 = ab.$
Restando $b^2$ $\qquad a^2 - b^2 = ab - b^2.$
Factorizando $\qquad (a + b)(a - b) = b(a - b).$
Dividiendo entre $a - b$ $\qquad a + b = b.$
Ya que $a = b$ $\qquad b + b = b,$
o sea $\qquad 2b = b,$
de donde $\qquad 2 = 1.$

7. Mostrar cómo se usa la propiedad distributiva en la multiplicación aritmética de 47 por 32.

8. Si $s = a + b + c$, demostrar que $s(s - 2a)(s - 2b) + s(s - 2b)(s - 2c) + s(s - 2c)(s - 2a) = (s - 2a)(s - 2b)(s - 2c) + 8abc$.

9. Las operaciones algebraicas de adición, sustracción, multiplicación, división y potenciación se llaman *operaciones racionales*. Justificar el uso de este nombre demostrando que si se efectúan con números racionales una o varias de estas operaciones los resultados son también números racionales.

10. Factorizar $2a^2 - b^2 + ab - 3a + 3b - 2$.

11. Factorizar $3x^2 - 5xy - 2y^2 + 7x + 7y - 6$

12. Factorizar $a^4 + 4$.

13. Si $a$ es un número entero y positivo mayor que 1, demostrar que $a^3 - a$ es divisible exactamente entre 6.

14. Hallar el M.C.M. de $x^2 + x - 2$, $x^3 - 13x + 12$, y $x^3 + 3x^2 - 10x - 24$.

15. *El máximo común divisor* (M.C.D.) de dos o más polinomios es el polinomio de mayor grado que es divisor exacto de cada uno de ellos. Hallar el M.C.D. y el M.C.M. de $ax^2 - ay^2$ y $ax^2 + axy - 2ay^2$.

16. Sea $H$ el M.C.D., y $L$ el M.C.M. de dos polinomios cualesquiera $P$ y $Q$. Demostrar que $H \times L = P \times Q$. Comprobar este teorema en el Ejercicio 15.

En los Ejercicios 17-19, $p$, $q$, $r$ y $s$ son números enteros y positivos.

17. Demostrar que $(a^{p/q})(a^{r/s}) = a^{p/q+r/s}$.

18. Demostrar que $(a^{p/q})^{r/s} = a^{pr/qs}$.

19. Demostrar que $\dfrac{a^{p/q}}{a^{r/s}} = a^{p/q-r/s}$.

20. Mostrar por medio de un ejemplo que, si no nos limitamos al uso de las raíces principales, entonces la potencia de exponente $p$ de la raíz de índice $q$ de un número no siempre es igual a la raíz de índice $q$ de su potencia de exponente.

21. Determinar cual de los números es mayor, sin utilizar tablas de raíces:

$$\text{(a)}\ \sqrt{5}\ \text{o,}\ \sqrt[3]{11} \qquad \text{(b)}\ \sqrt[3]{14}\ \text{o}\ \sqrt{6}.$$

22. Si el valor de $\sqrt{2}$, correcto con 7 decimales es 1.4142136, calcular el valor correcto de $1/(\sqrt{2} - 1$ con 7 decimales.

23. Si el valor de $\sqrt{3}$, correcto con 7 decimales es 1.7320508, calcular el valor correcto de $1/(2 - \sqrt{3})$ con 7 decimales.

24. Demostrar que $\sqrt{2}$ es irracional utilizando el siguiente procedimiento. Se supone, contra el resultado deseado, que $\sqrt{2}$ es racional de modo que se pueda escribir la igualdad $\sqrt{2} = a/b$, siendo $a$ y $b$ números enteros que no tienen factor común entero. Demostrar que esta igualdad da lugar a una contradicción.

25. Demostrar que $\sqrt{3}$ es irracional.

26. Racionalizar el denominador de $\dfrac{1}{1 - \sqrt{2} + \sqrt{3}}$, y determinar el factor de racionalización necesario para obtener el resultado en un solo paso.

27. Racionalizar el denominador de $\dfrac{1}{1 - \sqrt[3]{a}}$.

28. Racionalizar el denominador de $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y}}$.

29. Racionalizar el denominador de $\dfrac{1}{\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2}}$.

30. Encontrar el factor de racionalización para $\sqrt{x} - \sqrt[3]{y}$.

31. Hallar la raíz cuadrada positiva de $29 + 12\sqrt{5}$ dando el resultado en forma de una expresión con radicales simplificados.

32. Hallar la raíz cuadrada positiva de $5 + 2\sqrt{6}$ dando el resultado en forma de una expresión con radicales simplificados.

33. Si $a$ y $b$ son números positivos, explicar en qué consiste el error al afirmar que $\sqrt{-a} \cdot \sqrt{-b} = \sqrt{ab}$. ¿Cuál es el enunciado correcto?

34. Mostrar por medio de ejemplos, que una condición puede ser necesaria sin ser suficiente, y viceversa.

35. Mostrar, por medio de ejemplos, que puede haber más de una condición necesaria y suficiente para la validez de un teorema.

# 3

# Concepto de función

## 3.1. INTRODUCCION

En este capítulo estudiaremos el significado del término *función*, de importancia fundamental en las matemáticas. Primero consideraremos el concepto de función en su forma general y, más adelante, el lector observará que este concepto es susceptible de desarrollarse en diversas direcciones.

## 3.2. CONSTANTES Y VARIABLES

En una expresión o relación o en el desarrollo de un problema determinado se presentan dos tipos de cantidades: constantes y variables.

**Definiciones.** Un símbolo que representa un valor fijo se llama una *constante;* un símbolo que puede representar diferentes valores se llama una *variable*. El conjunto de valores que puede tomar una variable se llama el *dominio* de la variable.

*Ejemplo.* Consideremos la fórmula $C = 2\pi r$, que nos da la longitud de la circunferencia $C$ de radio $r$. En esta expresión $C$ y $r$ pueden tomar diversos valores (relacionados entre sí) y, por tanto, son variables, pero las cantidades 2 y $\pi$ que tienen siempre el mismo valor, son constantes.

Hay dos tipos de constantes: absolutas y parámetros. Una *constante absoluta* es aquella que en todos los problemas tiene siempre el mismo valor. Por ejemplo, 2 y $\pi$ son constantes absolutas. Un *parámetro* es una constante que conserva el mismo valor en un problema particular o situación determinada, pero que puede tener un valor diferente en otro problema o situación. Por ejemplo, en la expresión $ax + b$, de los polinomios de primer grado, $x$ puede tomar diferentes valores, pero $a$ y $b$ son constantes para cada caso. Así en $2x + 5$, $a = 2$ y $b = 5$; en $x - 4$, es $a = 1$ y $b = -4$. Luego, $a$ y $b$ son parámetros.

## 3.3. DEFINICION DE FUNCION

*Si dos variables $x$ y $y$ están relacionadas de tal modo que para cada valor admisible de $x$ (dentro de su dominio), le corresponden uno o más valores de $y$, se dice que $y$ es una función de $x$.*

*Ejemplo.* La relación $y = 2x + 5$ nos expresa a $y$ como función de $x$, ya que para cada valor que se asigne a $x$ queda determinado un valor correspondiente de $y$. Para esta función particular el estudiante puede obtener fácilmente varios pares de valores correspondientes como los dados en la tabla siguiente:

| $x$ | 0 | 1 | 2 | —1 | —2 | —3 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 5 | 7 | 9 | 3 | 1 | —1 |

Observaremos que se pueden asignar a $x$ los valores que se deseen, pero que los valores resultantes de $y$ *dependen* de los valores dados a $x$. Por esta razón $x$ recibe el nombre de *variable independiente* y $y$ el de *variable dependiente.*

El lector observará que el concepto de función implica *dependencia* de una cantidad con respecto a otra. Tales relaciones se presentan en una gran cantidad de casos. Por ejemplo, en la fórmula ya citada, $C = 2\pi r$, la longitud de la circunferencia $C$ es función de su radio $r$, es decir, la longitud de una circunferencia depende del valor de su radio.

En nuestra definición de función mencionamos los *valores admisibles* asignados a $x$. La razón por la cual se usa la palabra admisible es que en una relación funcional dada, la variable independiente no puede tomar cualquier valor.

*Ejemplos.* 1. En la función $x/(x-1)$, $x$ puede tomar cualquier valor excepto 1, pues la división entre cero es una operación imposible (Art. 2.7). 2. Si en la relación $y = \sqrt{x}$, limitamos los valores de $y$ a los números reales, entonces no podemos asignar a $x$ valores negativos.

Se dice que una función de $x$ está *definida* para un valor particular de $x$ siempre que tenga un valor numérico determinado para ese valor de $x$. En los ejemplos anteriores, la función de $x/(x-1)$ no está definida para $x = 1$. Asimismo, para valores reales de $y$, la función $\sqrt{x}$ solo está definida para valores no negativos de $x$.

## 3.4. TIPOS DE FUNCIONES

Si a cada valor de la variable independiente le corresponde un solo valor de la función, ésta recibe el nombre de *función uniforme;* si le corresponden más de un valor se le llama *función multiforme*. Así, en $y = 2x + 5$, $y$ es una función uniforme de $x$ porque para cada valor $x$ queda determinado uno y sólo un valor de $y$. Pero en la relación $y = \pm\sqrt{x + 1}$, $y$ es una función multiforme de $x$ ya que para cada valor asignado a $x$ quedan determinados dos valores correspondientes de $y$.

Si la variable $y$ está expresada directamente en términos de la variable $x$, se dice que es una *función explícita* de $x$. Así, en relación $y = 2x + 5$, $y$ es una función explícita de $x$. Si las variables $x$ y $y$ aparecen en una relación pero ninguna de las dos está expresada directamente en términos de la otra entonces se dice que cualquiera de esas variables es una *función implícita* de la otra. Por ejemplo, en la relación $x + y = 5$, $y$ es una función implícita de $x$ y $x$ es una función implícita de $y$.

Supongamos ahora que $x$ y $y$ estén relacionadas de modo que $y$ sea una función explícita de $x$. Si se puede transformar de modo que $x$ quede expresada como una función explícita de $y$, entonces se dice que esta última función es la *función inversa* de la función original. Por ejemplo, de la función $y = 5 - x$ se deduce inmediatamente su función inversa $x = 5 - y$.

Otra distinción entre los diversos tipos de funciones es el *número de variables independientes*. En el Art. 3.3 se limitó la definición de función a una *sola* variable independiente. Sin embargo, podemos tener funciones de dos o más variables independientes. Por ejemplo, en la relación $z = x^2 - y^2$, la variable dependiente $z$ es una función de las dos variables independientes $x$ y $y$. Aquí podemos asignar a $x$ y $y$ valores independientes unos de otros. Esta clase de funciones se llaman *funciones de varias variables*. Al igual que en las funciones de una variable, existen funciones de varias variables uniformes, multiformes, explícitas, implícitas e inversas.

## 3.5. NOTACION DE LAS FUNCIONES

Por conveniencia, hemos estado usando la letra $y$ para representar una función de $x$. Por ejemplo, en $y = 2x + 5$. Sin embargo, también podemos usar el símbolo $f(x)$ en lugar de $y$, escribiendo

$$(1) \qquad y = f(x) = 2x + 5,$$

en donde $f(x)$ se lee "función $f$ de $x$" o simplemente "$f$ de $x$". Pero este símbolo tiene otro uso muy importante. Si deseamos expresar el valor de esta función cuando la variable independiente $x$ tiene un valor particular, digamos $a$, entonces simplemente sustituimos $x$ por $a$. Por ejemplo, para la función dada por la relación (1) tenemos $f(a) = 2a + 5$. Análogamente, para la misma función, tenemos

$$\begin{aligned} f(0) &= 2(0) + 5 = 5, \\ f(-1) &= 2(-1) + 5 = 3, \text{ etc.} \end{aligned}$$

En un problema particular $f(x)$ representa una función determinada. Pero si en un mismo problema es necesario usar más de una función entonces, para distinguirlas, recurriremos a diferentes letras tales como $F(x)$, $g(x)$ y $\phi(x)$. Por ejemplo, para distinguir la función (1) de otra función de $x$, como $x^2 + x - 1$, podemos escribir

$$F(x) = x^2 + x - 1.$$

También podemos extender este mismo simbolismo o notación funcional a las funciones de varias variables. Por ejemplo, si $z = x^2 - xy + 2y^2$, podemos escribir

$$z = f(x, y) = x^2 - xy + 2y^2,$$

de donde

$$\begin{aligned} f(a, b) &= a^2 - ab + 2b^2, \\ f(y, x) &= y^2 - yx + 2x^2, \\ f(2, 3) &= 2^2 - (2)(3) + 2(3)^2 = 16, \text{ etc.} \end{aligned}$$

Además, de acuerdo con esta notación de las funciones, si $y$ es una función explícita de $x$, podemos escribir $y = f(x)$ de donde podemos obtener su función inversa y representarla simbólicamente en la forma $x = g(y)$. También si $x$ y $y$ son funciones implícitas una de otra, como en la relación $x + y - 5 = 0$, podemos indicar esto con la notación $F(x, y) = 0$.

**Ejemplo 1.** Si $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$ y $F(x) = \dfrac{x}{x+1}$, hallar $\dfrac{f(2) + F(1)}{1 - f(2) \cdot F(1)}$

SOLUCION. De acuerdo con lo dicho:

$$\frac{f(2) + F(1)}{1 - f(2) \cdot F(1)} = \frac{\dfrac{2+1}{2-1} + \dfrac{1}{1+1}}{1 - \dfrac{2+1}{2-1} \cdot \dfrac{1}{1+1}} = \frac{3 + \frac{1}{2}}{1 - \frac{3}{2}} = \frac{6+1}{2-3} = -7.$$

**Ejemplo 2.** Si $f(y) = \dfrac{y}{y^2 - 1}$ y $g(y) = \dfrac{1}{y+1}$, calcular $f[g(y)]$.

SOLUCION. La expresión $f[g(y)]$ se llama una función de función.

Significa que cada valor de $y$ en la expresión que da $f(y)$ debe reemplazarse por $g(y)$. Así tenemos,

$$f[g(y)] = \frac{\dfrac{1}{y+1}}{\dfrac{1}{(y+1)^2} - 1} = \frac{y+1}{1-(y+1)^2} = \frac{y+1}{-y^2-2y}.$$

## EJERCICIOS. GRUPO 9

1. El volumen $V$ de un cono circular recto de radio $r$ y altura $h$, está dado por la fórmula $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$. Expresar: (a) la altura $h$ como una función explícita de $V$ y $r$; (b) el radio $r$ como una función explícita de $V$ y $h$.

2. El período de oscilación $T$ de un péndulo de longitud $L$ está dado por la fórmula $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{L}{g}}$, en donde $g$ es la aceleración constante debida a la gravedad. Expresar $L$ como función de $T$.

3. Expresar la longitud $d$ de la diagonal de un cuadrado como función de su área $A$.

4. En un círculo de radio $r$ la longitud $C$ de la circunferencia está dada por la fórmula $C = 2\pi r$ y el área $A$ por la fórmula $A = \pi r^2$. Expresar el área como función de la longitud de la circunferencia.

5. Si $f(x) = x^2 - x + 1$, calcular $f(1), f(-2), f\left(\dfrac{2}{3}\right)$.

6. Si $f(x) = x^4 - 5x^2 + 4$, calcular $f(1), f(-1), f(2), f(-2)$.

7. Si $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$ demostrar que $f(t) = f\left(\dfrac{1}{t}\right)$ y que $f(-t) = -f(t)$.

8. Si $g(x) = x^6 + x^4 - x^2 + 2$, demostrar que $g(-x) = g(x)$.

9. Si $\phi(y) = \sqrt{y^2 + 9}$, hallar $\phi(\sqrt{7}), \phi(4), \phi(0)$.

10. Si $F(x) = x^2 - 3x + 1$, calcular $F\left(\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$ y $F\left(\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\right)$.

11. Si $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$, obtener $f(\sqrt{2})$ en su forma simplificada.

12. Si $f(y) = \dfrac{y+2}{y-1}$ y $g(y) = \dfrac{y-2}{y+1}$,

    hallar $\dfrac{f(y) + g(y)}{2 + f(y)\cdot g(y)}$ y expresar el resultado en su forma más simplificada.

13. Si $F(x, y) = 2x^2 + 3xy - 2y^2$,

    calcular $F(1, 2), F(-1, -2), F(2,3), F(-2,-3)$.

14. Si $F(x, y) = x^3 + x^2y + xy^2 + y^3$,

    demostrar que $F(y,x) = F(x, y)$ y que $F(-x, -y) = -F(x, y)$.

15. Si $G(x, y) = \dfrac{x+y}{x-y}$

    calcular $G(\sqrt{3}, \sqrt{2})$ en su forma más simplificada.

16. Si $f(x) = x^2 + 5x - 2$,

obtener $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$. Esta operación es necesaria en el cálculo diferencial, como uno de los pasos para obtener *la derivada de $f(x)$.*

17. Si $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$, obtener $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$.

18. Si $F(x, y) = x^3 - 5x^2y + 3xy^2 - 3y^3$,

demostrar que $F(kx, ky) = k^3F(x, y)$.

19. Generalizar el Ejercicio 18 demostrando que si $F(x, y) = a_0x^n + a_1x^{n-1}y + a_2x^{n-2}y^2 + \ldots + a_{n-1}xy^{n-1} + a_ny^n$, en donde las $a_i$ son constantes, entonces $F(kx, ky) = k^nF(x, y)$. Esta es la prueba de *homogeneidad de una función* y muestra que $F(x, y)$ es un polinomio homogéneo de grado $n$ (Art. 2.2).

20. Si $F(x, y) = 4x^2 + 9y^2$,

demostrar que $F(x, y) = F(-x, y) = F(x, -y) = F(-x, y)$.

Estas igualdades se usan en geometría analítica para determinar diversos tipos de *simetría de curvas.*

21. Si $y = f(x) = \dfrac{2x - 1}{3x - 2}$ demostrar que $x = f(y)$.

22. Si $x = g(y) = \dfrac{5y + 4}{y - 5}$, demostrar que $y = g(x)$.

23. Si $f(x) = \dfrac{3x + 2}{2x - 3}$, demostrar que $f[f(x)] = x$.

24. Si $g(y) = \dfrac{4y - 2}{3y - 4}$, demostrar que $g[g(y)] = y$.

25. Si $y = f(x) = \dfrac{2x + 1}{2x - 1}$, hallar $f(y)$ en términos de $x$.

## 3.6. CLASIFICACION DE LAS FUNCIONES

En el Art. 3.4 estudiamos diversos *tipos* de funciones. Ahora consideraremos la clasificación de las funciones atendiendo a su *forma.*

**Definición.** Se dice que una función de una variable $x$ es *algebraica* si $x$ está sometida a un número finito de una o varias de las seis operaciones del álgebra.

Son ejemplos de funciones algebraicas de $x$:

$$x^2 - 2x + 5, \frac{4x^2 - 3x + 2}{x^3 + 2x^2 - 9}, \quad \text{y} \quad \sqrt[3]{3x + 5}.$$

NOTA 1. Se recomienda que el lector compare esta definición con la dada en el Art. 1.6.

Esta definición de las funciones algebraicas es suficiente para el propósito de este libro y también para casi todos los problemas que puedan presentarse al lector en sus estudios posteriores. Sin embargo, debe advertirse que esta definición no incluye a *todas* las funciones algebraicas, como se explica en la Nota 2 al final de este artículo.

*Una función racional entera de $x$* o simplemente una función entera, es una función de la forma

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n,$$

en donde $n$ es un número entero y positivo o cero y $a_0, a_1, \dots, a_n$ son constantes cualesquiera. Ordinariamente nos referimos a una función de esta clase con el nombre de *polinomio* en $x$. En particular, si $a_0 \neq 0$, se dice que el polinomio es de *grado $n$* (véase el Art. 2.2).

*Una función racional de $x$* es el cociente de dos funciones enteras de $x$, siendo el divisor diferente de cero. Así, si $f(x)$ y $g(x)$ son ambas enteras siendo $g(x) \neq 0$, la función $R(x)$,

$$(1) \qquad R(x) = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

es una función racional de $x$.

Una expresión algebraica que no puede ponerse en la forma (1), se llama *función irracional*. Por ejemplo, $\sqrt{x+1}$ y $\dfrac{x - \sqrt{2 + x^3}}{x+1}$ son funciones irracionales.

Las tres definiciones anteriores pueden generalizarse inmediatamente a funciones de varias variables. Por ejemplo, $2x^2 + 3xy - 4y^2$ es una función entera de $x$ y de $y$; $\dfrac{2x^2 + 3xy - 4y^2}{x^3 + 3x^2y - 2y^3}$ es una función racional de $x$ y de $y$; y $\sqrt{x+y}$ es una función irracional de $x$ y de $y$.

Supongamos ahora que $x$ y $y$ están relacionadas implícitamente en la forma

$$(2) \qquad y^m + R_1(x)y^{m-1} + R_2(x)y^{m-2} + \dots + R_{m-1}(x)y + R_m(x) = 0,$$

en donde $m$ es un número entero y positivo y $R_1(x), R_2(x), \dots, R_m(x)$ son funciones racionales de $x$. Si la relación entre dos variables $x$ y $y$ es de la forma (2), o puede lograrse que tome tal forma, entonces se dice que $y$ es una función algebraica de $x$. Por tanto, cada una de las relaciones $x^2 + y^2 = 1$, $y^2 = \dfrac{x^3}{x-2}$, y $x^{1/2} + y^{1/2} = 1$ expresa a $y$ como *función algebraica de $x$*.

NOTA 2. En tratados superiores se demuestra que si la ecuación (2) es $m \geq 5$, entonces es imposible expresar a $y$ explícitamente en términos de $x$ por medio de una fórmula general que utilice un número finito de una o varias de las seis operaciones del álgebra. Pero, aún en este caso, se dice que $y$ es una función algebraica de $x$. Esta es la razón por la cual en la Nota 1 afirmamos que nuestra primera definición no incluía a *todas* las funciones algebraicas que están dadas por la segunda definición. Sin embargo, como ya indicamos, la primera definición será suficiente para nuestro estudio.

Todas las funciones que no son algebraicas reciben el nombre de *funciones trascendentes*. Son ejemplos de tales funciones las funciones trigonométricas, logarítmicas y exponenciales.

## 3.7. SISTEMA DE COORDENADAS UNIDIMENSIONAL

Vamos ahora a dar un nuevo significado a las propiedades de los números reales introduciendo la idea de correspondencia entre un punto, como figura geométrica, y un número real. Consideremos (Fig. 1), una recta $X'X$ cuyo sentido positivo va de izquierda a derecha, como se indica con la flecha, y tomemos un punto fijo $O$ sobre esta recta. Adoptemos una determinada unidad de longitud; así, si $A$ es un punto sobre $X'X$ distinto de $O$ y a la derecha de $O$ entonces la longitud $OA$ puede ser considerada como unidad de longitud. Si $P$ es un punto cualquiera sobre $X'X$ a la *derecha* de $O$, tal que la longitud $OP$ contenga a nuestra unidad de longitud $x$ veces, entonces decimos que al punto $P$ *le corresponde* el número *positivo* $x$. Análogamente, si $P'$ es un punto cualquiera sobre $X'X$ situado a la izquierda de $O$ y tal que $OP'$ contenga a nuestra unidad de longitud $x'$ veces, entonces decimos que al punto $P'$ *le corresponde* el número *negativo* $x'$. De este modo cualquier número real $x$ está representado por un punto $P$ sobre la recta $X'X$. Y, recíprocamente, cualquier punto $P$ sobre la recta $X'X$ representa un número real $x$, cuyo valor absoluto es igual a la longitud de $OP$ y cuyo signo es positivo o negativo según que $P$ esté a la derecha o a la izquierda de $O$, respectivamente.

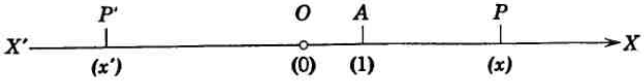


FIG. 1.

En consecuencia, hemos construido un esquema que muestra una correspondencia biunívoca entre puntos y números reales. Este esquema se llama *sistema de coordenadas* o recta numérica y es un concepto fundamental de la *geometría analítica*, introducido en 1637 por el matemático francés René Descartes (1596-1650). En el caso particular que hemos considerado, debido a que todos los puntos están sobre una recta, el sistema se llama *sistema de coordenadas lineal* o *sistema de coordenadas unidimensional*. Refiriéndonos a la figura 1, la recta $X'X$ recibe el nombre de *eje* y el punto $O$ el de *origen* del sistema de coordenadas. El número real $x$ que corresponde al punto $P$ se llama *coordenadas* del punto $P$ y se representa por $(x)$. De acuerdo con los convenios adoptados resulta obvio que la coordenada del origen es $(o)$ y la del punto $A$ es $(1)$. Se dice que el punto $P$ con su coordenada $(x)$ es la *representación geométrica o gráfica* del número real $x$, y que la coordenada $(x)$ es la *representación analítica* del punto $P$.

Además observamos que esta correspondencia es *única*, pues a cada número real le corresponde un punto y solamente uno en el eje, y a cada punto del eje le corresponde un número real y solamente uno.

El lector observará que en este sistema de coordenadas solamente se consideran los números *reales*. La representación geométrica de los números complejos será estudiada más adelante (Capítulo 8).

Ahora estamos en condiciones de dar una interpretación geométrica del concepto de mayor y menor de dos números algebraicos (Art. 2.4). Sean $a$ y $b$ los números reales que representan las coordenadas respectivas de los puntos $P$ y $Q$. Si en la recta numérica el punto $P$ está a la *derecha* del punto $Q$ entonces $a > b$. Recomendamos que el lector compruebe esta afirmación utilizando varios pares de números reales, tanto positivos como negativos.

Finalmente diremos que un sistema de coordenadas lineal es un medio muy conveniente para representar los números reales que forman el dominio de una variable (Art. 3.2). Pero si se trata de representar una función (Art. 3.3) resulta que deberemos añadir algo más al sistema, para poder representar los valores correspondientes de la función o variable dependiente. Es decir, que para la representación geométrica de una función se hace necesario considerar otra dimensión.

## 3.8. SISTEMA DE COORDENADAS RECTANGULARES

En un sistema de coordenadas lineal un punto está limitado a estar sobre una recta, el eje. Ahora consideraremos un sistema de coordenadas en el que un punto puede ocupar cualquier posición en un plano. Esto se llama un *sistema de coordenadas bidimensional* o *sistema de coordenadas en el plano*. Existen varios tipos de sistemas de coordenadas en el plano y el que usaremos nosotros se llama *sistema de coordenadas rec-*

*tangulares* (fig. 2). Consiste en lo siguiente: se trazan dos rectas dirigidas y perpendiculares, $X'X$ y $Y'Y$, llamadas *ejes de coordenadas.* La recta horizontal $X'X$ se llama *eje* $X$, la recta vertical $Y'Y$ *eje* $Y$, y su punto de intersección $O$ se llama *origen.* Los ejes de coordenadas dividen al plano en cuatro regiones llamadas *cuadrantes,* numeradas como se muestra en la figura 2. Tal como indican las flechas, la dirección positiva del eje $X$ es hacia la derecha y la dirección positiva del eje $Y$ es hacia arriba.

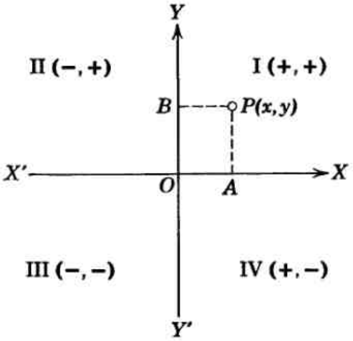


FIG. 2.

Por medio de este sistema cualquier punto $P$ del plano puede ser localizado con precisión. En efecto: tracemos $PA$ perpendicular al eje $X$ y $PB$ perpendicular al eje $Y$. La longitud del segmento $OA$ se representa por $x$ y se llama la *abscisa* de $P$; la longitud del segmento $OB$ se representa por $y$ y se llama la *ordenada* de $P$. Los dos números reales $x$ y $y$ reciben el nombre de *coordenadas* de $P$ y se representan con el símbolo $(x, y)$. Las abscisas medidas a lo largo del eje $X$ hacia la derecha de $O$ son positivas, y hacia la izquierda negativas; las ordenadas medidas a lo largo del eje $Y$ hacia arriba de $O$ son positivas y hacia abajo negativas. Los signos de las coordenadas en los cuatro cuadrantes se indican en la figura 2.

Evidentemente a cada punto $P$ del plano le corresponden un par de coordenadas $(x, y)$ y solamente uno. Recíprocamente, todo par de coordenadas $(x, y)$ determina un punto en el plano de coordenadas y solamente uno.

Si $x \neq y$ el punto $(x, y)$ es diferente del punto $(y, x)$. En consecuencia es importante escribir las coordenadas en el orden correcto, debiendo escribir primero la abscisa y después la ordenada. Por este motivo un par de coordenadas en el plano recibe el nombre de par *ordenado* de números reales. Como resultado de lo que acabamos de decir un *sistema de coordenadas rectangulares en un plano establece una correspondencia biunívoca entre cada punto del plano y un par ordenado de números reales.*

El trazar un punto dadas sus coordenadas se llama *localizar* el punto. Por ejemplo, para localizar el punto $(-5, -6)$, primeramente obtenemos el punto $A$ en el eje $X$ que queda 5 unidades a la izquierda de $O$; en seguida, a partir de $A$ y sobre una recta paralela al eje $Y$, llevamos 6 unidades bajo el eje $X$, obteniendo así el punto $P(-5, -6)$. Esto se muestra en la figura 3, en la cual han sido localizados, además, los puntos (2, 6), (—6, 4) y (4, —2).

La operación de localizar puntos se facilita utilizando papel coordenado rectangular el cual está dividido en cuadrados iguales por medio de líneas paralelas a los ejes de coordenadas, tal como se muestra en la figura 3. Es recomendable que el lector emplee papel coordenado siempre que se requiera trazar una gráfica con precisión.

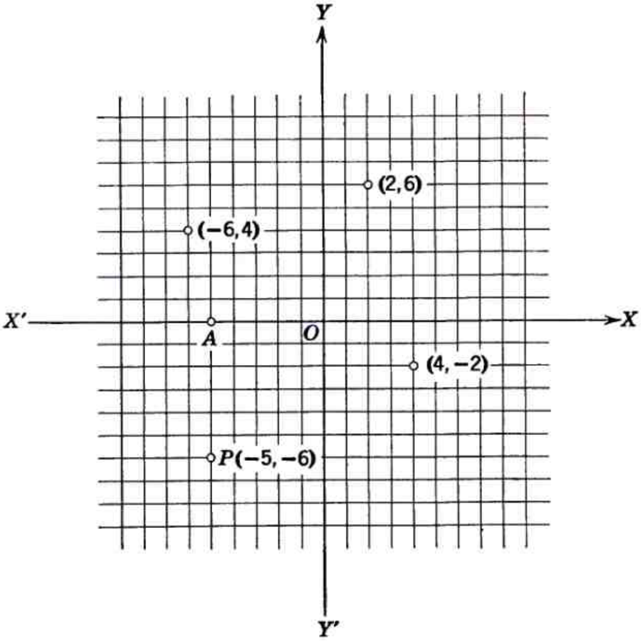


Fig. 3.

De nuevo el lector observará que este sistema de coordenadas no hace referencia a los números complejos. Por lo tanto, si una coordenada de un punto es un número complejo entonces dicho punto no tiene representación en el sistema de coordenadas rectangulares.

## 3.9. REPRESENTACION GRAFICA DE FUNCIONES

Veamos ahora cómo se utiliza el sistema de coordenadas rectangulares para dar una representación geométrica o gráfica de una relación funcional. Este método tiene la ventaja de que proporciona visualmente un diagrama del comportamiento de una función dada de una variable.

Consideremos la función

$$y = f(x), \tag{1}$$

que establece que la variable $y$ depende de la variable independiente $x$. Esto significa que para cada valor asignado a $x$, pueden ser determinados uno o más valores correspondientes de $y$. Cada par de valores correspondientes de $x$ y $y$ *satisfacen* la ecuación (1). Tomemos ahora cada uno de estos pares de valores *reales* como *coordenadas $(x, y)$ de un punto en un sistema de coordenadas rectangulares.*

**Definición 1.** El conjunto de todos los puntos, y *sólo* ellos, cuyas coordenadas satisfacen la ecuación (1) se llama el *lugar geométrico* o *gráfica de la ecuación.*

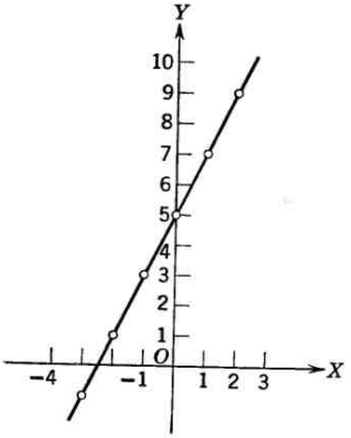
**Definición 2.** Todo punto cuyas coordenadas satisfacen la ecuación (1) se dice que *pertenece al lugar geométrico de la ecuación.*

Esto es, si las coordenadas de un punto satisfacen una ecuación entonces ese punto pertenece al lugar geométrico de la ecuación, y recíprocamente, si un punto pertenece al lugar geométrico de una ecuación sus coordenadas satisfacen la ecuación. Naturalmente esto corresponde al enunciado de una condición necesaria y suficiente (Art. 2.15).

Ya que las coordenadas de los puntos de un lugar geométrico están restringidas a satisfacer a su ecuación, entonces, en general, dichos puntos quedarán localizados en posiciones que determinan una trayectoria definida llamada *curva,* gráfica o lugar geométrico.

**Ejemplo 1.** Trazar la gráfica de la función $2x + 5$.

SOLUCION. Hagamos $y = 2x + 5$. Ya que hay un número infinito de pares de valores correspondientes de $x$ y $y$ que satisfacen esta ecua-



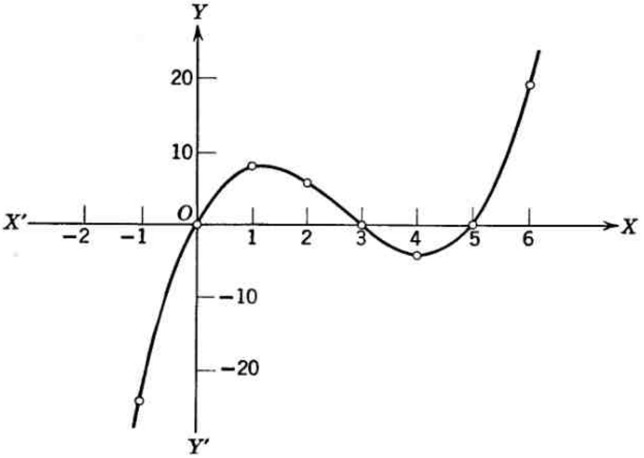
| $x$ | $y$ |
|---|---|
| 0 | 5 |
| 1 | 7 |
| 2 | 9 |
| —1 | 3 |
| —2 | 1 |
| —3 | —1 |

Fig. 4.

ción, seleccionaremos solamente un número adecuado para dar una idea de la gráfica, como se muestra en la figura 4. Cada par de valores correspondientes, tomado como las coordenadas de un punto, se localiza como se ha dicho. Luego se traza una curva que una estos puntos la cual constituye la gráfica de la función dada. En este ejemplo resulta que los puntos están en una línea recta. Utilizando la geometría analítica puede demostrarse rigurosamente que la gráfica de esta función es una recta.

**Ejemplo 2.** Trazar la gráfica de la función $x^3 - 8x^2 + 15x$.

SOLUCION. Hagamos $y = x^3 - 8x^2 + 15x$. Asignando algunos valores a $x$ y calculando los valores correspondientes de $y$, obtenemos las coordenadas de un número adecuado de puntos (fig. 5). Localizando estos puntos y trazando una curva que los una, obtenemos la gráfica que aparece en la figura 5. Al hacer esto, se supone que la línea que une dos puntos sucesivos es un trazo de curva sin más condición que la de pasar por los puntos seleccionados. Aunque esto es cierto en la gráfica particular que estamos considerando, no lo es necesariamente para las gráficas de todas las funciones algebraicas. Sin embargo, para las funciones dadas por polinomios de una sola variable, de las cuales es un ejemplo esta función, la gráfica es siempre una curva continua como se demuestra en calculo diferencial.



| $x$ | $y$ |
|---|---|
| 0 | 0 |
| 1 | 8 |
| 2 | 6 |
| 3 | 0 |
| 4 | —4 |
| 5 | 0 |
| 6 | 18 |
| —1 | —24 |

FIG. 5.

Conviene ahora introducir un concepto muy importante, a saber: el de *cero de una función*. Entendemos por un *cero de $f(x)$*, aquel valor de $x$ que hace cero el valor correspondiente de $f(x)$. Por ejemplo —1 es un cero de la función $2x + 2$. Gráficamente los ceros *reales* de $f(x)$ son las abscisas de los puntos en donde la gráfica corta al eje $X$. En la figura 5 se observa que los ceros reales de la función $x^3 - 8x^2 + 15x$ son 0, 3 y 5. Más adelante veremos que la determinación de los ceros de las funciones es uno de los problemas básicos del álgebra.

NOTA. El lector observará que hemos restringido la representación gráfica a las funciones algebraicas de una *sola* variable. Para funciones de varias variables el problema se vuelve algo complicado. Por ejemplo, para funciones de dos variables independientes se requiere un sistema de coordenadas tridimensional. Esto es un problema de geometría analítica del espacio y no se tratará en este libro.

## EJERCICIOS. GRUPO 10

En cada uno de los ejercicios 1-18 trazar la gráfica de la función dada.

1. $x$.
2. $x + 1$.
3. $2x - 1$.
4. $x^2$.
5. $x^3$.
6. $x^4$.
7. $2x^2 - 1$.
8. $1 - x^2$.
9. $4 - x^2$.
10. $\sqrt{4 - x^2}$.
11. $-\sqrt{4 - x^2}$.
12. $\sqrt{x^2 - 1}$.
13. $\pm\sqrt{x^2 - 1}$.
14. $x^2 - 5x$.
15. $x^2 - 4x + 1$.
16. $1 - 4x - x^2$.
17. $x^3 - x$.
18. $x^3 + x$.

En cada uno de los ejercicios 19-27 construir la gráfica de la ecuación dada.

19. $x + y = 1$.
20. $x - y = 1$.
21. $x + 5 = 0$.
22. $y - 2 = 0$.
23. $y = x^2 + 1$.
24. $x^2 + y = 9$.
25. $x^2 + y^2 = 1$.
26. $y = x^3 - 4x$.
27. $x^3 + y = 8$.

En cada uno de los ejercicios 28-33 trazar la gráfica de la función dada y hallar sus ceros reales.

28. $x^2 - 1$.
29. $x^2 - x - 2$.
30. $x^2 - 2x - 4$.
31. $x^2 + 2x - 2$.
32. $x^3 + 2x^2 - x - 2$.
33. $x^3 - 3x^2 + 2x$.

En cada uno de los ejercicios 34 y 35 comprobar por medio de una gráfica que la función dada no tiene ceros reales.

34. $x^2 + 5$.
35. $x^2 - 2x + 3$.

# 4

# La función lineal

## 4.1. INTRODUCCION

Al final del capítulo anterior hemos dicho que la determinación de los ceros de las funciones es uno de los problemas fundamentales del álgebra. Por ejemplo, tal es el caso de la función racional entera de $x$ de grado $n$,

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n, \qquad a_0 \neq 0,$$

en donde $n$ es un número entero y positivo y $a_0, a_1, \ldots, a_n$ son constantes cualesquiera, siendo $a_0 \neq 0$. En este capítulo consideraremos el caso particular en que $n = 1$. La función toma entonces la forma

$$(1) \qquad a_0x + a_1, \qquad a_0 \neq 0.$$

Como se dijo anteriormente, en el Ejemplo 1 del Art. 3.9, en geometría analítica se demuestra que la gráfica de la función (1) es una recta. En consecuencia es apropiado dar a la función (1) el nombre de *función lineal.*

## 4.2. LA ECUACION

Una *ecuación* es una igualdad entre dos expresiones. Esas expresiones se llaman *miembros* de la ecuación. Por ejemplo, en la ecuación

$$x^2 + 4 = 5x,$$

la expresión $x^2 + 4$ recibe el nombre de *primer miembro* y $5x$ se llama el *segundo miembro.*

Consideraremos dos tipos de ecuaciones, la *ecuación idéntica* o *identidad* y la *ecuación condicional* o *ecuación.*

Una *ecuación idéntica* o *identidad*, es una igualdad en la cual ambos miembros son iguales para *todos* los valores de las variables para los cuales estén definidos los miembros. En una identidad el signo $=$ se suele sustituir por el símbolo $\equiv$, que se lee "idéntico a". Son ejemplos de identidades

$$(1) \qquad (a-b)^2 \equiv a^2 - 2ab + b^2,$$

$$(2) \qquad \frac{x}{x-1} \equiv 1 + \frac{1}{x-1}.$$

La igualdad (1) es verdadera para *todos* los valores de $a$ y $b$; la (2) es válida para todos los valores de $x$ excepto 1.

Una *ecuación condicional*, o simplemente una *ecuación*, es una igualdad en la cual ambos miembros son iguales solamente para ciertos valores particulares de las variables. Son ejemplos de ecuaciones condicionales

$$(3) \qquad x^2 - 5x + 4 = 0,$$

$$(4) \qquad x + y = 5.$$

La igualdad (3) es verdadera solo para $x = 1$ y $x = 4$, y no lo es para ningún otro valor de $x$. La (4) es verdadera para un número infinito de pares de valores de $x$ y $y$, pero *no para cualquier* par de valores: por ejemplo, (4) es verdadera para $x = 1$, $y = 4$ y para $x = 2$, $y = 3$, etc., pero no lo es para $x = 3$, $y = 3$ ni para $x = 4$, $y = 2$, etc.

NOTA. En una ecuación entran símbolos cuyos valores son *conocidos* o se suponen conocidos, mientras que otros símbolos representan *valores desconocidos o incógnitas*. Por ejemplo en (3), $x$ es una incógnita, mientras que los números 4 y 5 son, por supuesto, conocidos; en (4), tanto $x$ como $y$ son incógnitas o variables, siendo 5 un número conocido.

Si una ecuación se reduce a una identidad para ciertos valores particulares asignados a las variables, entonces se dice que la ecuación se *satisface* para dichos valores. (Véase Art. 3.9.) Por ejemplo, la ecuación (3) se satisface cuando se le asigna a $x$ el valor 1, ya que la ecuación se reduce entonces a la identidad $1 - 5 + 4 = 0$. Análogamente, la ecuación (4) se satisface para $x = 1$ y $y = 4$, ya que entonces se reduce a la identidad $1 + 4 = 5$.

Todo número que satisface a una ecuación con una incógnita recibe el nombre de *raíz* o *solución* de esa ecuación.

Así, por ejemplo, 1 es una raíz de la ecuación (3). Si por otra parte escribimos

$$f(x) = x^2 - 5x + 4 = 0.$$

Resulta que, además, 1 es un cero de $f(x)$ (Art. 3.9). En general, *un cero de la función* $f(x)$ *es una raíz o solución de la ecuación* $f(x) = 0$.

Un conjunto de valores de las incógnitas que satisface a una ecuación con dos o más incógnitas o variables, se llama una *solución* de esa ecuación.

Por ejemplo, $x = 1$, $y = 4$ es una solución de (4). Evidentemente la ecuación (4) tiene muchas soluciones (Art. 3.9).

## 4.3. ECUACIONES EQUIVALENTES

En este artículo nos limitaremos a considerar ecuaciones con una incógnita $x$, que representamos así:

$$f(x) = 0. \tag{1}$$

Estudiaremos cómo se hallan las raíces de (1), lo cual se llama *resolver* la ecuación. El método general consiste en transformar (1) en otra ecuación, por ejemplo

$$F(x) = 0. \tag{2}$$

cuyas raíces puedan obtenerse con más facilidad que las de la ecuación (1). Es obvio que este procedimiento es aplicable si, y sólo si, las raíces de la ecuación (2) son las mismas que las de la ecuación (1); en dicho caso estas ecuaciones reciben el nombre de *equivalentes*.

Por ejemplo $x - 2 = 0$ y $2x = 4$ son equivalentes, ya que ambas tienen como única raíz al número 2. Pero $x - 2 = 0$ y $x^2 - 4 = 0$ *no son equivalentes* porque la primera ecuación tiene como única raíz al número 2 mientras que la segunda tiene dos raíces $\pm 2$.

A continuación consideraremos las operaciones que pueden efectuarse en una ecuación dada para obtener una ecuación equivalente. Podemos recordar que en el Capítulo 2 establecimos propiedades de las igualdades para cada una de las cuatro operaciones siguientes: adición, sustracción, multiplicación y división. Utilizando estas propiedades podemos demostrar que una ecuación dada puede transformarse en otra equivalente por medio de cualquiera de las siguientes operaciones:

1. Si se suma o se resta una *misma expresión* a ambos miembros de una ecuación, la ecuación resultante es equivalente a la dada.

2. Si ambos miembros de una ecuación se multiplican por, o se dividen entre *la misma constante no nula,* la ecuación resultante es equivalente a la dada.

Respecto a la operación 1, consideremos que la expresión $g(x)$ se suma a ambos miembros de (1) obteniéndose, por la propiedad aditiva de la igualdad, la ecuación

$$(3) \qquad f(x) + g(x) = g(x).$$

Sea $r$ una raíz de (1), de modo que $f(r) \equiv 0$. Sustituyendo $r$ en lugar de $x$ en (3), obtenemos la identidad

$$0 + g(r) \equiv g(r),$$

lo que significa que $r$ es una raíz de (3).

Recíprocamente, sea $s$ una raíz de (3). Se obtiene la identidad

$$f(s) + g(s) \equiv g(s),$$

y por la propiedad sustractiva de la igualdad tenemos la identidad

$$f(s) \equiv 0,$$

lo que significa que $s$ es también una raíz de (1). Por tanto, las ecuaciones (1) y (3) son equivalentes.

En forma análoga podemos establecer la validez de las otras operaciones que conducen a ecuaciones equivalentes. Sin embargo, se debe notar que hay cierta diferencia entre estas operaciones, a saber, que en la adición y la sustracción podemos sumar o restar cualquier *expresión*, la cual puede incluir tanto variables como constantes, pero en la multiplicación y división sólo podemos multiplicar por, y dividir entre, *constantes* no nulas.

Si ambos miembros de una ecuación dada se multiplican por una expresión que contenga la variable, la nueva ecuación puede tener una o más raíces que no son raíces de la ecuación dada. Estas nuevas raíces se llaman *raíces extrañas* y la nueva ecuación se llama *redundante* con respecto a la ecuación dada.

Como ejemplo consideremos la ecuación

$$(4) \qquad x = 3$$

que tiene la raíz 3. Si multiplicamos ambos miembros por $x - 2$, obtenemos la ecuación

$$(5) \qquad x(x - 2) = 3(x - 2)$$

que tiene las raíces 2 y 3. Por tanto, las ecuaciones (4) y (5) no son equivalentes, 2 es una raíz extraña, y la ecuación (5) es redundante con respecto a la ecuación (4).

Observemos otro caso: Si ambos miembros de (4) se elevan al cuadrado, obtenemos la ecuación $x^2 = 9$ cuyas raíces son $\pm 3$. Lo que significa que esta operación ha introducido la raíz extraña $-3$.

Si ambos miembros de la ecuación dada se dividen entre una misma expresión que contenga la variable, la nueva ecuación puede tener una o más raíces de menos respecto a la ecuación dada. En este caso se dice que la nueva ecuación es *defectuosa* con respecto a la ecuación dada.

Como ejemplo dividamos ambos miembros de la ecuación (5) entre $x - 2$. Obtenemos la ecuación

$$x = 3. \tag{6}$$

La ecuación (5) tiene las raíces 2 y 3 pero la ecuación (6) es defectuosa con respecto a la ecuación (5) pues sólo tiene la raíz 3.

En consecuencia, debe tenerse cuidado cuando se efectúen operaciones en una ecuación dada, para que no se introduzcan raíces extrañas y para que no se pierdan raíces válidas. Para esto conviene que el estudiante tome como norma la *comprobación de cada raíz en la ecuación original,* por sustitución directa.

Finalmente consideremos una operación muy sencilla y muy usada en la resolución de ecuaciones. Sea, por ejemplo, la igualdad

$$a + b = c - d, \tag{7}$$

en donde $a$, $b$, $c$ y $d$ son términos. Por la propiedad aditiva de la igualdad, si añadimos $d$ a ambos miembros obtenemos la nueva igualdad

$$a + b + d = c. \tag{8}$$

Comparando (7) y (8), vemos que el término $d$ ha sido transpuesto del segundo miembro al primer miembro, cambiando su signo. Además, si restamos $b$ de ambos miembros de (7), obtenemos la nueva igualdad

$$a = c - d - b. \tag{9}$$

Comparando (7) y (9), vemos que el término $b$ ha sido transpuesto del primer miembro al segundo miembro, cambiando su signo. En consecuencia:

*Regla de transposición de términos Cualquier término puede transponerse de un miembro al otro de una igualdad y, por lo tanto, de una ecuación, con la condición de que se cambie su signo.*

## 4.4. LA ECUACION LINEAL O DE PRIMER GRADO, CON UNA INCOGNITA

Si la función lineal de una variable (Art. 4.1), se iguala a cero, tenemos *la ecuación de primer grado,* o *lineal,* con una incógnita:

$$ax + b = 0, \qquad a \neq 0, \tag{1}$$

en donde $a$ y $b$ son constantes arbitrarias.

Como primer paso para la resolución de esta ecuación transponemos $b$ al segundo miembro, obteniendo así la ecuación equivalente

$$ax = -b.$$

Después dividimos ambos miembros entre $a$, obteniendo otra ecuación equivalente que es la solución de la ecuación dada:

$$x = -\frac{b}{a}.$$

Si este valor de $x$ se sustituye en (1) obtenemos la identidad

$$a\left(-\frac{b}{a}\right) + b = -b + b = 0.$$

**Teorema 1.** *La ecuación lineal con una incógnita*

$$ax + b = 0, \qquad a \neq 0,$$

*tiene la solución única* $\quad x = -\dfrac{b}{a}.$

Por tanto, para resolver una ecuación de primer grado con una incógnita se transponen, si es necesario, todos los términos que contienen la incógnita a un miembro de la ecuación y todos los términos conocidos al otro miembro de la ecuación.

**Ejemplo 1.** Resolver la ecuación $ax + b^2 = a^2 + bx$, $a \neq b$.

SOLUCION. Por supuesto, aquí se sobrentiende que la incógnita es $x$ y que, por tanto, todas las otras letras representan constantes conocidas. Entonces procederemos como sigue:

Por transposición, $\quad ax - bx = a^2 - b^2.$

Factorizando $\quad (a - b)x = a^2 - b^2.$

Dividiendo entre $a - b$, si $a \neq b$, $\quad x = a + b.$

*Comprobaremos* nuestra solución por sustitución directa de la raíz $a + b$ en la ecuación *original*. Así obtenemos

$$a(a + b) + b^2 = a^2 + b(a + b),$$

o sea la identidad $\quad a^2 + ab + b^2 = a^2 + ab + b^2.$

**Ejemplo 2.** Resolver la ecuación $\dfrac{5}{x+2} - \dfrac{10}{x^2 - 4} = \dfrac{1}{2 - x}.$

SOLUCION. Una *ecuación con fracciones*, como ésta, requiere que primeramente se *supriman los denominadores* multiplicando ambos miembros por el menor denominador común de las fracciones (Art. 2.11). Si el menor denominador común es un número, entonces la ecuación resultante es equivalente a la ecuación dada, pero si el menor denominador común contiene la incógnita, es posible que se introduzcan raíces extrañas (Art. 4.3) que son los ceros del menor denominador común. En este problema las posibles raíces extrañas son $\pm 2$.

Multiplicando ambos miembros de la ecuación por $x^2 - 5$ que es el menor denominador común, obtenemos

$$5(x-2) - 10 = 1(-x-2),$$
$$5x - 10 - 10 = -x - 2,$$

$$6x = 18,$$

de donde

$$x = 3.$$

En este caso, 3 no es una raíz extraña, pero, para proceder correctamente, debe comprobarse en la *ecuación dada*. Esto se deja como ejercicio para el estudiante.

## EJERCICIOS. GRUPO 11

En cada uno de los ejercicios 1-20, resolver la ecuación dada y comprobar la solución.

1. $3x - 2 = 3 - 2x.$
2. $4 - 2x = 3x + 14.$
3. $\frac{x}{2} - \frac{3x}{5} = \frac{x-6}{2}.$
4. $\frac{x+3}{2} - \frac{2-3x}{7} = \frac{4x}{3}.$
5. $3x - (x+3) = x + 4$
6. $x - [4 - (x+1)] = 4x - 15.$
7. $2(2x - a) - (a - 2x) = 3x.$
8. $ax - c + bx - d = 0.$
9. $(m+n)x + (m-n)x = 2m^2.$
10. $ax - b^3 = a^3 - bx.$
11. $\frac{x}{a} + \frac{x}{b} = \frac{a+b}{a}.$
12. $\frac{x}{a} - \frac{x}{a+b} = \frac{1}{a+b}.$
13. $(x + a^2)(x + b^2) = (x + ab)^2.$
14. $(x+1)(x-2) = x^2 + 6.$
15. $\frac{2x}{x-1} - 2 = \frac{3}{x+1}.$
16. $\frac{1}{x+3} + \frac{1}{x} = \frac{2}{x+1}.$
17. $\frac{1}{x+2} + \frac{1}{x-3} = \frac{3}{x^2 - x - 6}.$
18. $\frac{x+b}{x-b} = \frac{x}{x+b}.$
19. $\frac{1}{x} - \frac{1}{r} = \frac{1}{s} - \frac{1}{x}.$
20. $\frac{a^2+b^2}{2bx} - \frac{b}{x} = \frac{a-b}{2bx^2}.$

En cada uno de los Ejercicios 21-24, resolver la ecuación dada, primero para $y$ en términos de $x$, y luego para $x$ en términos de $y$ (dicho de otro modo: despejar la $y$ en función de la $x$ y a la $x$ en función de la $y$).

21. $3x + 2y = 6.$
22. $4x - 5y = 10.$
23. $bx + ay = ab.$
24. $ax + by + c = 0.$

En cada uno de los Ejercicios 25-28 despejar la letra indicada en función de las letras restantes.

25. $A = P(1 + rt)$; $t$.

26. $a_n = a_1 + (n - 1)d$; $d$.

27. $s = s_0 + v_0t + \frac{1}{2}gt^2$; $v_0$.

28. $\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$; $q$.

29. Demostrar que las ecuaciones $\sqrt{x + 1} = \sqrt{x}$ y $\sqrt{x - 1} = \sqrt{x + 1}$ no tienen solución.

30. Demostrar que la siguiente ecuación no tiene solución:

$$\frac{x + 1}{x - 1} + 4 = \frac{4x^2}{x^2 - 1} + \frac{x - 1}{x + 1}.$$

31. Resolver y comprobar: $\frac{x - 6}{x - 7} - \frac{x - 5}{x - 6} = \frac{x - 2}{x - 3} - \frac{x - 1}{x - 2}$.

32. Demostrar que si de ambos miembros de una ecuación se resta la misma expresión, la ecuación resultante es equivalente a la ecuación dada.

33. Demostrar que si se multiplican ambos miembros de una ecuación por un mismo número no nulo, la ecuación resultante es equivalente a la ecuación dada.

34. Demostrar que si ambos miembros de una ecuación se dividen entre el mismo número, no nulo, la ecuación resultante es equivalente a la ecuación dada.

35. Demostrar que es imposible que la ecuación lineal $ax + b = 0$, $a \neq 0$, tenga dos soluciones distintas.

## 4.5. PROBLEMAS QUE SE RESUELVEN POR MEDIO DE UNA ECUACION LINEAL

Es posible resolver una gran variedad de problemas por medio de ecuaciones de primer grado con una incógnita. El procedimiento consiste, generalmente, en representar con una letra, por ejemplo $x$, la cantidad desconocida (o una de las cantidades desconocidas). El siguiente paso consiste en obtener una ecuación que contenga a $x$ y que traduzca algebraicamente las condiciones del problema. El paso final será la resolución de esta ecuación. En todo este proceso es importante que el estudiante tenga en cuenta que *la letra x siempre representa un número*. También es importante comprobar la solución viendo que satisface las condiciones del problema.

**Ejemplo 1.** Cierto trabajo puede ser efectuado por $A$ en 4 días, y por $B$ en 6 días. ¿Cuánto tiempo necesitarán para hacer todo el trabajo juntos?

SOLUCION. Sea $x$ = número necesario de días.

Entonces $\frac{1}{x}$ = parte del trabajo que pueden hacer ambos en un día,

$\frac{1}{4}$ = parte del trabajo que puede hacer $A$ en un día,

$\frac{1}{6}$ = parte del trabajo que puede hacer $B$ en un día,

Por lo tanto $$\frac{1}{x} = \frac{1}{4} + \frac{1}{6}.$$

Multiplicando por $12x$, $12 = 3x + 2x$,

de donde $$x = \frac{12}{5} = 2\frac{2}{5} \text{ días.}$$

COMPROBACION. En $2\frac{2}{5}$ días, la parte del trabajo hecha por $A$ es $\frac{12}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{5}$, y la parte hecha por $B$ es $\frac{12}{5} \cdot \frac{1}{6} = \frac{2}{5}$; la suma de estas partes es $\frac{3}{5} + \frac{2}{5} = 1$, o sea, el trabajo completo.

**Ejemplo 2.** Una mezcla de 16 litros de alcohol y agua contiene un 25 por ciento de alcohol. ¿Cuántos litros de alcohol deben añadirse para obtener una mezcla que contenga el 50 por ciento de alcohol?

SOLUCION. Sea $x$ = *número* de litros de alcohol que deben añadirse. Entonces $16 + x$ = número de litros de la nueva mezcla. En la mezcla original hay $\frac{1}{4} \cdot 16 = 4$ litros de alcohol. Entonces $4 + x$ = número de litros de alcohol en la nueva mezcla.

Por tanto $$\frac{4 + x}{16 + x} = \frac{1}{2},$$

de donde $$8 + 2x = 16 + x,$$

o sea $x = 8$ = número de litros de alcohol que deben añadirse.

COMPROBACION. Volumen de la nueva mezcla $= 16 + 8 = 24$ litros. Contenido de alcohol en la nueva mezcla $= 4 + 8 = 12$ litros $= 50\%$ de 24 litros.

## EJERCICIOS. GRUPO 12

Al resolver los problemas siguientes se recomienda que se compruebe el resultado (o resultados).

1. Un alambre de 21 m. se divide en dos partes, de tal modo que la longitud de una de ellas es las tres cuartas partes de la longitud de la otra. Hallar la longitud de cada parte.
2. El denominador de una fracción excede al numerador en dos unidades. Si cada término de la fracción se aumenta en cinco unidades, la nueva fracción es $\frac{4}{5}$. Hallar la fracción.
3. Encontrar tres enteros consecutivos cuya suma sea igual a 21.
4. Encontrar tres números pares consecutivos cuya suma sea igual a 36.
5. Hallar dos números cuya suma sea 24 y cuya diferencia sea 6.

6. Hace ocho años un hombre tenía 7 veces la edad de su hijo, pero ahora tiene solo 3 veces la edad de su hijo. Hallar las edades actuales de ambos.

7. Si $\frac{1}{5}$ de la edad de $A$ se aumenta en $\frac{1}{4}$ la edad que tenía hace 10 años, entonces la suma es igual a $\frac{1}{3}$ de la edad que tendrá dentro de 10 años. Calcular la edad actual de $A$.

8. Dividir el número 40 en dos partes tales que si el cociente de la mayor entre la menor se disminuye en el cociente de la menor entre la mayor, entonces la diferencia es igual al cociente de 16 entre la parte menor.

9. Dividir el número 72 en tres partes tales que $\frac{1}{2}$ de la primera parte, $\frac{1}{3}$ de la segunda parte y $\frac{1}{4}$ de la tercera parte, sean iguales entre sí.

10. El dígito de las unidades de un número de dos cifras excede al dígito de las decenas en 5 unidades. Si los dígitos se invierten y el nuevo número se divide entre el número original el cociente es $\frac{8}{3}$. ¿Cuál es el número original?

11. Si el lado de un cuadrado se disminuye en 1 m., su área disminuye en 39 $m^2$. Calcular la longitud del lado del cuadrado original.

12. La longitud, en metros, de una habitación es el triple de su ancho. Si la longitud se disminuye en 5 m. y el ancho se aumenta en 2 m., el área del cuarto no se altera. Calcular las dimensiones de la habitación.

13. Cierto trabajo puede ser efectuado por $A$ en 3 horas, por $B$ en 4 horas y por $C$ en 6 horas. ¿Cuánto tiempo necesitarán para efectuar el trabajo juntos?

14. Una llave puede llenar un tanque en 2 horas, una segunda llave puede llenarlo en 3 horas, y otra llave puede vaciarlo en 6 horas. Si el tanque está inicialmente vacío y se abren simultáneamente las tres llaves, ¿cuánto tiempo se necesitará para llenar el tanque?

15. $A$ y $B$ trabajando juntos pueden hacer cierto trabajo en 8 horas, y $A$ solo puede hacerlo en 12 horas, ¿cuánto tiempo necesitará $B$ para hacerlo solo?

16. $A$ puede pintar una casa en 8 días y $B$ puede hacerlo en 6 días, ¿cuánto tiempo necesitará $B$ para terminar el trabajo después de que ambos han trabajado juntos durante 3 días?

17. $A$ puede hacer un trabajo en 4 horas y $B$ puede hacerlo en 12 horas. $B$ empieza el trabajo pero cierto tiempo después lo reemplaza $A$, requiriéndose para todo el trabajo un total de 6 horas. ¿Cuánto tiempo trabajó $B$?

18. Una tripulación puede remar con una velocidad de 9 Km por hora en agua tranquila. Si necesitan el doble de tiempo para remar una cierta distancia contra la corriente que para hacerlo en la dirección de la corriente, calcular la velocidad de la corriente.

19. $A$ y $B$ parten al mismo tiempo de dos poblaciones distintas caminando el uno hacia el otro. Si $B$ camina 1 Km por hora más aprisa que $A$, entonces se encuentran al cabo de 6 horas. Si $A$ camina con la misma velocidad que $B$, entonces se encuentran al cabo de $5\frac{1}{4}$ horas. Calcular la distancia entre las dos poblaciones.

20. Un bote de motor puede navegar 10 Km corriente abajo en el mismo tiempo en que navega 6 Km corriente arriba. Si su velocidad disminuye 4 Km por hora en ambos sentidos, entonces su velocidad cuando va corriente abajo es el doble que cuando navega corriente arriba. Calcular la velocidad que lleva cuando navega corriente abajo.

21. $A$ puede caminar cierta distancia en 20 minutos y $B$ puede caminar la misma distancia en 30 minutos. Si $A$ parte 5 minutos después que $B$, ¿cuánto tiempo habrá estado caminando $B$ antes de que lo alcance $A$?

22. ¿Cuántos litros de alcohol de concentración del 20% y cuántos de concentración del 30% deberán mezclarse para obtener 100 litros de alcohol de concentración del 25%?

23. ¿Cuántos kilogramos de un mineral que contiene un 60% de plata pura y cuántos de un mineral que contiene un 90% deberán mezclarse para obtener 6 Kg de aleación que tenga un 80% de plata pura?

24. ¿Cuántos litros de crema con 25% de grasa deberán añadirse a 80 litros de leche con 3% de grasa para obtener una mezcla que contenga 5% de grasa?

25. Un tanque contiene 100 Kg de salmuera con un contenido de sal del 5% ¿Cuántos kilogramos de agua pura deben evaporarse para obtener salmuera con un contenido de sal del 8%?

26. ¿A qué horas entre las 3 y las 4 quedan sobrepuestas las manecillas de un reloj?

27. ¿A qué horas entre las 3 y las 4 quedan opuestas las manecillas de un reloj?

28. ¿A qué horas entre las 4 y las 5 forman un ángulo recto las manecillas de un reloj?

29. *A* y *B* juntos pueden pavimentar una banqueta en 2 días; *B* y *C* juntos pueden hacerlo en 1⅕ días; y *A* y *C* juntos en 1½ días. ¿En cuánto tiempo puede hacerlo cada uno el trabajo?

30. Un niño tiene cierta cantidad de dinero. Si se compra 10 lápices le quedarán 10 centavos; si compra 4 cuadernos le quedarán 20 centavos; y si compra 4 lápices y 3 cuadernos le quedarán 10 centavos. ¿Cuánto dinero tiene?

## 4.6. LA ECUACION LINEAL O DE PRIMER GRADO CON DOS VARIABLES O INCOGNITAS

*La función lineal con dos variables* se representa por la expresión

$$ax + by + c, \qquad ab \neq 0,$$

en donde $a$, $b$ y $c$ son constantes arbitrarias y la restricción $ab \neq 0$ significa que ni $a$ ni $b$ son iguales a 0 (Teorema 19, Art. 2.15).

Si esta función se hace igual a cero, tenemos *la ecuación de primer grado o lineal con dos variables o incógnitas,*

$$(1) \qquad ax + by + c = 0, \qquad ab \neq 0.$$

Despejando primero $y$ y *después* $x$ obtenemos las ecuaciones equivalentes

$$(2) \qquad y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}, \qquad b \neq 0,$$

$$(3) \qquad x = -\frac{b}{a}y - \frac{c}{a}, \qquad a \neq 0.$$

Como ya se ha observado (Art. 4.2), cualquiera de estas tres ecuaciones tiene un número infinito de soluciones. Tales ecuaciones se dice que son *indeterminadas.* Al resolver un problema práctico, debemos obtener un resultado único que, evidentemente, no puede lograrse con una *sola* ecuación con *dos* incógnitas. Pero supongamos que, además de la ecuación (1), tenemos otra ecuación lineal en $x$ y $y$. Entonces podremos despejar $y$ de esta segunda ecuación e igualar al valor de $y$ dado por (2). Obtendremos así una sola ecuación en la única incógnita $x$, que tendrá una sola solución (Teorema 1, Art. 4.4). Análogamente despejando $x$ de la segunda ecuación y usando (3), podremos obtener una sola ecuación en $y$ con solución única.

Por tanto resulta que, para tener una solución única en problemas con dos o más incógnitas, es necesario tener dos o más ecuaciones lineales. Un conjunto de ecuaciones de esta clase forman un *sistema de ecuaciones lineales.*

## 4.7. SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES

Consideremos el sistema de dos ecuaciones lineales en dos variables,

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0, \qquad a_1b_1 \neq 0, \tag{1}$$

$$a_2x + b_2y + c_2 = 0, \qquad a_2b_2 \neq 0, \tag{2}$$

en donde $x$ y $y$ representan simultáneamente los mismos números en *ambas* ecuaciones. Por esta razón las ecuaciones reciben también el nombre de *simultáneas.* Un par de valores $x$ y $y$ que satisfacen a ambas ecuaciones se llama una *solución común* del sistema. Un sistema que tiene solamente una solución común se dice que tiene una solución *única.*

Si el sistema tiene una solución única, ésta puede obtenerse *eliminando* una de las incógnitas y luego resolviendo para la otra. Existen varios modos de efectuar la eliminación. Un método es el de *sustitución,* tal como se indicó en el artículo anterior. Otro método, llamado de *sumas o restas,* es el que damos a continuación.

Si multiplicamos las ecuaciones (1) y (2) por las constantes arbitrarias o parámetros $k_1$ y $k_2$, obtenemos las ecuaciones *equivalentes*

$$\begin{aligned} k_1(a_1x + b_1y + c_1) &= 0, \\ k_2(a_2x + b_2y + c_2) &= 0. \end{aligned}$$

Sumando estas ecuaciones tenemos

$$k_1(a_1x + b_1y + c_1) + k_2(a_2x + b_2y + c_2) = 0,$$

o también

$$(k_1a_1 + k_2a_2)x + (k_1b_1 + k_2b_2)y + (k_1c_1 + k_2c_2) = 0, \tag{3}$$

en donde $k_1$ y $k_2$ pueden tomar valores cualesquiera con tal de que no sean simultáneamente nulas. La ecuación (3) recibe el nombre de *combinación lineal* de las ecuaciones (1) y (2).

Supongamos ahora que el sistema formado por (1) y (2) tenga una solución única, digamos $x = x_1$, $y = y_1$. Entonces, de las ecuaciones (1) y (2) se deduce

$$a_1x_1 + b_1y_1 + c_1 = 0, \tag{4}$$

$$a_2x_1 + b_2y_1 + c_2 = 0. \tag{5}$$

Si ahora hacemos $x = x_1$ y $y = y_1$ en (3), encontramos que por (4) y (5) se reduce a

$$k_1 \cdot 0 + k_2 \cdot 0 = 0,$$

lo cual es válido para todos los valores de $k_1$ y $k_2$. Por tanto, *una solución única de* (1) *y* (2) *también es solución de* (3).

Para lograr obtener la solución a partir de (3), sólo será necesario calcular los valores de $k_1$ y $k_2$ que eliminen a una de las variables. Así, para eliminar $y$ de (3), calculamos los valores de $k_1$ y $k_2$ de modo que $k_1b_1 = -k_2b_2$.

**Ejemplo 1.** Resolver el siguiente sistema, comprobando el resultado analíticamente y trazando una gráfica.

$$3x - 2y = 1, \qquad 2x + 3y = 18.$$

SOLUCION. Si multiplicamos la primera ecuación por 3 y la segunda por 2, obtenemos respectivamente las ecuaciones equivalentes,

$$9x - 6y = 3,$$
$$4x + 6y = 36.$$

Sumando $\quad 13x = 39$, de donde $x = 3$.

Análogamente, podemos obtener $y$ por medio de una combinación lineal adecuada. Sin embargo, es más sencillo sustituir $x = 3$ en la primera ecuación y resolver para $y$. Así tenemos,

$$9 - 2y = 1, \text{ de donde } y = 4.$$

Por tanto, la solución es $x = 3$, $y = 4$. La comprobación analítica se hace sustituyendo la solución en cada una de las ecuaciones dadas. Así se tiene

$$3(3) - 2(4) = 9 - 8 = 1,$$
$$2(3) + 3(4) = 6 + 12 = 18.$$

En el Art. 3.9 vimos que la gráfica de una ecuación lineal con dos variables es una línea recta. Las gráficas de las dos ecuaciones dadas se han trazado en la figura 6. Su punto de intersección tiene las coordenadas (3, 4), que representan la solución común de las dos ecuaciones dadas. Las gráficas indican que esta solución es única.

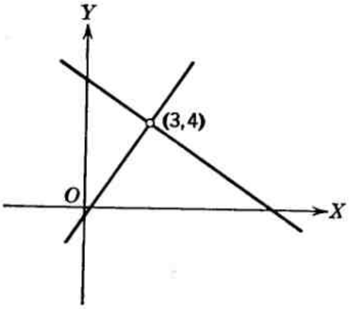


FIG. 6.

Hasta ahora solamente hemos considerado sistemas que tienen una solución única. Sin embargo, existen sistemas como

$$x + y = 3, \qquad x + y = 2$$

que no tienen solución común. Y hay otros, como el sistema

$$x + y = 2, \qquad 2x + 2y = 4$$

que tienen un número infinito de soluciones comunes.

Para poder obtener criterios adecuados de un sistema lineal, consideramos el sistema

$$(6) \qquad a_1x + b_1y = c_1, \qquad a_1b_1 \neq 0,$$

$$(7) \qquad a_2x + b_2y = c_2, \qquad a_2b_2 \neq 0.$$

Para eliminar $y$, multiplicamos (6) por $b_2$ y (7) por $b_1$, y luego restamos, obteniéndose

$$a_1b_2x - a_2b_1x = b_2c_1 - b_1c_2,$$

de donde

$$x = \frac{b_2c_1 - b_1c_2}{a_1b_2 - a_2b_1}.$$

Análogamente, eliminando $x$ obtenemos

$$y = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}.$$

Por supuesto, esta solución es válida solamente si $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$.

Si sustituimos estos valores de $x$ y $y$ en el primer miembro de (6), obtenemos:

$$a_1\frac{b_2c_1 - b_1c_2}{a_1b_2 - a_2b_1} + b_1\frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1} = \frac{a_1b_2c_1 - a_1b_1c_2 + a_1b_1c_2 - a_2b_1c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

$$= \frac{c_1(a_1b_2 - a_2b_1)}{a_1b_2 - a_2b_1} = c_1,$$

esto es, la solución satisface a (6). En forma análoga puede demostrarse que la solución satisface a (7). Por lo tanto, la solución es única y el sistema se llama compatible.

Ahora investigaremos lo que sucede cuando

$$a_1b_2 - a_2b_1 = 0,$$

o sea

$$a_1b_2 = a_2b_1 \quad \text{y} \quad \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}.$$

Sea $a_1/a_2 = b_1/b_2 = r$, en donde $r \neq 0$ es una constante. Entonces $a_1 = ra_2$ y $b_1 = rb_2$. Sustituyendo estos valores en (6), obtenemos la ecuación equivalente

(8) $$ra_2x + rb_2y = c_1.$$

Multiplicando ambos miembros de (7) por $r$, obtenemos la ecuación equivalente

(9) $$ra_2x + rb_2y = rc_2.$$

Observamos que los primeros miembros de (8) y (9) son idénticos. Lo cual es una contradicción si $c_1 \neq rc_2$ en este caso no existe una solución común, y el sistema se llama *incompatible.*

Pero si $c_1 = rc_2$, las ecuaciones (8) y (9) son idénticas y, por tanto, equivalen a una sola ecuación con dos variables. En este caso hay un número infinito de soluciones y el sistema se llama *dependiente.* Si dos ecuaciones *no* son reducibles a la misma forma se dice que son *independientes.*

Resumimos estos resultados en el siguiente teorema:

**Teorema 2.** *El sistema de ecuaciones lineales*

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y &= c_1, \qquad a_1b_1 \neq 0,\\ a_2x + b_2y &= c_2, \qquad a_2b_2 \neq 0, \end{aligned}$$

*tiene la solución única*

$$x = \frac{b_2c_1 - b_1c_2}{a_1b_2 - a_2b_1}, \qquad y = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1},$$

*solamente si* $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$. *En este caso se dice que el sistema es compatible.*

*Si* $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$, *entonces el sistema no tiene solución y se dice que es incompatible, o bien tiene un número infinito de soluciones, y se dice que es dependiente.*

NOTAS

1. Se pueden obtener resultados análogos a este teorema para el caso general de un sistema de $n$ ecuaciones lineales con $n$ incógnitas. Sin embargo, la discusión de este caso se pospondrá hasta llegar al estudio de los determinantes.

2. Se aconseja al estudiante que no use las fórmulas dadas en el teorema 2 para obtener la solución de un sistema de ecuaciones lineales. Es preferible emplear el método de eliminación explicado en el ejemplo 1.

**Ejemplo 2.** Analizar la naturaleza de la solución del sistema

$$x - 2y = 4, \qquad 2x - 4y = -3$$

y comprobar el resultado gráficamente.

SOLUCION. Si intentamos eliminar cualquiera de las dos variables resulta que la otra variable también se elimina. Cuando esto ocurre, el sistema debe analizarse con más detalle. Así, si multiplicamos la primera ecuación por 2, obtenemos la ecuación equivalente $2x - 4y = 8$, la cual, sin embargo, contradice a la segunda ecuación del sistema. Por lo tanto el sistema es incompatible, es decir, no tiene solución.

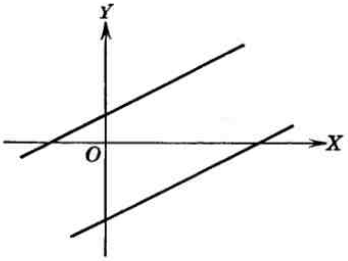


FIG. 7.

Las gráficas de las dos ecuaciones dadas (fig. 7) muestran que se trata de dos rectas paralelas, es decir, que no tienen ningún punto común: esta es la comprobación geométrica de que no hay solución para el sistema dado.

**Ejemplo 3.** Analizar la naturaleza de la solución del sistema

$$x - 2y = 4, \qquad 2x - 4y = 8$$

SOLUCION. Si multiplicamos la primera ecuación por 2, obtenemos la segunda ecuación. Por lo tanto el sistema dado es dependiente y tiene un número infinito de soluciones. Siendo equivalentes ambas ecuaciones, están representadas por una sola recta, la inferior en la figura 7.

El método de eliminación usado para obtener la solución de un sistema de dos ecuaciones lineales puede ser extendido inmediatamente a sistemas de tres o más ecuaciones.

**Ejemplo 4.** Resolver y comprobar el sistema

$$\begin{aligned} x + 2y - z &= 2, \\ 2x - y + z &= 3, \\ 2x + 2y - z &= 3, \end{aligned}$$

SOLUCION. Podemos reducir el sistema dado a un sistema de dos ecuaciones con dos variables, eliminando una de ellas, digamos $z$. Así, sumando las ecuaciones primera y segunda, tenemos

$$3x + y = 5,$$

y sumando las ecuaciones segunda y tercera, tenemos

$$4x + y = 6.$$

Resolviendo este sistema se obtiene $x = 1$, $y = 2$. Sustituyendo estos valores de $x$ y $y$ en la primera de las ecuaciones dadas, resulta

$$1 + 4 - z = 2 \quad \text{o sea} \quad z = 3.$$

Por tanto, la solución es $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$. Debe comprobarse la solución por sustitución directa en cada una de las ecuaciones dadas.

Veamos ahora algunas conclusiones y observaciones importantes.

NOTAS

3. De los ejemplos anteriores inferimos que para que un problema de $n$ incógnitas tenga solución única se requiere un sistema de $n$ ecuaciones *independientes.*

4. Observamos que en un sistema de 2 ecuaciones independientes, podemos eliminar 1 variable, y que en un sistema de 3 ecuaciones independientes podemos eliminar 2 variables. En general, la *eliminación de* $n$ *variables requiere* $n + 1$ *ecuaciones independientes.*

5. Hasta ahora el número de ecuaciones en un sistema lineal dado ha sido igual al número de incógnitas. Si el número de ecuaciones *difiere* del número de variables, entonces el sistema requiere métodos especiales. Algunos casos particulares de dichos sistemas se estudian en el capítulo sobre determinantes, pero la teoría completa requiere estudios superiores.

## 4.8. PROBLEMAS QUE PUEDEN RESOLVERSE POR MEDIO DE UN SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES

Muchos problemas que requieren la determinación de dos o más cantidades desconocidas pueden ser resueltos por medio de un sistema de ecuaciones lineales. Las cantidades desconocidas se representan con letras, por ejemplo $x$, $y$, etc., y se establece un sistema de ecuaciones que satisfagan las diversas condiciones del problema. La resolución de este sistema conduce a los valores de las incógnitas. Veamos varios ejemplos.

**Ejemplo 1.** El costo total de 5 libros de texto y 4 plumas es de \$ 32; el costo total de otros 6 libros de texto iguales y 3 plumas es de \$ 33. Hallar el costo de cada artículo.

SOLUCION. Sea $x$ = el costo de un libro de texto en pesos, y $y$ = el costo de una pluma en pesos.

Según el problema obtenemos las dos ecuaciones

$$5x + 4y = 32,$$
$$6x + 3y = 33.$$

La solución de este sistema es $x = 4$, $y = 3$, es decir, el costo de cada libro de texto es \$ 4 y el costo de cada pluma es \$ 3. Estos resultados pueden comprobarse fácilmente. Así, el costo de 5 libros de texto y 4 plumas es igual a $5(4) + 4(3) = \$32$ y el costo de 6 libros de texto y 3 plumas es igual a $6(4) + 3(3) = \$33$.

**Ejemplo 2.** Hallar dos números tales que la suma de sus recíprocos sea 5, y que la diferencia de sus recíprocos sea 1.

SOLUCION. Sea $x$ = número menor
y $y$ = número mayor.

La suma y la diferencia de sus recíprocos son, respectivamente,

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 5,$$

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = 1.$$

Este no es un sistema lineal pero puede ser tratado como tal utilizando como incógnitas $1/x$ y $1/y$. Así, sumando las dos ecuaciones tenemos

$$\frac{2}{x} = 6,$$

de donde $$2 = 6x \quad \text{y} \quad x = \tfrac{1}{3}.$$

Restando la segunda ecuación de la primera, obtenemos

$$\frac{2}{y} = 4,$$

de donde $$2 = 4y \quad \text{y} \quad y = \tfrac{1}{2}.$$

Por tanto, los dos números son $\frac{1}{3}$ y $\frac{1}{2}$. Se deja como ejercicio la comprobación de estos resultados.

NOTA. Se notará la semejanza del sistema dado con un sistema lineal si hacemos $u = 1/x$ y $v = 1/y$, ya que así el sistema toma la forma:

$$u + v = 5,$$
$$u - v = 1.$$

## EJERCICIOS. GRUPO 13

En cada uno de los ejercicios 1-6 resolver el sistema dado, y comprobar el resultado gráficamente.

1. $3x - y = 2, \quad 2x + 3y = 5.$
2. $x + 4y = 7, \quad 2x + 3y = 4.$
3. $2x - 3y = 9, \quad 3x + 4y = 5.$
4. $3x + 2y = 0, \quad 2x + 5y = 11.$
5. $9x + 7y = 0, \quad 5x - 9y = 0.$
6. $2x - 11y = 4, \quad 4x + 7y = 8.$

En cada uno de los ejercicios 7-10, analizar la naturaleza de la solución del sistema dado y comprobar el resultado gráficamente.

7. $3x + y = 5, \quad 6x + 2y = 7.$
8. $4x - 2y = 4, \quad 2x - y = 2.$
9. $2x - 6y = 2, \quad x - 3y = 3.$
10. $7x + 2y = 1, \quad 21x + 6y = 3.$

En cada uno de los ejercicios 11-17 resolver el sistema dado y comprobar el resultado.

11. $\dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{y} = 1, \quad \dfrac{2}{x} - \dfrac{1}{y} = -\dfrac{7}{4}.$
12. $\dfrac{2}{x} - \dfrac{3}{2y} = \dfrac{3}{2}, \quad \dfrac{4}{3x} - \dfrac{3}{y} = \dfrac{1}{3}.$
13. $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 3, \quad \dfrac{x}{2a} - \dfrac{3y}{b} = -2.$
14. $ax + by = r, \quad cx + dy = s.$
15. $x + y = 7, \quad y + z = 5, \quad x + z = 6.$
16. $4x + 2y - 7z = 3, \quad x - y - 5z = 1, \quad 2x + 4y + z = 3.$
17. $\dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{y} = \dfrac{7}{6}, \quad \dfrac{1}{y} + \dfrac{2}{z} = \dfrac{2}{3}, \quad \dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{z} = \dfrac{7}{6}.$

18. Comprobar que la solución única de un sistema dado en el Teorema 2 (Art. 4.7), satisface a la ecuación (7).

19. En el sistema del Teorema 2 (Art. 4.7) demostrar que si $c_1$ y $c_2$ son ambas nulas, entonces el sistema tiene la solución $x = 0$, $y = 0$. En este caso el sistema se llama *homogéneo*.

20. Sean $a_1x + b_1 = 0$, $a_1 \neq 0$, y $a_2x + b_2 = 0$, $a_2 \neq 0$, dos ecuaciones lineales con una incógnita. Demostrar que una condición necesaria y suficiente para que estas ecuaciones sean compatibles es que $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$.

En cada uno de los ejercicios 21-30, resolver y comprobar los resultados.

21. Si el numerador de una fracción dada se aumenta en 1, la nueva fracción es ½; si el denominador se disminuye en 1, la nueva fracción es ⅓. Hallar la fracción.

22. Una suma de dinero se repartió en cantidades iguales entre cierto número de niños. Si hubiera habido dos niños más, cada uno habría recibido $ 1 menos; si hubiera habido dos niños menos, cada uno habría recibido $ 2 más. Hallar el número de niños y la cantidad recibida por cada uno.

23. Un número de dos cifras es igual a 8 veces la suma de sus dígitos; si los dígitos se invierten, el número resultante es 45 unidades menor que el número original. Hallar el número original.

24. La temperatura $C$ medida en grados centígrados es una función lineal de la temperatura $F$ medida en grados Fahrenheit, y puede ser representada por la relación $C = aF + b$, en donde $a$ y $b$ son constantes. Determinar estas constantes, y por tanto la relación, utilizando los hechos de que el punto de congelación para el agua es 0°C y 32°F y que el punto de ebullición es 100°C y 212°F.

25. Un tren recorre cierta distancia con velocidad constante. Si esa velocidad

se aumenta en 10 Km por hora, entonces el viaje requiere 1 hora menos; si la velocidad se disminuye en 10 Km por hora, entonces el viaje requiere $1\frac{1}{2}$ horas más. Calcular la distancia recorrida y la velocidad del tren.

26. Si el ancho de un terreno rectangular se aumenta 10 metros y su longitud se disminuye 10 metros, entonces el área aumenta 400 $m^2$. Si el ancho disminuye 5 m y la longitud aumenta 10 m, entonces el área disminuye 50 $m^2$. Calcular las dimensiones del terreno.

27. Cierta línea recta está representada por la ecuación lineal $ax + by = 7$, en donde $a$ y $b$ son constantes (Art. 3.9). Calcular $a$ y $b$ si las coordenadas de dos de los puntos de la recta son $(2,1)$ y $(-1, 3)$.

28. En geometría analítica se demuestra que una circunferencia puede representarse por la ecuación $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$ en donde $D$, $E$ y $F$ son constantes. Determinar los valores que deben tener estas constantes para que la circunferencia pase por los puntos $(0,0)$, $(3,6)$, $(7,0)$.

29. $A$ y $B$ juntos pueden hacer cierto trabajo en $1\frac{5}{7}$ días, $A$ y $C$ juntos pueden hacerlo en $1\frac{7}{8}$ días, $B$ y $C$ juntos pueden hacerlo en $2\frac{2}{9}$ días. Calcular el número de días en que cada uno puede hacer el trabajo por separado.

30. La suma de los dígitos de un número de tres cifras es 6. Si se intercambian los dígitos de las centenas y las decenas el número resultante es 90 unidades mayor que el número original. Si se intercambian los dígitos de las decenas y las unidades el número resultante es 9 unidades mayor que el número original. ¿Cuál es el número?

# 5

# La función cuadrática

## 5.1. INTRODUCCION

Continuamos nuestro estudio de las funciones enteras en $x$ con el caso particular en que el grado es 2. Entonces la función se llama *función cuadrática de* $x$ y generalmente se le escribe en la forma

$$ax^2 + bx + c, \qquad a \neq 0,$$

en donde $a$, $b$ y $c$ son constantes. Esta función es de gran importancia y se presenta frecuentemente no solo en álgebra sino también en otras ramas de las matemáticas, en física y en ingeniería.

## 5.2. LA ECUACION CUADRATICA O DE SEGUNDO GRADO CON UNA INCOGNITA

Si la función cuadrática de $x$ se iguala a cero, entonces obtenemos la *ecuación cuadrática con una incógnita.*

$$(1) \qquad ax^2 + bx + c = 0, \qquad a \neq 0,$$

en donde $a$, $b$ y $c$ son constantes. La ecuación (1) también se conoce como la *forma canónica* de la ecuación de segundo grado.

Por *resolución* de (1) se entiende la determinación de sus raíces (Art. 4.2). Se emplean comúnmente dos métodos: el de factorización y el de aplicación de una fórmula.

## 5.3. RESOLUCION POR FACTORIZACION

El primer paso para resolver una ecuación de segundo grado por cualquier método es escribir la ecuación en la forma canónica, si es que no está ya en dicha forma, o sea en la forma

$$(1) \qquad ax^2 + bx + c = 0, \qquad a \neq 0.$$

El primer miembro de (1) es un trinomio general de segundo grado que puede ser factorizado en dos factores lineales (Art. 2.9, tipo 4).

Ya que el producto de estos dos factores es igual a cero, calcularemos los valores de $x$ que anulan a cada uno de ellos, para lo cual igualaremos a cero cada factor (Teorema 19, Art. 2.15). Por tanto, la resolución de (1) se reduce a la resolución de *dos ecuaciones lineales equivalentes a ella* (Art. 4.3, 4.4).

En la ecuación (1), la única restricción sobre las constantes $a$, $b$ y $c$ es que $a \neq 0$. Por tanto, tanto $b$ como $c$ o ambas, pueden ser cero. Primeramente consideraremos estos últimos casos.

Si $c = 0$, la ecuación (1) se reduce a

$$ax^2 + bx = 0, \tag{2}$$

que inmediatamente puede factorizarse así

$$x(ax + b) = 0,$$

que equivale a las dos ecuaciones lineales

$$x = 0, \qquad ax + b = 0,$$

con las soluciones 0 y $-b/a$, que son las raíces de (2).

Análogamente, podemos demostrar que si $b = 0$, entonces las raíces son $\pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$, y si $b = c = 0$, entonces ambas raíces son cero.

Veamos con un ejemplo el caso en que $b \neq 0$, $c \neq 0$.

**Ejemplo.** Resolver por factorización la ecuación

$$2(x + 1)^2 - x = 4. \tag{3}$$

SOLUCION. Primeramente escribimos la ecuación (3) en la forma canónica

$$2x^2 + 3x - 2 = 0. \tag{4}$$

Factorizando el primer miembro, tenemos

$$(2x - 1)(x + 2) = 0.$$

Igualando a cero cada uno de los factores lineales, resulta

$$2x - 1 = 0 \quad \text{y} \quad x + 2 = 0,$$

de donde $x = \frac{1}{2}$ y $x = -2$, respectivamente. Por tanto, las raíces buscadas son $\frac{1}{2}$ y $-2$.

Como ya se observó (Art. 4.3), la solución de una ecuación debe comprobarse siempre por sustitución directa en la ecuación *original*. Así, para $x = \frac{1}{2}$, la sustitución en la ecuación (3) nos da

$$2\left(\frac{1}{2} + 1\right)^2 - \frac{1}{2} = \frac{9}{2} - \frac{1}{2} = 4;$$

y para $x = -2$, nos da $2(-2 + 1)^2 - (-2) = 2 + 2 = 4$. Lo cual demuestra que ambas raíces son correctas.

## 5.4. RESOLUCION POR MEDIO DE UNA FORMULA

Si el primer miembro de una ecuación cuadrática que está en la forma canónica puede factorizarse fácilmente, entonces éste es el método de resolución que debe seguirse. Por otra parte, la resolución de una ecuación cuadrática siempre puede hacerse por el método llamado de *completar un cuadrado.* Este método es siempre aplicable aun cuando la solución no pueda obtenerse fácilmente por factorización. Veamos un ejemplo.

**Ejemplo 1.** Resolver la ecuación

$$2x^2 - 2x - 1 = 0.$$

SOLUCION. El primer miembro no puede factorizarse en factores lineales con coeficientes racionales. Por tanto, utilizaremos la operación de completar el cuadrado, como sigue:

Se transpone el término constante al segundo miembro de la ecuación dejando en el primer miembro los términos que contienen la incógnita. Es decir

$$2x^2 - 2x = 1.$$

Se divide entre 2, que es el coeficiente de $x^2$, obteniéndose

$$x^2 - x = \frac{1}{2}.$$

Para que el primer miembro resulte un cuadrado perfecto le añadimos el cuadrado de la mitad del coeficiente de x. O sea, le añadimos $\left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$ a ambos miembros, obteniendo

$$x^2 - x + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}.$$

Extrayendo la raíz cuadrada en cada miembro obtenemos

$$x - \frac{1}{2} = \pm \frac{\sqrt{3}}{2},$$

de donde $$x = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}.$$

Por tanto, las raíces son $\frac{1 + \sqrt{3}}{2}$ y $\frac{1 - \sqrt{3}}{2}$, lo cual puede comprobarse por sustitución directa en la ecuación original.

Ya que el método de completar cuadrados se puede aplicar a cualquier ecuación, podemos emplearlo para obtener las raíces de la ecuación general de segundo grado representada en forma canónica y luego usar la solución obtenida como una fórmula. Así:

$$ax^2 + bx + c = 0, \qquad a \neq 0.$$

si transponemos $c$ al lado derecho y dividimos todos los términos entre $a$, obtenemos

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}.$$

Para completar el cuadrado, añadimos $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$ a ambos miembros.

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}.$$

Extrayendo la raíz cuadrada resulta

$$x + \frac{b}{2a} = \frac{\pm\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

de donde $$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

lo cual se conoce como la *fórmula de la ecuación de segundo grado.*

Recíprocamente podemos demostrar, por sustitución directa, que cada uno de estos dos valores de $x$ satisface la ecuación canónica original. En consecuencia:

**Teorema 1.** *La ecuación de segundo grado con una incógnita*

$$ax^2 + bx + c = 0, \qquad a \neq 0,$$

*tiene las soluciones*

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

**Ejemplo 2.** Resolver la ecuación

$$\frac{x+1}{x-1} - 1 = \frac{x}{x-2}.$$

SOLUCION. Primeramente quitaremos denominadores multiplicando ambos miembros de la ecuación por el menor denominador común $(x-1)(x-2)$. Resulta:

$$x^2 - x - 2 - x^2 + 3x - 2 = x^2 - x.$$

Simplificando y ordenando los términos, obtenemos la ecuación en su forma canónica

$$x^2 - 3x + 4 = 0.$$

Ya que el primer miembro no puede ser factorizado en factores lineales con coeficientes racionales, utilizaremos la fórmula del Teorema 1. En este caso $a = 1$, $b = -3$, $c = 4$, de modo que

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 16}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{7}i}{2}.$$

Como las únicas raíces extrañas posibles son 1 y 2, que no satisfacen la ecuación, las raíces buscadas son $\frac{3 \pm \sqrt{7}\,i}{2}$, que, para mayor *seguridad,* deben comprobarse en la ecuación original.

Existen muchos problemas que pueden resolverse por medio de ecuaciones cuadráticas.

**Ejemplo 3.** Un tren recorre 300 Km con una velocidad constante. Si la velocidad hubiera sido 10 Km por hora mayor, el tiempo empleado hubiera sido 1 hora menos. Calcular la velocidad del tren.

SOLUCION. Sea $x$ la velocidad del tren en kilómetros por hora. Tiempo necesario para el viaje a la velocidad original $= 300/x$ horas. Tiempo necesario para el viaje a la velocidad modificada $= 300/(x+10)$ horas.

$$\therefore \frac{300}{x} - \frac{300}{x+10} = 1.$$

Quitando denominadores y ordenando los términos, como en la forma canónica, tenemos

$$x^2 + 10x - 3000 = 0.$$

Factorizando, $$(x + 60)(x - 50) = 0,$$

de donde $x = -60, 50$.

El valor $x = 50$ satisface a la ecuación original y las condiciones del problema.

El valor $x = -60$ satisface a la ecuación original pero como no satisface las condiciones del problema es rechazado. Al resolver problemas por medio de ecuaciones cuadráticas, resulta que a veces ambos valores satisfacen las condiciones del problema y, por tanto, hay dos soluciones; en otros casos sólo uno de los valores es aceptable, como en el problema presente.

## EJERCICIOS. GRUPO 14

En cada uno de los ejercicios 1-24, resolver la ecuación dada por factorización, y si no es posible hacerlo, usando la fórmula. Comprobar las raíces por sustitución en la ecuación original.

1. $x^2 - 3x + 2 = 0$.
2. $x^2 - x - 12 = 0$.
3. $3y^2 + 2y - 1 = 0$.
4. $6z^2 + z - 2 = 0$.
5. $(x - 2)^2 + 2 = x$.
6. $2(x + 1)^2 - 4 = x(x + 3)$.
7. $(x - 3)(x + 2) = 6$.
8. $(y + 1)^2 - 3(y + 1) = 4$.
9. $\dfrac{x - 1}{x + 3} + \dfrac{x - 2}{x + 1} = 1$.
10. $\dfrac{3x - 5}{x + 1} = \dfrac{2(x + 4)}{2x - 3}$.
11. $x^2 - 2x - 1 = 0$.
12. $x^2 - 2x + 2 = 0$.
13. $9u^2 - 12u - 1 = 0$.
14. $4v^2 - 12v + 11 = 0$.
15. $2(x + 2)^2 - (x - 1)^2 = 2x + 7$.
16. $(x + 2)(x - 1) = x + 3$.
17. $(x - 5)(x + 1) = 2(x - 2)^2$.
18. $3(x + 1)^2 = (x + 4)^2 - 12$.
19. $z + \dfrac{10}{z} = 6$.
20. $9y - 12 + \dfrac{7}{y} = 0$
21. $abx^2 - (a^2 + b^2)x + ab = 0$.
22. $x^2 - 2ax + a^2 + b^2 = 0$.
23. $x^2 - 2bx + b^2 - a = 0$.
24. $4x^2 - 4ax + a^2 = b^2$.

25. En el Teorema 1 (Art. 5.4), demostrar que cada una de las raíces obtenidas satisface la ecuación original.

26. De la ecuación $x^2 = a^2$ obtenemos las ecuaciones $\pm x = \pm a$, que generalmente se escriben como $x = \pm a$. Demostrar que la solución es idéntica en los dos casos.

27. La longitud de un cuarto es 5 metros mayor que su ancho el área es 150 m². Hallar sus dimensiones.

28. $A$ y $B$ juntos hacen un trabajo en 1⅞ horas y $A$ puede hacerlo en 2 horas menos que $B$. Calcular los tiempos en que $A$ y $B$ pueden hacer el trabajo separadamente.

29. Un tanque puede vaciarse utilizando dos válvulas en 2 horas. ¿Cuánto tiempo se necesitará para vaciar el tanque con cada una de las válvulas por separado si una de ellas puede hacerlo en 3 horas menos que la otra?

30. Un cateto de un triángulo rectángulo es 17 cm mayor que el otro, y la hipotenusa mide 25 cm. Calcular las longitudes de los catetos.

31. Los miembros de un club van a pagar una cuenta de \$ 600 en partes iguales. Si hubiera habido 20 miembros más, el costo para cada miembro hubiera sido \$ 1 menos. Calcular el número de miembros del club.

32. Hallar dos números cuya suma sea 12 y cuyo producto sea 35.

33. En física se demuestra que la distancia $s$ (en metros) recorrida por un cuerpo en su caída libre en el vacío está dada por la fórmula $s = v_0t + \frac{1}{2}gt^2$ en donde $v_0$ es la velocidad inicial del cuerpo (en metros/seg.), $t$ es el tiempo de descenso (en seg.) y $g$ es la aceleración constante debida a la gravedad (en metros/seg.$^2$). Calcular el tiempo que necesita un cuerpo para descender 100 metros en el vacío si su velocidad inicial es 18 metros/seg. y $g$ es 9.8 metros/seg.$^2$

34. Despejar $t$ de la fórmula del ejercicio 33 y explicar por qué sólo puede admitirse en la solución uno de los signos del radical.

35. Las aristas de dos cubos difieren en 2 cm y sus volúmenes difieren en 218 cm$^3$. Calcular la arista de cada cubo.

## 5.5. PROPIEDADES DE LA ECUACION CUADRATICA

Si las raíces de la ecuación general de segundo grado

$$(1) \qquad ax^2 + bx + c = 0, \qquad a \neq 0,$$

se representan por $r_1$ y $r_2$, por el Teorema 1 (Art. 5.4) tenemos:

$$(2) \qquad r_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \qquad r_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Consideremos ahora la naturaleza de estas raíces cuando los coeficientes de (1) son reales, es decir, cuando $a$, $b$ y $c$ son números reales. Es evidente que las raíces dependen del signo de la expresión $b^2 - 4ac$ que aparece como subradical. Así, si $b^2 - 4ac > 0$, $r_1$ y $r_2$ son reales y diferentes; si $b^2 - 4ac = 0$, $r_1$ y $r_2$ son reales e iguales; y si $b^2 - 4ac < 0$, $r_1$ y $r_2$ son complejas y diferentes. En este último caso las dos raíces complejas difieren solamente en el signo del término imaginario, es decir, si una de las raíces es de la forma $m + ni$, entonces la otra raíz es de la forma $m - ni$, en donde $i = \sqrt{-1}$. Tales raíces reciben el nombre de *números complejos conjugados.*

La expresión $b^2 - 4ac$ se llama el *discriminante* de la ecuación cuadrática (1).

Resumimos los resultados anteriores en el siguiente teorema:

**Teorema 2.** *Si los coeficientes a, b y c de la ecuación cuadrática*

$$ax^2 + bx + c = 0, \qquad a \neq 0,$$

*son números reales y, en consecuencia, también es un número real el discriminante $D = b^2 - 4ac$ resulta: si $D > 0$, las raíces son reales y diferentes; si $D = 0$, las raíces son reales e iguales; y si $D < 0$, las raíces son números complejos conjugados.*

**Corolario.** *Si a, b y c son números racionales, las raíces serán racionales solamente si D es un cuadrado perfecto no negativo.*

NOTA. Si el discriminante $D$ no es negativo pero no es un cuadrado perfecto, las raíces son expresiones con radicales de la forma $m + \sqrt{n}$ y $m - \sqrt{n}$ que se llaman *binomios irracionales cuadráticos conjugados.*

**Ejemplo 1.** Determinar la naturaleza de las raíces de la ecuación

$$2x^2 + 5x - 3 = 0.$$

SOLUCION. El discriminante $b^2 - 4ac = 5^2 - 4(2)(-3) = 25 + 24 = 49 > 0$. Por tanto, por el Teorema 2, las raíces son reales y diferentes. El estudiante puede verificar esto fácilmente efectuando el cálculo completo de las raíces. Este ejemplo corresponde también al corolario del Teorema 2.

Ya que las raíces (2) de la ecuación cuadrática general (1) están expresadas en términos de los coeficientes, la suma y el producto de las raíces también pueden expresarse en términos de los coeficientes. Para la suma tenemos,

$$r_1 + r_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = -\frac{b}{a}.$$

y para el producto,

$$r_1 r_2 = \left(\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)\left(\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right) = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}.$$

Enunciamos estos resultados en el teorema siguiente:

**Teorema 3.** *En la ecuación general de segundo grado*

$$ax^2 + bx + c = 0, \qquad a \neq 0,$$

*la suma de las raíces es $-b/a$ y el producto es $c/a$.*

**Ejemplo 2.** Calcular el valor de $k$ en la ecuación $(k + 1)x^2 - (k + 8)x + 10 = 0$, para que la suma de las raíces sea $9/2$.

SOLUCION. Por el Teorema 3, la suma de las raíces es igual al coeficiente de $x$ cambiado de signo, entre el coeficiente de $x^2$. Por tanto,

$$\frac{k + 8}{k + 1} = \frac{9}{2}, \quad \therefore \quad 2k + 16 = 9k + 9 \text{ y } k = 1.$$

El estudiante debe comprobar el resultado efectuando el cálculo completo de las raíces.

**Ejemplo 3.** Hallar el valor de $k$ en la ecuación $(k-1)x^2 - 5x + 3k - 7 = 0$, para que una de las raíces sea el recíproco de la otra.

SOLUCION. Sea $r$ una raíz. Entonces la otra raíz será $1/r$ y su producto es 1. Pero el producto de las raíces es también $(3k-7)/(k-1)$. Por tanto, $(3k-7)/(k-1) = 1$, $\therefore 3k - 7 = k - 1$ y $k = 3$.

La comprobación de este resultado se deja como ejercicio.

Veamos ahora el siguiente teorema que es de gran importancia.

**Teorema 4.** *Si $r$ es una raíz de la ecuación cuadrática general*

$$ax^2 + bx + c = 0, \qquad a \neq 0,$$

*entonces $x - r$ es un factor del primer miembro y recíprocamente.*

DEMOSTRACION. Sea $f(x) = ax^2 + bx + c$.
Ya que $r$ es una raíz de $f(x) = 0$, podemos escribir

$$f(r) = ar^2 + br + c = 0.$$

Restando, tenemos:

$$f(x) - f(r) = ax^2 + bx + c - (ar^2 + br + c)$$

o sea,
$$f(x) - 0 = a(x^2 - r^2) + b(x - r).$$

de donde,
$$f(x) = (x - r)[a(x + r) + b],$$

que nos dice que $(x - r)$ es un factor de $f(x)$.

Recíprocamente, si $(x - r)$ es un factor de $f(x)$, podemos escribir

$$f(x) = (x - r)P(x),$$

en donde $P(x)$ es el otro factor.

Para $x = r$ esta última relación nos dice que $f(r) = 0$, por el Teorema 19 (Art. 2.15), lo cual significa que $r$ es una raíz de $f(x) = 0$, tal como se quería demostrar.

Ya que $r_1$ y $r_2$ dadas por (2) son las raíces de la ecuación cuadrática general (1), se concluye, por el teorema anterior, que $x - r_1$ y $x - r_2$ son factores de $ax^2 + bx + c$. Y como el producto de estos factores es

$$\begin{aligned}(x - r_1)(x - r_2) &= \left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)\left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)\\ &= \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{2a^2} = x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\\ &= x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = \frac{1}{a}(ax^2 + bx + c);\end{aligned}$$

podremos escribir la función cuadrática en forma factorizada así

$$ax^2 + bx + c = a(x - r_1)(x - r_2). \tag{3}$$

La relación (3) sugiere un método para factorizar cualquier trinomio general (Art. 2.9, tipo 4), que vamos a explicar en el ejemplo siguiente.

**Ejemplo 4.** Factorizar $6x^2 - 5x - 6$.

SOLUCION. Las raíces de $6x^2 - 5x - 6 = 0$ son

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 144}}{12} = \frac{5 \pm 13}{12} = \frac{3}{2}, -\frac{2}{3}.$$

Por tanto, los factores de $6x^2 - 5x - 6$ son

$$6\left(x - \frac{3}{2}\right)\left(x + \frac{2}{3}\right) = (2x - 3)(3x + 2).$$

La ecuación (3) es particularmente útil cuando se desea determinar si una expresión cuadrática dada es reducible en un campo de números particular (Art. 2.8). Ya que el campo queda determinado por la naturaleza de las raíces $r_1$ y $r_2$, todo lo que necesitamos hacer es calcular el discriminante (Teorema 2).

**Ejemplo 5.** Averiguar si la expresión cuadrática $x^2 - 2x + 2$ es o no reducible.

SOLUCION. El discriminante es $b^2 - 4ac = 4 - 4 \cdot 2 = -4$ de modo que los ceros de la expresión dada son números complejos conjugados. Por tanto, la expresión es irreducible en el campo de los números reales.

Ya hemos visto que la ecuación cuadrática tiene dos raíces. Ahora investigaremos la posibilidad de que existan más de dos raíces. Supongamos que la ecuación (1) tiene también la raíz $r$ diferente de $r_1$ y de $r_2$, dadas por (2). Sustituyendo $x$ por su valor $r$ en (3) tenemos

$$ar^2 + br + c = a(r - r_1)(r - r_2),$$

donde todos los factores del segundo miembro son diferentes de cero. Por el Teorema 19 (Art. 2.15),

$$ar^2 + br + c \neq 0,$$

es decir, $r$ no puede ser raíz de la ecuación (1). De aquí el siguiente teorema:

**Teorema 5.** *La ecuación cuadrática*

$$ax^2 + bx + c = 0, \qquad a \neq 0,$$

*tiene únicamente dos raíces $r_1$ y $r_2$ que están dadas por las fórmulas* (2).

Hasta aquí hemos resuelto el siguiente problema: Dada una ecuación de segundo grado, calcular sus raíces Ahora consideraremos el problema inverso: Dadas las raíces de una ecuación cuadrática, hallar la ecuación.

**Ejemplo 6.** Hallar la ecuación cuadrática cuyas raíces son $\frac{4}{3}$ y $\frac{3}{4}$.

SOLUCION. La ecuación puede expresarse primeramente en la forma

$$\left(x - \frac{4}{3}\right)\left(x - \frac{3}{4}\right) = 0.$$

Efectuando operaciones

$$x^2 - \frac{25}{12}x + 1 = 0.$$

Multiplicando por 12, para quitar denominadores, resulta

$$12x^2 - 25x + 12 = 0$$

que es la ecuación buscada.

Esta ecuación también puede obtenerse utilizando las fórmulas que dan la suma y el producto de las raíces.

### EJERCICIOS. GRUPO 15

En cada uno de los ejercicios 1-6 determinar la naturaleza, suma y producto de las raíces, sin resolver la ecuación dada.

1. $x^2 + x - 6 = 0.$
2. $x^2 + 4x + 4 = 0.$
3. $x^2 - 2x + 3 = 0.$
4. $(x + 1)^2 = x - 1.$
5. $x + \frac{1}{x} = 4.$
6. $\frac{x + 1}{x - 1} = \frac{3x - 1}{x + 1}.$

En cada uno de los ejercicios 7-12, determinar el valor o valores de $k$ para que la ecuación dada tenga raíces iguales.

7. $kx^2 + 8x + 4 = 0.$
8. $x^2 - 3kx + 9 = 0.$
9. $x^2 + kx + 8 = k.$
10. $x^2 + 3k + 1 = (k + 2)x.$
11. $(k + 4)x^2 - 1 = (2k + 2)x - k.$
12. $(k - 1)x^2 - 2kx + k^2 = 0.$

En cada uno de los ejercicios 13-18, hallar la ecuación que tenga las raíces indicadas.

13. 3, 4.
14. $\frac{5}{6}, -\frac{3}{2}.$
15. $\sqrt{2}, -\sqrt{2}.$
16. $1 + i, 1 - i.$
17. $1 + \sqrt{5}, 1 - \sqrt{5}.$
18. $2 + 3i, 2 - 3i.$

En cada uno de los ejercicios 19-22, estudiar la reducibilidad de la expresión cuadrática dada, y hallar los factores, sin restringir el campo de números usados.

19. $x^2 - 7x + 10.$
20. $x^2 + 4x + 1.$
21. $x^2 + 2x + 5.$
22. $2x^2 - 2x + 5.$

23. Si una raíz de la ecuación $x^2 + kx - 2 = 0$ es 1, calcular el valor de $k$ y la otra raíz.

24. Calcular el valor de $k$ para que la suma de las raíces de la ecuación $2kx^2 - (12k + 1)x + 12 = 0$ sea 7.

25. Hallar el valor de $k$ para que el producto de las raíces de la ecuación $(k - 2)x^2 - 5x + 2k = 0$ sea 6.

26. Calcular los valores de $k$ para que una raíz de la ecuación $(k^2 - 3)x^2 - 3(k - 1)x - 5k = 0$ sea $-2$.

27. Calcular el valor de $k$ para que una raíz de la ecuación $3x^2 + (k - 1)x - 12 = 0$ sea el negativo de la otra.

28. Hallar el valor de $k$ en la ecuación $(k + 2)x^2 + 10x + 3k = 0$ para que las dos raíces sean números recíprocos.

29. Si la diferencia de las raíces de la ecuación $x^2 - 3kx + 2k + 1 = 0$ es 4, ¿cuánto vale $k$?

30. Si una de las raíces de la ecuación $2x^2 - 4x + k^2 - 2k - 3 = 0$ es cero, ¿cuánto vale $k$?

31. Hallar los valores de $a$ y $b$ en la ecuación $x^2 + (2a + 3b - 1)x + a - b - 3 = 0$ si ambas raíces valen cero.

32. Calcular los valores de $k$ en la ecuación $2kx^2 + 3x + k = 0$ si una raíz es el doble de la otra.

33. Hallar el valor de $k$ en la ecuación $x^2 + (2k + 5)x + k = 0$ si una raíz excede a la otra en tres unidades.

34. Demostrar el Corolario del Teorema 2 (Art. 5.5).

35. Demostrar el Teorema 4 (Art. 5.5), por división directa de $ax^2 + bx + c$ entre $x - r$ mostrando que el residuo es idénticamente nulo.

36. Demostrar que una condición necesaria y suficiente para que una ecuación cuadrática tenga una raíz nula es que el término independiente sea cero.

37. Si una raíz de $ax^2 + bx + c = 0$ es el doble de la otra, demostrar que $2b^2 = 9ac$.

38. Si los coeficientes de $ax^2 + bx + c = 0$ son reales, $a$ y $b$ son ambos positivos y $c$ es negativo, demostrar que una raíz es positiva y la otra negativa.

39. Demostrar que si el número complejo $m + ni$ es una raíz de la ecuación general de segundo grado con coeficientes reales, el número complejo conjugado $m - ni$ también es una raíz.

40. Formar la ecuación cuadrática con coeficientes reales que tiene como una de sus raíces a $1 + 2i$ siendo $i = \sqrt{-1}$.

41. Demostrar que si el binomio irracional cuadrático $m + \sqrt{n}$ es una raíz de la ecuación general de segundo grado con coeficientes racionales, su conjugado $m - \sqrt{n}$ también es raíz.

42. Formar la ecuación cuadrática con coeficientes racionales que tiene como una de sus raíces a $1 + \sqrt{2}$.

43. Demostrar que si la ecuación $x^2 + bx + c = 0$, en donde $b$ y $c$ son enteros, tiene raíces racionales, estas raíces deben ser números enteros.

44. Demostrar que la suma de los recíprocos de las raíces de $ax^2 + bx + c = 0$ es igual a $-b/c$.

45. Demostrar que la suma de los cuadrados de las raíces de $ax^2 + bx + c = 0$ es igual a $b^2/a^2 - 2c/a$.

## 5.6. ECUACIONES DE FORMA CUADRATICA

Hasta ahora hemos considerado la ecuación cuadrática general

$$(1) \qquad ax^2 + bx + c = 0, \qquad a \neq 0,$$

donde la incógnita es directamente la variable $x$. Sin embargo, si la incógnita es una función de $x$, digamos $f(x)$, entonces (1) puede escribirse simbólicamente en la forma

$$(2) \qquad a[f(x)]^2 + b[f(x)] + c = 0, \qquad a \neq 0,$$

y una ecuación como (2) se llama de *forma cuadrática*. Es evidente que para que una ecuación sea de forma cuadrática se requiere que sólo aparezcan en ella $f(x)$ y su cuadrado. Por tanto, por medio de una sustitución adecuada, la ecuación (2) puede transformarse a la forma (1). Por ejemplo, la ecuación

$$x^4 - 7x^2 + 12 = 0,$$

que es una ecuación de cuarto grado, no es directamente una ecuación cuadrática pero es de forma cuadrática ya que, si hacemos $y = x^2$, resulta la ecuación

$$y^2 - 7y + 12 = 0.$$

Al resolver esta ecuación se obtienen dos valores de $y$, que podemos igualar, cada uno de ellos, a $x^2$, y de estas dos ecuaciones podemos obtener las cuatro raíces de la ecuación dada.

**Ejemplo 1.** Resolver la ecuación $x^4 - 7x^2 + 12 = 0$.

SOLUCION. Hagamos $y = x^2$. La ecuación dada toma la forma

$$y^2 - 7y + 12 = 0.$$

Factorizando $$(y - 4)(y - 3) = 0.$$

Por tanto, $y = 4$ y $y = 3$, de donde tenemos

$$x^2 = 4, \qquad x = \pm 2,$$
$$x^2 = 3, \qquad x = \pm\sqrt{3}.$$

Estas son las cuatro soluciones de la ecuación dada.

Esta ecuación también puede resolverse fácilmente por factorización.

**Ejemplo 2.** Resolver la ecuación: $\dfrac{3(x^2+1)}{x} + \dfrac{2x}{x^2+1} = 7.$

SOLUCION. Esta ecuación no es directamente de forma cuadrática, y si quitamos denominadores obtenemos una ecuación de cuarto grado que tampoco es de forma cuadrática. Sin embargo, podemos observar que la ecuación dada contiene expresiones recíprocas, en cuyo caso se transformará en una ecuación cuadrática utilizando una sustitución adecuada. En efecto, hagamos

$$y = \frac{x^2 + 1}{x}.$$

Entonces la ecuación dada se transforma en

$$3y + \frac{2}{y} = 7.$$

Multiplicando por $y$ $\qquad 3y^2 - 7y + 2 = 0.$

Factorizando $\qquad (y - 2)(3y - 1) = 0,$

de donde $\qquad y = 2, \tfrac{1}{3}.$

Para $\qquad y = 2, \quad \dfrac{x^2 + 1}{x} = 2,$

de donde $\qquad x^2 - 2x + 1 = 0,$

y $\qquad x = 1, 1.$

Para $\qquad y = \dfrac{1}{3}, \quad \dfrac{x^2 + 1}{x} = \dfrac{1}{3},$

de donde $\qquad 3x^2 - x + 3 = 0.$

Por la fórmula de la ecuación cuadrática

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 36}}{6} = \frac{1 \pm \sqrt{35\,i}}{6}.$$

Las raíces buscadas son 1, 1, $\dfrac{1 \pm \sqrt{35\,i}}{6}$.

Algunas ecuaciones que contienen raíces cuadradas pueden ser de forma cuadrática. En relación a esto es importante señalar un convenio establecido respecto a los signos de los radicales. Debe entenderse, como *un convenio de notación*, que si no hay signo escrito antes de una raíz cuadrada indicada, esto *significa siempre la raíz cuadrada positiva*. Si se desea la raíz cuadrada negativa, debe ponerse el signo menos delante del radical. Según esto, la raíz cuadrada positiva de una cantidad $x$ se escribe $\sqrt{x}$, la raíz cuadrada negativa se escribe $-\sqrt{x}$, y *ambas* raíces se escriben $\pm\sqrt{x}$.

**Ejemplo 3.** Resolver la ecuación $x^2 + 3x - \sqrt{x^2 + 3x - 1} - 7 = 0$.

SOLUCION. Para resolver esta ecuación debemos eliminar el radical. Un método consiste en transponer el radical al segundo miembro y luego elevar ambos miembros al cuadrado. Sin embargo, esto conduce a una ecuación de cuarto grado que no está en forma cuadrática. Además, la operación de elevar al cuadrado puede introducir raíces extrañas (Artículo 4.3).

También podemos proceder como sigue: Aunque no podemos alterar el subradical $x^2 + 3x - 1$, podemos escribir la ecuación dada así:

$$x^2 + 3x - 1 - \sqrt{x^2 + 3x - 1} - 6 = 0.$$

Sea $y = \sqrt{x^2 + 3x - 1}$, la raíz cuadrada *positiva*.

Entonces $y^2 - y - 6 = 0.$

Factorizando $(y - 3)(y + 2) = 0,$

de donde $y = 3, -2.$

De acuerdo con nuestra sustitución, $y$ sólo puede tener valores positivos. Por tanto $\sqrt{x^2 + 3x - 1} = 3.$

Elevando al cuadrado $x^2 + 3x - 1 = 9,$

de donde $x^2 + 3x - 10 = 0.$

Factorizando $(x - 2)(x + 5) = 0,$

de donde $x = 2, -5.$

Ya que estos dos valores satisfacen la ecuación *original,* son las soluciones buscadas.

Si, en contra de nuestra sustitución, igualamos el radical a $-2$, obtenemos dos soluciones extrañas.

## 5.7 ECUACIONES CON RADICALES

Una ecuación con uno o más radicales que contienen la incógnita se llama una *ecuación con radicales.* Sólo consideraremos aquí ecuaciones en las que entran raíces cuadradas y cuya resolución dependa de ecuaciones lineales o cuadráticas. Son ejemplos de tales ecuaciones

$$\sqrt{x + 6} + \sqrt{x - 2} - 4 = 0 \quad \text{y} \quad \sqrt{x^2 - 3x + 4} = 2.$$

Para resolver una ecuación con radicales debemos eliminar los radicales por racionalización. El procedimiento general es transformar la ecuación dada de modo que un radical aparezca sólo en un solo miembro de la ecuación. Al elevar al cuadrado ambos miembros se eliminará este radical. Este método, conocido como *aislamiento de un radical,* puede ser repetido para cada uno de los radicales restantes.

**Ejemplo 1.** Resolver la ecuación: $\sqrt{x + 6} + \sqrt{x - 2} - 4 = 0.$

SOLUCION. Primero aislaremos un radical, digamos $\sqrt{x-2}$, transponiéndolo al segundo miembro. Así tenemos:

$$\sqrt{x+6}-4=-\sqrt{x-2}.$$

Elevando al cuadrado $x+6-8\sqrt{x+6}+16=x-2$.

Aislando el radical y simplificando $-8\sqrt{x+6}=-24$.

Dividiendo entre $-8$ $\qquad \sqrt{x+6}=3$.

Elevando al cuadrado $\qquad x+6=9$,

de donde $\qquad x=3$.

Por sustitución directa encontramos que este valor de $x$ satisface a la ecuación original y, por tanto, es la solución.

NOTA. En uno de los pasos de la solución anterior hemos dividido ambos miembros de la ecuación entre $-8$. Algunos estudiantes omiten este paso; y, en consecuencia, en la siguiente elevación al cuadrado tienen que manejar números con un número de cifras innecesariamente grande. En este caso particular los números quedarían aumentados en un factor de 64 respecto a como se muestra en el ejemplo.

Ya que la resolución de ecuaciones con radicales requiere elevar al cuadrado, es muy importante comprobar, en la ecuación original, todas las soluciones obtenidas, para identificar las posibles raíces extrañas (Art. 4.3). Algunas ecuaciones con radicales no tienen solución, como puede verse en el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 2.** Resolver la ecuación $\sqrt{x-3}-\sqrt{2x+2}=2$.

SOLUCION. Transponiendo $\sqrt{x-3}-2=\sqrt{2x+2}$.
Elevando al cuadrado $x-3-4\sqrt{x-3}+4=2x+2$.

Aislando el radical y simplificando

$$-4\sqrt{x-3}=x+1.$$

Elevando al cuadrado $\qquad 16x-48=x^2+2x+1$.
Transponiendo $\qquad x^2-14x+49=0$.
Resolviendo $\qquad x=7, 7$.

Si sustituimos 7 en lugar de $x$ en la ecuación original, obtenemos

$$\sqrt{7-3}-\sqrt{14+2}=2-4\neq 2.$$

Por lo tanto, la ecuación dada no tiene solución.

## EJERCICIOS. GRUPO 16

En cada uno de los ejercicios 1-15 resolver la ecuación dada como ecuación de forma cuadrática.

1. $x^4 - 17x^2 + 16 = 0.$
2. $2x^4 + 17x^2 - 9 = 0.$
3. $x + x^{1/2} - 6 = 0.$
4. $x^{1/2} - 3x^{1/4} + 2 = 0.$
5. $2x^{1/2} + 2x^{-1/2} - 5 = 0.$
6. $x^{1/3} + 2x^{-1/3} - 3 = 0.$
7. $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + 4\left(x + \frac{1}{x}\right) = 12.$
8. $3\left(\frac{x-1}{x}\right)^2 - 4\left(\frac{x-1}{x}\right) = 4.$
9. $2\frac{x^2-2}{x} - \frac{x}{x^2-2} = 1.$
10. $x^2 - \frac{1}{a^2} = a^2 - \frac{1}{x^2}.$
11. $\sqrt{\frac{x+3}{x-3}} - 2\sqrt{\frac{x-3}{x+3}} = 1.$
12. $2x^2 - 2x + \sqrt{x^2 - x} = 3.$
13. $x^2 + 2x + \sqrt{x^2 + 2x + 10} - 20 = 0.$
14. $2x^2 + 2x - 3\sqrt{x^2 + x + 3} - 3 = 0.$
15. $\frac{1 + \sqrt{1 + x^2}}{x} + \frac{x}{1 + \sqrt{1 + x^2}} - 2\sqrt{2} = 0.$

En cada uno de los ejercicios 16-23, resolver la ecuación con radicales y comprobar si aparecen raíces extrañas.

16. $\sqrt{x+2} + \sqrt{x+7} = 5.$
17. $\sqrt{x+2} - \sqrt{x+7} = 5.$
18. $\sqrt{x^2 - 3x + 4} = 2.$
19. $\sqrt{x+2} + \sqrt{2x+5} = 5.$
20. $\sqrt{1 + \sqrt{3 + \sqrt{6x}}} = 2.$
21. $\sqrt{x - \sqrt{1-x}} + \sqrt{x} = 1.$
22. $\sqrt{2x-1} - \sqrt{3x+10} + \sqrt{x-1} = 0.$
23. $\sqrt{x+3} + \sqrt{2-x} - \sqrt{x+8} = 0.$

En cada uno de los ejercicios 24 y 25, racionalizar la ecuación dada, es decir, transformarla en una ecuación sin radicales.

24. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1.$
25. $\sqrt{(x-3)^2 + y^2} + \sqrt{(x+3)^2 + y^2} = 10.$

## 5.8. GRAFICA DE LA FUNCION CUADRATICA

La gráfica de la función cuadrática $ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, se obtiene igualando esta expresión a $y$ y calculando los valores reales correspondientes de $x$ y $y$ por medio de la ecuación

$$y = ax^2 + bx + c, \qquad a \neq 0.$$

Los pares de números obtenidos son las coordenadas de los puntos que, al trazar una curva continua que pase por ellos, nos dan la gráfica buscada (Art. 3.9). La gráfica tiene la forma representada en la figura 8 y recibe el nombre de *parábola*. En geometría analítica se demuestran diversas propiedades de la parábola. Por ejemplo, si $a > 0$ la curva se abre hacia arriba (Fig. 8 (a)) y si $a < 0$, la curva se abre hacia abajo (Fig. 8 (b)).

Además, la curva es simétrica respecto a una parábola al eje $OY$ que se llama el eje de la parábola. El punto $V$ de intersección del eje con la parábola es el vértice. Si $a > 0$, $V$ recibe el nombre de *punto mínimo* y su coordenada $y$ representa el *valor mínimo* que puede tomar la función cuadrática. Si $a < 0$, $V$ se llama *punto máximo* y su ordenada $y$ representa el *valor máximo* que puede alcanzar la función cuadrática. Todos estos resultados, que se demuestran en geometría analítica, pueden resumirse en el siguiente teorema:

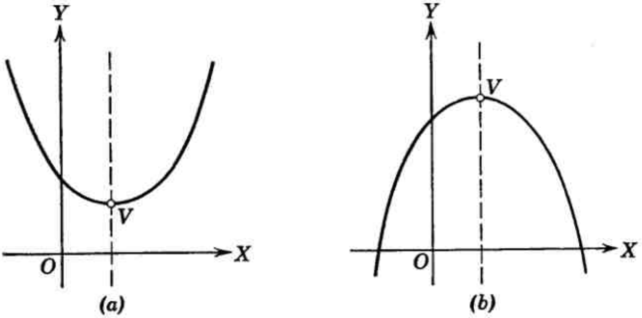


Fig. 8.

**Teorema 6.** *La función cuadrática*

$$(1) \qquad ax^2 + bx + c, \qquad a \neq 0,$$

*se representa gráficamente por medio de la parábola*

$$(2) \qquad y = ax^2 + bx + c,$$

*cuyo eje es paralelo (o coincidente con) al eje Y, y cuyo vértice es el punto* $(-b/2a, c - b^2/4a)$.

*Si* $a > 0$, *la parábola* (2) *se abre hacia arriba y su vértice es un punto mínimo, teniendo la función cuadrática* (1) *un valor mínimo igual a* $c - b^2/4a$ *para* $x = -b/2a$.

*Si* $a < 0$, *la parábola* (2) *se abre hacia abajo y su vértice es un punto máximo, teniendo la función cuadrática* (1) *un valor máximo igual a* $c - b^2/4a$ *para* $x = -b/2a$.

| $x$ | $y$ |
|---|---|
| 0 | —2 |
| 1 | —2 |
| 2 | 0 |
| 3 | 4 |
| —1 | 0 |
| —2 | 4 |

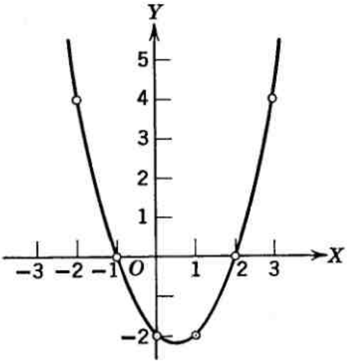


FIG. 9.

| $x$ | $y$ |
|---|---|
| 0 | 4 |
| 1 | 1 |
| 2 | 0 |
| 3 | 1 |
| 4 | 4 |
| 5 | 9 |
| —1 | 9 |

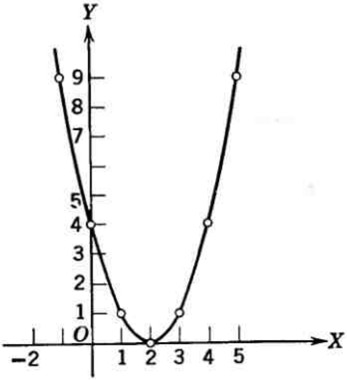


FIG. 10.

| $x$ | $y$ |
|---|---|
| 0 | 2 |
| 1 | 4 |
| 2 | 8 |
| —1 | 2 |
| —2 | 4 |
| —3 | 8 |

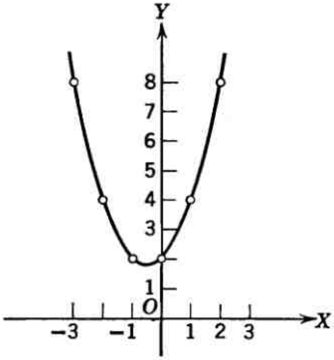


FIG. 11.

Los valores máximos y mínimos serán estudiados en el artículo siguiente. Ahora veremos algunos ejemplos de la interpretación geométrica de los ceros de una función cuadrática.

**Ejemplo.** Trazar la gráfica y determinar los ceros de cada una de las siguientes funciones:

(a) $x^2 - x - 2$. (b) $x^2 - 4x + 4$. (c) $x^2 + x + 2$.

SOLUCION. (a) Hagamos $y = x^2 - x - 2$ y calculemos las coordenadas de un número adecuado de puntos como se muestra en la tabla de la figura 9. La gráfica (Fig. 9), corta al eje $X$ en $x = -1$ y $x = 2$ siendo estos números los ceros de la función dada o *raíces* de la ecuación $x^2 - x - 2 = 0$. La gráfica muestra también que la función es positiva para todos los valores de $x$ menores que $-1$ y mayores que 2, y que es negativa para todos los valores de $x$ entre $-1$ y 2.

(b) Para $y = x^2 - 4x + 4$ obtenemos la tabla de valores y la gráfica dadas por la figura 10. En este caso la curva no corta al eje $X$ pero es tangente en el punto en que $x = 2$. Este punto de tangencia indica que aunque hay dos ceros, ambos son iguales a 2. En otras palabras, las raíces de $x^2 - 4x + 4 = 0$ son ambas iguales a 2. La función dada es positiva para todo valor real de $x$ excepto $x = 2$.

(c) De $y = x^2 + x + 2$ obtenemos la tabla de valores y la gráfica mostradas en la figura 11. En este caso la curva no corta ni es tangente al eje $X$. Por tanto, no hay ceros *reales*. Las raíces de $x^2 + x + 2 = 0$ son los números complejos conjugados $\dfrac{-1 \pm \sqrt{7}i}{2}$. Además, la gráfica muestra que la función dada es positiva para todo valor de $x$

## 5.9. MAXIMOS Y MINIMOS

Ahora consideraremos la determinación algebraica de los valores extremos (máximos y mínimos) de la función cuadrática $ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, en donde $a, b, c$ y $x$ son números reales.

Primeramente observaremos que el cuadrado de cualquier número real o es cero o es positivo. Por tanto, *el valor mínimo del cuadrado de una expresión real es cero.*

Transformemos la función cuadrática completando cuadros. Resulta:

$$y = ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c$$

$$= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) + c - \frac{b^2}{4a},$$

de donde

$$(1) \qquad y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a}.$$

Para una función cuadrática dada $a$, $b$ y $c$ son *constantes* y $x$ es la única variable. Por lo tanto, el valor de $y$ queda determinado por el valor asignado a $x$. Examinemos ahora la relación (1) para los dos casos siguientes: $a > 0$ y $a < 0$.

$a > 0$. En este caso $y$ no posee valor máximo (finito), ya que puede hacerse tan grande como se quiera asignando a $x$ un valor absoluto suficientemente grande. Pero si tiene un valor mínimo cuando

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0,$$

o sea, $x = -b/2a$. Este valor mínimo es $c - b^2/4a$.

$a < 0$. En este caso $y$ no tiene valor mínimo (finito), ya que puede hacerse tan pequeño como se quiera asignando a $x$ un valor absoluto suficientemente grande. Pero sí tiene un valor máximo cuando

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0,$$

o sea, para $x = -b/2a$. Este valor máximo es $c - b^2/4a$.

Estos resultados que concuerdan con el Teorema 6 (Art. 5.8), se resumen en el teorema siguiente:

**Teorema 7.** *La función cuadrática* $ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, *en donde* $a$, $b$ *y* $c$ *son constantes reales, tiene un valor máximo o mínimo igual a* $c - b^2/4a$ *cuando* $x = -b/2a$. *Este valor es un mínimo cuando* $a > 0$ *y es máximo cuando* $a < 0$.

La utilidad de este teorema está en el hecho de que puede ser usado para resolver cualquier problema de máximos y mínimos que dependa de una función cuadrática de una variable. El problema general de la determinación de máximos y mínimos para una función cualquiera pertenece al cálculo diferencial y no se considerará aquí.

**Ejemplo 1.** Calcular el valor máximo o mínimo de la función cuadrática $6 + x - x^2$. Comprobar el resultado gráficamente.

SOLUCION. Ya que el coeficiente de $x^2$ es negativo, la función tiene un máximo que puede obtenerse por sustitución directa en las fórmulas del Teorema 7. Así, para $a = -1$, $b = 1$, $c = 6$, el valor máximo es $c - \dfrac{b^2}{4a} = 6 - \dfrac{1}{-4} = \dfrac{25}{4}$ para $x = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{1}{-2} = \dfrac{1}{2}$. Sin embargo, en caso de que el estudiante olvide estas fórmulas, siempre puede recurrir, para obtener el resultado, a completar cuadrados como se hizo en la demostración del teorema 7.

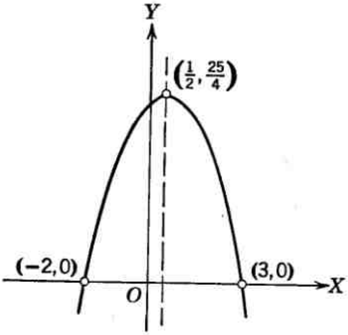


Fig. 12.

La gráfica de la función se muestra en la figura 12. En ella se indican el punto máximo y los ceros.

Consideremos ahora un problema típico de máximos y mínimos que depende de una función cuadrática.

**Ejemplo 2.** La suma de dos números es 8 ¿Cuáles son estos números si la suma de sus cuadrados debe ser mínimo?

SOLUCION. Sea $x$ uno de los números. Entonces $8 - x =$ segundo número.

El procedimiento general en problemas de este tipo consiste en expresar la cantidad que se desea que sea máxima o mínima como una función de una sola variable. Así, si $S$ representa la suma de los cuadrados de estos números, escribimos

$$S = x^2 + (8 - x)^2 = 2x^2 - 16x + 64.$$

Por el Teorema 7, $S$ tiene un valor mínimo cuando

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-16}{4} = 4.$$

Por tanto, los números buscados son 4 y 4.

Como se observó en el ejemplo 1, si el estudiante olvida las fórmulas del Teorema 7, siempre puede resolver el problema completando cuadrados.

Se deja como ejercicio la comprobación gráfica de este problema.

**EJERCICIOS. GRUPO 17**

En cada uno de los ejercicios 1-6 calcular el máximo o mínimo de la función dada, comprobando el resultado gráficamente.

1. $4x^2 + 16x + 19$.
2. $24x - 3x^2 - 47$.
3. $x^2 - 6x + 9$.
4. $4x - 2x^2 - 5$.
5. $3 + 2x - x^2$.
6. $3 + 2x + x^2$.

En cada uno de los ejercicios 7-12, calcular los valores de $x$ para los cuales la función dada es positiva, negativa, nula, máxima o mínima. Comprobar gráficamente los resultados.

7. $x^2 - 5x + 4$.
8. $3 - 5x - 2x^2$.
9. $x^2 - 2x + 1$.
10. $2x - x^2 - 1$.
11. $x^2 - x + 1$.
12. $x - x^2 - 2$.

13. En el mismo sistema de coordenadas representar gráficamente las tres funciones $x^2 - x - 6$, $x^2 - x - 1$, $x^2 - x + 4$, y observar el efecto producido por la variación del término constante.

En los ejercicios 14-20 resolver y comprobar gráficamente el resultado.

14. Dividir el número 12 en dos partes tales que su producto sea máximo.

15. Calcular el número que excede a su cuadrado en la mayor cantidad posible.

16. El perímetro de un rectángulo es 20 cm. Calcular sus dimensiones para que su área sea máxima.

17. La suma de las longitudes de los catetos de un triángulo rectángulo es constante e igual a 14 cm. Calcular las longitudes de los catetos para que el área del triángulo sea máxima.

18. Demostrar que entre todos los rectángulos que tienen un mismo perímetro, el que tiene mayor área es el cuadrado.

19. Un terreno rectangular, con uno de sus lados en la orilla de un río, va a ser cercado en sus otros tres lados utilizando 100 metros de cerca de alambre. Calcular las dimensiones del terreno para que su área sea máxima.

20. En mecánica se demuestra que el momento flexor, a una distancia de $x$ metros de uno de los soportes, para una viga simple de longitud $l$ metros con carga uniforme de $w$ kilogramos por metro, está dado por la fórmula $M = \frac{1}{2}wlx - \frac{1}{2}wx^2$. Demostrar que el momento flexor alcanza su valor máximo en el centro de la viga.

En cada uno de los ejercicios 21-23 $y = ax^2 + bx + c$ es una función cuadrática cuyos ceros son $r_1$ y $r_2$.

21. Si $r_1$ y $r_2$ son reales y diferentes, y $r_1 > r_2$, demostrar que $y$ tiene el mismo signo que $a$ cuando $x > r_1$ y $x < r_2$ y que tiene signo contrario a $a$ cuando $r_1 > x > r_2$.

22. Si $r_1$ y $r_2$ son reales e iguales, demostrar que $y$ tiene el mismo signo que $a$ cuando $x \neq r_1$.

23. Si $r_1$ y $r_2$ son números complejos conjugados, demostrar que $y$ tiene el mismo signo que $a$ para todo valor de $x$.

24. Hallar la expresión que representa al conjunto de funciones cuadráticas de $x$ con valor máximo igual a 4 cuando $x = -2$.

25. Hallar la expresión que representa al conjunto de funciones cuadráticas de $x$ con valor mínimo igual a 5 cuando $x = 3$.

## 5.10. LA ECUACION DE SEGUNDO GRADO CON DOS VARIABLES

La ecuación general de segundo grado con dos variables $x$ y $y$ se representa por

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0, \tag{1}$$

en donde los coeficientes $a$, $b$, $c$, $d$, $e$, y $f$ son constantes, con la restricción de que por lo menos uno de los tres coeficientes $a$, $b$ y $c$ sea diferente de cero.

Ya que la ecuación (1) es una relación entre las variables $x$ y $y$, tendrá, en general, una representación gráfica (Art. 3.9). En geometría analítica se demuestra que la gráfica de la ecuación (1), si es que existe en coordenadas reales, es una curva de las llamadas *secciones cónicas* o uno de sus casos límites que pueden ser un punto, una recta o un par de rectas.

El tipo de sección cónica representada por (1) depende de los coeficientes. Para poder obtener la gráfica y las propiedades de estas curvas con mayor facilidad, la ecuación se transforma a otras más simples. A continuación damos algunas de estas ecuaciones simplificadas, junto con sus gráficas.

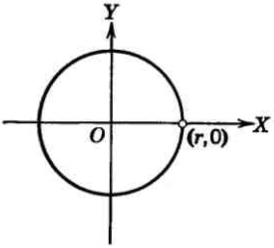


FIG. 13

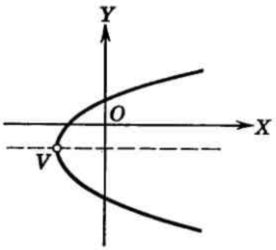


FIG. 14

## La circunferencia

La ecuación $x^2 + y^2 = r^2$ representa una *circunferencia* con centro en el origen y radio $r$ (Fig. 13).

## La parábola

La ecuación $x = ay^2 + by + c$, $a \neq 0$, representa una *parábola* (Figura 14) cuyo eje es horizontal y que se abre hacia la derecha si $a > 0$ y hacia la izquierda si $a < 0$. El punto $V$ es el vértice.

Ya hemos visto (Art. 5.8) que la ecuación $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, representa una parábola cuyo eje es vertical y que se abre hacia arriba si $a > 0$ y hacia abajo si $a < 0$.

## La elipse

La ecuación $ax^2 + by^2 = c$, en donde $a$, $b$ y $c$ son todos positivos, representa una *elipse* (Fig. 15). En el caso particular en que $a = b$ la ecuación representa una circunferencia.

### La hipérbola

La ecuación $ax^2 - by^2 = c$, en donde $a$ y $b$ son positivos y $c \neq 0$ representa una *hipérbola* (Fig. 16).

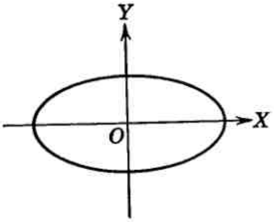


FIG. 15

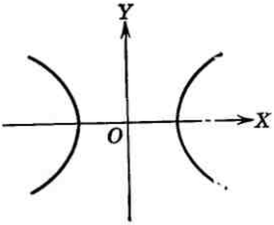


FIG. 16

Cada una de las cuatro curvas descritas puede obtenerse como intersección de un plano con un cono circular recto. Las ecuaciones cuadráticas con dos variables cuya forma difiere de los tipos mencionados tienen gráficas de aspecto semejante a las mencionadas pero en diferente posición respecto de los ejes de coordenadas.

## 5.11. SISTEMAS DE ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

Consideremos ahora un sistema de dos ecuaciones de segundo grado con dos variables, que es un problema análogo al ya estudiado de los sistemas de dos ecuaciones lineales con dos variables (Art. 4.7). Sea el sistema

$$(1) \qquad a_1x^2 + b_1xy + c_1y^2 + d_1x + e_1y + f_1 = 0,$$

$$(2) \qquad a_2x^2 + b_2xy + c_2y^2 + d_2x + e_2y + f_2 = 0,$$

en donde los coeficientes tienen las mismas condiciones que se especificaron para los de la ecuación (1) del Art. 5.10. Una solución de este sistema puede obtenerse eliminando una variable, digamos $y$, y luego despejando $x$. Así, podemos despejar $y$ de la ecuación (1) en términos de $x$, utilizando la fórmula de la ecuación cuadrática, y considerando a $x$ como parte de los coeficientes. Si luego sustituimos este valor de $y$ en la ecuación (2) y racionalizamos el resultado obtenemos, en general, una ecuación de cuarto grado en $x$ la cual, como se verá en un capítulo posterior, tiene cuatro soluciones.

Ya que hasta ahora no hemos estudiado la resolución general de ecuaciones de cuarto grado, lo que haremos en este capítulo será restringir nuestro estudio a ciertos sistemas de tipo especial cuya resolución completa puede efectuarse utilizando solamente ecuaciones lineales y cuadráticas.

## 5.12. SISTEMAS QUE COMPRENDEN UNA ECUACION LINEAL

Si una ecuación es de primer grado y la otra es cuadrática, la resolución del sistema puede efectuarse despejando una de las incógnitas en la ecuación lineal y sustituyendo el resultado en la ecuación cuadrática. Este es un método que se usa con frecuencia en matemáticas y que puede describirse como la *sustitución de una relación sencilla en otra más complicada.*

**Ejemplo.** Resolver el sistema

$$x - y = 2, \tag{1}$$

$$x^2 + y^2 = 4, \tag{2}$$

y comprobar gráficamente los resultados.

SOLUCION. De la ecuación (1), $y = x - 2$. Sustituyendo este valor de $y$ en (2) tenemos

$$x^2 + x^2 - 4x + 4 = 4,$$

de donde $$2x^2 - 4x = 0,$$

o sea, $$x(x - 2) = 0,$$

de modo que las raíces son $x = 0, 2$. Los valores correspondientes de $y$ se obtienen de (1). Así, para $x = 0$ resulta $y = -2$, y para $x = 2$ resulta $y = 0$. Vemos entonces que el sistema tiene dos soluciones que son: $x = 0$, $y = -2$ y $x = 2$, $y = 0$. Cada solución se comprueba sustituyendo en cada una de las ecuaciones dadas.

La gráfica de la ecuación (1) es una recta y la gráfica de la ecuación (2) es una circunferencia de radio 2 con centro en el origen. Estas gráficas se muestran en la figura 17. Una solución real de una ecuación con dos variables representa las coordenadas de un punto de la gráfica de la ecuación (Art. 3.9). Por tanto, una solución real *común* a las dos ecuaciones representa las coordenadas de un punto que está en ambas gráficas, es decir, representa las *coordenadas de su punto de intersección.*

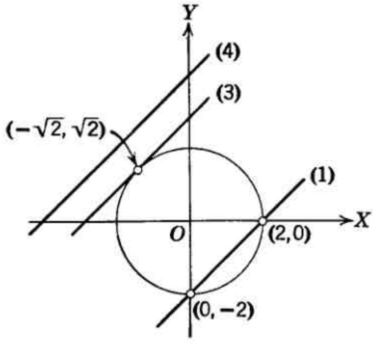


FIG. 17

Las soluciones comunes encontradas nos dan, por tanto, los puntos de intersección (0, —2) y (2, 0), como se muestra en la figura 17.

Consideremos ahora el caso en que no hay soluciones reales *distintas*. Supongamos el sistema formado por la ecuación (2) y la ecuación lineal

(3) $$x - y + 2\sqrt{2} = 0.$$

Por el mismo método anterior encontramos que el sistema tiene dos soluciones, ambas *iguales* a $x = -\sqrt{2}$, $y = \sqrt{2}$. Esto indica que sólo existe un punto de intersección de las gráficas (2) y (3), es decir, que el punto $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ es un *punto de tangencia* y que la recta (3) es *tangente* a la circunferencia (2) como se muestra en la figura 17.

Finalmente consideremos el sistema formado por la ecuación (2) y la ecuación lineal

(4) $$x - y + 4 = 0.$$

En este caso, las soluciones del sistema son $x = 2 + \sqrt{2}\,i$, $y = -2 + \sqrt{2}\,i$ y $x = 2 - \sqrt{2}\,i$, $y = -2 - \sqrt{2}\,i$. Estas soluciones son ambas complejas y, ya que sólo pueden representarse las coordenadas reales, esto significa que la recta (4) y la circunferencia (2) no se cortan, tal como se muestra en la figura 17.

Así hemos ilustrado el comportamiento algebraico y geométrico de un sistema que consta de una ecuación cuadrática y una lineal, ambas con dos variables.

NOTA. Al obtener las soluciones de un sistema de ecuaciones de segundo grado se debe tener cuidado de aparear los valores correctamente. Si se intercambian valores se pueden obtener soluciones incorrectas las cuales se identificarán sustituyendo en el sistema *original*.

## 5.13. SISTEMAS DE ECUACIONES DE LA FORMA $ax^2 + by^2 = c$

Si cada ecuación de un sistema es de la forma $ax^2 + by^2 = c$, entonces el sistema se resuelve primeramente como un sistema lineal en $x^2$ y $y^2$ (Art. 4.7). Los valores buscados de $x$ y $y$ se obtienen luego por una simple extracción de raíces cuadradas.

(1) $$x^2 + 4y^2 = 8,$$

(2) $$2x^2 - y^2 = 7,$$

y comprobar el resultado gráficamente.

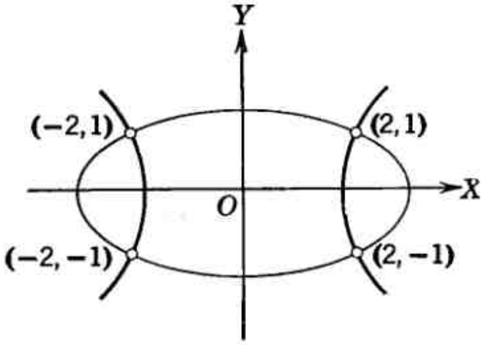


FIG. 18

SOLUCION. Primero resolveremos el sistema dado considerando que las incógnitas para $x^2$ y $y^2$. Así, multiplicando (2) por 4, tenemos

(3) $$8x^2 - 4y^2 = 28.$$

Sumando (1) y (3), $$9x^2 = 36,$$

de donde $$x^2 = 4 \quad \text{y} \quad x = \pm 2.$$

Sustituyendo este valor de $x^2$ en (2), tenemos $y^2 = 1$ y $y = \pm 1$.

El estudiante debe tener el cuidado de observar que aquí hay realmente *cuatro* soluciones en lugar de dos, ya que cada valor de $x$ puede ser apareado con ambos valores de $y$. Las cuatro soluciones se muestran en la siguiente tabla:

| $x$ | 2 | 2 | —2 | —2 |
|---|---|---|---|---|
| $y$ | 1 | —1 | 1 | —1 |

La interpretación gráfica de las soluciones aparece en la figura 18.

## EJERCICIOS. GRUPO 18

En cada uno de los ejercicios 1-10, resolver el sistema dado y comprobar gráficamente los resultados.

1. $2x - y = 6$, $y^2 = x$.
2. $x + y = 2$, $x^2 + y^2 = 4$.
3. $2x + y = 4$, $y^2 + 4x = 0$.
4. $3x - y - 8 = 0$, $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 8 = 0$.
5. $2x - 3y = 5$, $2x^2 + 3y^2 = 5$.
6. $x - y + 2 = 0$, $y^2 - 8x = 0$.
7. $x + y = 5$, $x^2 + y^2 = 9$.
8. $2x - y + 2 = 0$, $y^2 = 4x$.
9. $x - y = 0$, $2x^2 - xy + 2y^2 = 3$.
10. $x + y = 1$, $x^2 - 2xy + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$.

11. Encontrar los valores que debe tomar $k$ para que la recta $y = x + k$ sea tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 - 10x + 2y + 18 = 0$.

12. Calcular el valor que debe tomar $k$ para que la recta $x + y = k$ sea tangente a la parábola $y^2 = 8x$.

En cada uno de los ejercicios 13-20, resolver el sistema dado y comprobar gráficamente los resultados.

13. $x^2 + y^2 = 4$, $4y^2 - x^2 = 4$.
14. $x^2 - y^2 = 5$, $9x^2 + 16y^2 = 145$.
15. $4x^2 + 9y^2 = 36$, $9x^2 + 4y^2 = 36$.
16. $x^2 + 4y^2 = 16$, $x^2 + y^2 = 9$.
17. $x^2 + y^2 = 16$, $9x^2 + 16y^2 = 144$.
18. $x^2 + y^2 = 2$, $2y^2 - x^2 = 4$.
19. $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 - y^2 = 4$.
20. $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + y^2 = 4$.

21. Calcular dos números positivos tales que la suma de sus cuadrados sea 29 y la diferencia de sus cuadrados sea 21.

22. El perímetro de un rectángulo es 34 metros y la diagonal mide 13 metros. Calcular las dimensiones del rectángulo.

23. Hallar las dimensiones de un rectángulo si su perímetro es 80 m y su área es 375 m$^2$.

24. Calcular los valores de $k$, en términos de $m$ y $r$, para que la recta $y = mx + k$ sea tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 = r^2$.

25. Hallar el valor de $k$, en términos de $p$ y $m$, para que la recta $y = mx + k$ sea tangente a la parábola $y^2 = 4px$.

## 5.14. SISTEMAS DE ECUACIONES DE LA FORMA $ax^2 + bxy + cy^2 = d$

Si ambas ecuaciones carecen de los términos de primer grado, la solución puede obtenerse por cualquiera de los dos métodos que se explican en los ejemplos siguientes.

**Ejemplo.** Resolver el sistema

$$x^2 - xy + y^2 = 3, \tag{1}$$

$$x^2 + 2xy - y^2 = 1, \tag{2}$$

y comprobar gráficamente los resultados.

SOLUCION. *Método* 1. *Eliminación del término independiente.* Para eliminar el término independiente multiplicaremos la ecuación (2) por 3, obteniéndose

$$3x^2 + 6xy - 3y^2 = 3. \tag{3}$$

Restando miembro a miembro las ecuaciones (1) y (3) tenemos,

$$2x^2 + 7xy - 4y^2 = 0,$$

ecuación que, por no tener término independiente, puede factorizarse como sigue:

$$(2x - y)(x + 4y) = 0,$$

de donde obtenemos las dos ecuaciones lineales

$$2x - y = 0 \quad \therefore \quad y = 2x, \tag{4}$$

$$x + 4y = 0 \quad \therefore \quad y = -\frac{x}{4}. \tag{5}$$

Así hemos reducido el sistema dado a dos sistemas más sencillos, cada uno de los cuales comprende una ecuación lineal (Art. 5.12). Así, resolviendo el sistema formado por la ecuación (4) y cualquiera de las ecuaciones (1) o (2), obtenemos $x = \pm 1$ y, por tanto, los valores correspondientes de $y$ están dados por $y = 2x = \pm 2$. Análogamente resolviendo el sistema formado por la ecuación (5) y cualquiera de las ecuaciones (1) o (2), encontramos $x = \pm \frac{4}{7}\sqrt{7}$. Los valores correspondientes de $y$ están dados por $y = -\dfrac{x}{4} = \mp\dfrac{\sqrt{7}}{7}$. En consecuencia, las cuatro soluciones buscadas son $(1, 2)$, $(-1, -2)$, $\left(\dfrac{4}{7}\sqrt{7}, -\dfrac{\sqrt{7}}{7}\right)$, $\left(-\dfrac{4}{7}\sqrt{7}, \dfrac{\sqrt{7}}{7}\right)$.

Estas soluciones se muestran en la figura 19 en donde la elipse es la gráfica de (1) y la hipérbola es la gráfica de (2).

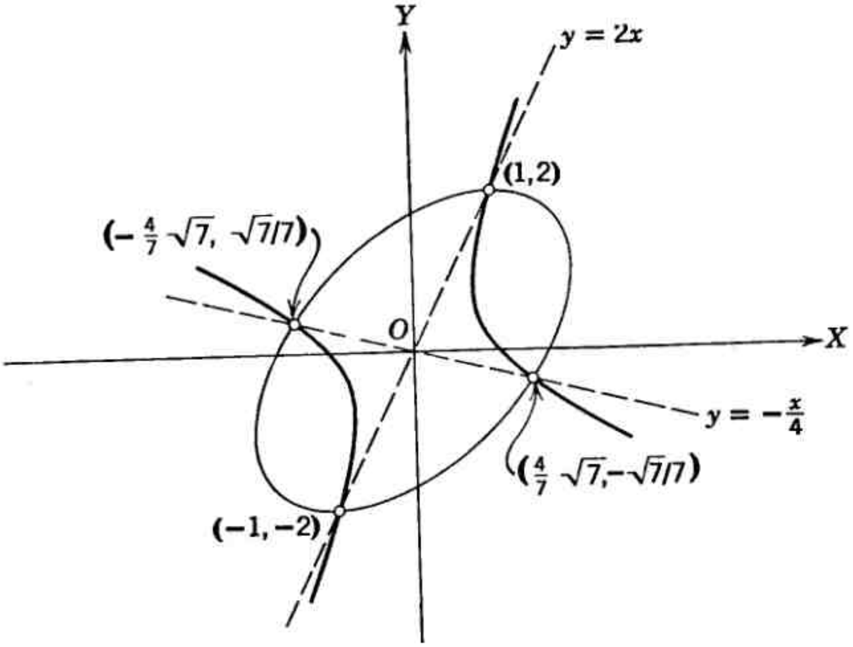

Y
$y = 2x$
$(1,2)$
$(-\frac{4}{7}\sqrt{7}, \sqrt{7}/7)$
$O$
$X$
$y = -\frac{x}{4}$
$(\frac{4}{7}\sqrt{7}, -\sqrt{7}/7)$
$(-1,-2)$

FIG. 19

*Método* 2. *Uso de la sustitución* $y = vx$. Si efectuamos la sustitución $y = vx$ en las ecuaciones (1) y (2), obtenemos, respectivamente

$$x^2 - vx^2 + v^2x^2 = 3 \quad \therefore \quad x^2 = \frac{3}{1 - v + v^2}, \tag{6}$$

$$x^2 + 2vx^2 - v^2x^2 = 1 \quad \therefore \quad x^2 = \frac{1}{1 + 2v - v^2}. \tag{7}$$

Igualando estos valores de $x^2$, resulta

$$\frac{3}{1 - v + v^2} = \frac{1}{1 + 2v - v^2},$$

de donde $\qquad 3 + 6v - 3v^2 = 1 - v + v^2,$

o sea, $\qquad 4v^2 - 7v - 2 = 0$

cuyas soluciones son $v = 2$ y $v = -\frac{1}{4}$.

Si sustituimos $v = 2$ en cualquiera de las relaciones (6) o (7) obtenemos $x^2 = 1$ de donde $x = \pm 1$, y los valores correspondientes de $y$ quedan dados por $y = vx = 2x = \pm 2$. Análogamente si sustituimos $v = -\frac{1}{4}$ en cualquiera de las relaciones (6) o (7), encontramos $x^2 = \frac{16}{7}$ de donde $x = \pm \frac{4}{7}\sqrt{7}$, y los valores correspondientes de $y$ quedan dados por

$$y = vx = -\frac{x}{4} = \mp \frac{\sqrt{7}}{7}.$$

Estos resultados concuerdan con los obtenidos por el primer método.

El significado geométrico de la sustitución $y = vx$ se da en la figura 19 por medio de las rectas de trazos cuyas ecuaciones son $y = 2x$ y $y = -\frac{x}{4}$.

NOTA. Si cualquiera de las ecuaciones del sistema tiene su término independiente igual a cero, esa ecuación puede factorizarse inmediatamente como hemos explicado en el primer método.

## 5.15. OTROS SISTEMAS

Existen otros sistemas de ecuaciones cuyas soluciones pueden obtenerse utilizando una ecuación cuadrática. Algunos de estos sistemas son los que damos en este artículo.

Una ecuación con dos variables $x$ y $y$ se llama *simétrica* con respecto a estas variables si la ecuación no se altera al intercambiar $x$ con $y$. Ejemplos de tales ecuaciones son $x + y = 3$ y $x^2 + xy + y^2 = 7$. Un sistema de dos ecuaciones, ambas simétricas con respecto a $x$ y $y$, puede resolverse por medio de una sustitución, tal como se muestra en el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 1.** Resolver el sistema

$$x^2 + y^2 - x - y = 2, \tag{1}$$

$$xy + x + y = 5. \tag{2}$$

SOLUCION. Si en las ecuaciones (1) y (2) hacemos las sustituciones $x = u + v$ y $y = u - v$ obtenemos, respectivamente,

$$\begin{aligned} (u + v)^2 + (u - v)^2 - (u + v) - (u - v) &= 2, \\ (u = v)(u - v) + (u + v) + (u - v) &= 5. \end{aligned}$$

Después de simplificar, resulta

$$u^2 + v^2 - u = 1, \tag{3}$$

$$u^2 - v^2 + 2u = 5. \tag{4}$$

Sumando, se elimina $v^2$, y obtenemos

$$2u^2 + u - 6 = 0,$$

cuyas soluciones son $u = -2,\ 3/2$.

Sustituyendo $u = -2$ en cualquiera de las ecuaciones (3) o (4) obtenemos $v = \pm\sqrt{5}\,i$, y para $u = 3/2$ obtenemos $v = \pm 1/2$. Las cuatro soluciones se muestran en la siguiente tabla:

| $u$ | $-2$ | $-2$ | $3/2$ | $3/2$ |
|---|---|---|---|---|
| $v$ | $\sqrt{5}i$ | $-\sqrt{5}i$ | $1/2$ | $-1/2$ |
| $x = u + v$ | $-2 + \sqrt{5}i$ | $-2 - \sqrt{5}i$ | 2 | 1 |
| $y = u - v$ | $-2 - \sqrt{5}i$ | $-2 + \sqrt{5}i$ | 1 | 2 |

También podemos obtener la solución de algunos sistemas en los que alguna de las ecuaciones es de grado mayor que dos.

**Ejemplo 2.** Resolver el sistema

$$x^3 + y^3 = 9, \tag{5}$$

$$x^2 - xy + y^2 = 3. \tag{6}$$

SOLUCION. Observemos que en este sistema la ecuación (5) es divisible entre la (6). Dividiendo miembro a miembro resulta:

$$x + y = 3. \tag{7}$$

Como en el Art. 5.12, podemos obtener la solución resolviendo el sistema de ecuaciones (5) y (7) o el sistema de ecuaciones (6) y (7). Se deja como ejercicio comprobar que en ambos casos las soluciones son (1, 2) y (2, 1).

A veces es posible resolver un sistema efectuando transformaciones adecuadas.

**Ejemplo 3.** Resolver el sistema

$$x^2 + y^2 = 13, \tag{8}$$

$$xy = -6. \tag{9}$$

SOLUCION. Este sistema puede resolverse por los métodos del Art. 5.14 y también por el explicado en el ejemplo 1 sobre sistemas simétricos. Ahora consideremos otro método.

Si multiplicamos la ecuación (9) por 2 y agregamos y restamos el resultado a la ecuación (8), obtenemos las ecuaciones

$$\begin{aligned} x^2 + 2xy + y^2 &= 1, \\ x^2 - 2xy + y^2 &= 25. \end{aligned}$$

Extrayendo raíz cuadrada a ambos miembros, tenemos

$$\begin{aligned} x + y &= \pm 1, \\ x - y &= \pm 5. \end{aligned}$$

Utilizando todas las posibles combinaciones de signos obtenemos cuatro sistemas de ecuaciones lineales de los que se obtiene

$$\begin{aligned} 2x &= 6,\ -6,\ -4,\ 4 \quad \therefore \quad x = 3,\ -3,\ -2,\ 2, \\ 2y &= -4,\ 4,\ 6,\ -6 \quad \therefore \quad y = -2,\ 2,\ 3,\ -3. \end{aligned}$$

De donde las soluciones son $(3, -2)$, $(-3, 2)$, $(-2, 3)$, $(2, -3)$.

## EJERCICIOS. GRUPO 19

En cada uno de los ejercicios 1-6 resolver el sistema dado por uno de los métodos del Art. 5.14 y comprobar los resultados gráficamente.

1. $x^2 + y^2 = 5,\quad xy = 2.$

2. $x^2 - y^2 = 8,\quad xy = 3.$

3. $x^2 + y^2 = 8,\quad x^2 - xy + 2y^2 = 16.$

4. $xy + 4y^2 = 8,\quad x^2 + 3xy = 28.$

5. $y^2 - x^2 = 16,\quad 2y^2 - 4xy + 3x^2 = 17.$

6. $x^2 + xy + y^2 = 7,\quad x^2 - xy - y^2 = 11.$

7. En relación al método 1 del ejemplo del Art. 5.14, explicar por qué los resultados son los mismos al considerar los sistemas formados por cada una de las ecuaciones lineales (4) y (5) con cualquiera de las ecuaciones dadas (1) o (2).

8. En relación con el método 2 del ejemplo del Art. 5.14, explicar por qué los resultados son los mismos al sustituir los valores de $v$ en *cualquiera* de las ecuaciones (6) o (7).

9. Resolver el ejemplo 2 por el método del ejemplo 1 del Art. 5.15.

10. Resolver el ejemplo 3 del Art. 5.15 por los métodos del Art. 5.14.

11. Resolver el ejemplo 3 del Art. 5.15 por el método del ejemplo 1 del Art. 5.15.

12. Resolver el ejercicio 1 por el método del ejemplo 1 del Art. 5.15.

13. Resolver el ejercicio 1 por el método del ejemplo 3 del Art. 5.15.

En cada uno de los ejercicios 14-17, resolver el sistema dado por el método del ejemplo 1 del Art. 5.15 y comprobar los resultados.

14. $x^2 + y^2 + 2x + 2y = 23,\quad xy = 6.$

15. $x^2 + y^2 + xy = 7,\quad x^2 + y^2 - xy = 3.$

16. $x^2 + y^2 - 2x - 2y = 14,\quad xy + x + y + 5 = 0.$

17. $x^4 + y^4 = 17,\quad x + y = 1.$

18. Resolver el ejercicio 15 por los métodos del Art. 5.14.

En cada uno de los ejercicios 19-27 resolver el sistema dado por cualquier método adecuado y comprobar los resultados.

19. $x^2 + y^2 = 25,\quad xy = -12.$

20. $x^3 + y^3 = 28,\quad x + y = 4.$

21. $x^3 - y^3 = 56,\quad x^2 + xy + y^2 = 28.$

22. $x^3 + y^3 = 126,\quad x^2 - xy + y^2 = 21.$

23. $2y^2 - xy - x^2 = 44,\quad xy + 3y^2 = 80.$

24. $x^3 + y^3 = 9xy,\quad x + y = 6.$

25. $x^2 + y^2 = 40x^2y^2,\quad x + y = 8xy.$

26. $x^2 + x = 6y,\quad x^3 + 1 = 9y.$

27. $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 8 = 0,\quad 3x^2 + 3y^2 + 12x - 16y - 10 = 0.$

28. Hallar dos números positivos cuya suma aumentada de su producto dé 34, y cuya suma de cuadrados disminuida de su suma dé 42.

29. Hallar dos números positivos cuya suma es igual a su producto y cuya suma aumentada en la suma de sus cuadrados es igual a 12.

30. *A* y *B* corren en una carrera de 1 Km, ganando *B* por 1 minuto. Luego repiten la competencia, aumentando *A* su velocidad en 2 Km por hora y disminuyendo *B* su velocidad en la misma cantidad; de este modo *A* gana por 1 minuto. calcular la velocidad de cada uno en la primera competencia.

# 6

# Desigualdades e inecuaciones

## 6.1. INTRODUCCION

Hasta ahora hemos estudiado el concepto de desigualdad en relación con la sustracción y la introducción de los números negativos (Art. 2.4). Sin embargo, no hemos tenido ocasión de examinar las propiedades de las desigualdades. El estudio formal de esas propiedades corresponde a este capítulo.

El tema de las desigualdades es de gran importancia, según veremos en muchas partes del álgebra, y también observaremos ciertas analogías entre igualdades y desigualdades.

Al concepto de mayor y menor entre dos números corresponde el de *ordenación. La relación de orden queda restringida a los números reales* y se puede interpretar geométricamente en un sistema coordenado unidimensional (Art. 3.7). En otras palabras, *todo nuestro estudio con desigualdades se limitará a los números reales.* No tiene sentido decir que un número complejo es mayor o menor que otro.

Aunque ya hemos dado algunas definiciones de términos y símbolos asociados con las desigualdades, las vamos a repetir, por comodidad, en los siguientes artículos.

## 6.2. DEFINICIONES Y TEOREMAS FUNDAMENTALES

Hemos definido una ecuación como una igualdad entre dos expresiones (Art. 4.2). Si dos expresiones son desiguales, tenemos una *desigualdad,* diciéndose que una de las expresiones es mayor o menor que la otra.

El número real $x$ se dice que es *mayor* que el número real $y$ siempre que $x - y$ sea un número positivo. Entonces escribimos $x > y$ que se lee "$x$ es mayor que $y$". Así, $2 > -3$, pues $2 - (-3) = 5$ es un número positivo.

Se sigue de esta definición que el número real $y$ es *menor* que el número real $x$ siempre que $y - x$ sea un número negativo. Entonces escribimos $y < x$ que se lee "$y$ es menor que $x$". Así, $5 < 7$, pues $5 - 7 = -2$ que es un número negativo.

El estudiante debe observar que, para ambos símbolos de desigualdad, la cantidad mayor queda siempre en el lado hacia el cual se abre el símbolo, mientras que el vértice apunta hacia la cantidad menor. También vamos a introducir otros dos símbolos útiles: $a \geq b$, que se lee "$a$ es mayor o igual que $b$", y $c \leq d$ que se lee "$c$ es menor o igual que $d$". En particular, la desigualdad $a \geq 0$ es un modo conveniente de afirmar que $a$ representa a todo número no negativo.

Se dice que dos desigualdades tienen el *mismo sentido* si sus símbolos apuntan en la misma dirección; en caso contrario tienen *sentidos opuestos*. Por ejemplo las desigualdades $a > b$ y $c > d$ tienen el mismo sentido, pero las desigualdades $a > b$ y $c < d$ tienen sentidos opuestos.

Anteriormente hemos observado que existen dos tipos de ecuaciones: ecuaciones idénticas o identidades y ecuaciones condicionales o simplemente ecuaciones (Art. 4.2). Análogamente, hay dos tipos de desigualdades, *desigualdades absolutas* y *desigualdades condicionales* o *inecuaciones.*

Una *desigualdad absoluta* o *incondicional* es aquella que tiene el mismo sentido para todos los valores de las variables para los que están definidos sus miembros. Son ejemplos de desigualdades absolutas $5 > -7$ y $x^2 + 1 > 0$.

Una *desigualdad condicional* o *inecuación* es aquella que tiene el mismo sentido solo para ciertos valores de las variables, tomados entre los valores para los que sus miembros están definidos. Son ejemplos de desigualdades condicionales o inecuaciones

$$x - 2 < 3, \text{ válida solo si } x < 5;$$
$$x^2 > 4, \text{ válida solo si } x > 2 \text{ ó si } x < -2.$$

Las desigualdades absolutas y condicionales se tratarán en artículos subsecuentes. Ahora estableceremos algunas de las propiedades fundamentales de las desigualdades en general.

**Teorema 1.** *El sentido de una desigualdad no se altera si se suma o se resta a ambos miembros la misma cantidad, es decir, si* $a > b$, *entonces* $a \pm c > b \pm c$.

DEMOSTRACION. Por la definición de $a > b$, tenemos

$$a - b = p, \text{ un número positivo}$$

de donde

$$a + c - (b + c) = p,$$

de lo cual, por la definición de "mayor que"

$$a + c > b + c.$$

Análogamente se puede demostrar que

$$a - c > b - c.$$

**Corolario 1.** *Cualquier término puede transponerse de un miembro a otro de una desigualdad con tal que se le cambie su signo.*

Por el Corolario 1 podemos transponer todos los términos de una desigualdad a un sólo miembro. Como consecuencia tenemos:

**Corolario 2.** *Toda desigualdad puede reducirse a una de las formas* $A > 0$ *o* $A < 0$, *en donde* $A$ *es una expresión algebraica.*

La importancia de este Corolario 2 está en que, según el Teorema 6 (Art. 2.4), *la resolución de una inecuación siempre puede reducirse a la determinación del signo (y no la magnitud) de una expresión.*

**Teorema 2.** *El sentido de una desigualdad no se altera si ambos miembros se multiplican por, o se dividen entre, la misma cantidad positiva. Es decir, si* $a > b$ y $c > 0$, *entonces* $ac > bc$ y $a/c > b/c$.

DEMOSTRACION. De $a > b$, tenemos

$$a - b = p, \text{ un número positivo.}$$

Multiplicando ambos miembros por $c$, tenemos

$$ac - bc = pc, \text{ un número positivo}$$

de donde

$$ac > bc.$$

Análogamente, puede demostrarse que

$$\frac{a}{c} > \frac{b}{c}.$$

Con una demostración similar a la del Teorema 2, se establece el siguiente teorema:

**Teorema 3.** *El sentido de una desigualdad se invierte si ambos miembros se multiplican por, o se dividen entre, la misma cantidad negativa. Esto es, si* $a > b$ *y* $c < 0$, *entonces* $ac < bc$ *y* $a/c < b/c$.

**Teorema 4.** *Si se suman miembro a miembro dos desigualdades del mismo sentido, las sumas serán desigualdades del mismo sentido, esto es si* $a > b$ *y* $c > d$*, entonces* $a + c > b + d$.

DEMOSTRACION. De $a > b$, $a - b = p$, un número positivo.
De $c > d$, $c - d = q$, un número positivo.
Sumando, $a + c - (b + d) = p + q$, un número positivo.
Luego, $a + c > b + d$.

**Corolario.** Si $a_1 > b_1, a_2 > b_2, a_3 > b_3, \ldots, a_n > b_n,$ entonces $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n > b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_n.$

**Teorema 5.** *Si de tres cantidades, la primera es mayor que la segunda y la segunda mayor que la tercera, entonces la primera es mayor que la tercera, es decir, si* $a > b$ *y* $b > c$*, entonces* $a > c$.

La demostración de este teorema es análoga a la del Teorema 4 y se deja como ejercicio.

**Teorema 6.** *Si dos desigualdades entre números positivos tienen el mismo sentido, se pueden multiplicar miembro a miembro y los productos serán desigualdades en el mismo sentido. Es decir, si* $a$, $b$, $c$ *y* $d$ *son todos positivos y* $a > b$ *y* $c > d$*, entonces* $ac > bd$.

DEMOSTRACION. Si $c > 0$ y $a > b$, del Teorema 2 resulta:

$$ac > bc. \tag{1}$$

Análogamente, ya que $b > 0$ y $c > d$,

$$bc > bd. \tag{2}$$

De (1), (2) y el Teorema 5, tenemos

$$ac > bd.$$

**Corolario 1.** *Si* $a_1, a_2, \ldots, b_1, b_2, \ldots$ *son cantidades positivas y* $a_1 > b_1, a_2 > b_2, a_3 > b_3, \ldots, a_n > b_n,$ *entonces*

$$a_1a_2a_3 \ldots a_n > b_1b_2b_3 \ldots b_n.$$

**Corolario 2.** *Si* $a$ *y* $b$ *son ambos positivos,* $a > b$*, y* $n$ *es un número entero y positivo, entonces* $a^n > b^n$.

**Corolario 3.** *Si* $a$ *y* $b$ *son ambos positivos,* $a > b$*, y* $n$ *es un número entero y positivo, entonces* $a^{1/n} > b^{1/n}$ *(raíces principales).*

**Corolario 4.** *Si* $a$ *y* $b$ *son ambos positivos,* $a > b$*, y* $n$ *es un número entero y positivo, entonces* $a^{-n} < b^{-n}$.

**EJERCICIOS. GRUPO 20**

1. Completar la demostración del Teorema 1 (Art. 6.2) demostrando que si $a > b$, también es $a - c > b - c$.
2. Demostrar el Corolario 1 del Teorema 1 (Art. 6.2).
3. Demostrar el Corolario 2 del Teorema 1 (Art. 6.2).
4. Completar la demostración del Teorema 2 (Art. 6.2) demostrando que si $a > b$ y $c > 0$, entonces $a/c > b/c$.
5. Demostrar el Teorema 3 (Art. 6.2).
6. Demostrar el Corolario del Teorema 4 (Art. 6.2).
7. Comprobar por medio de ejemplos que si $a$, $b$, $c$ y $d$ son todos positivos y $a > b$ y $c > d$, no necesariamente se sigue que $a - c > b - d$.
8. Demostrar el Teorema 5 (Art. 6.2).
9. Si $a > b$, $b > c$ y $c > d$, demostrar que $a > d$.
10. Si $a > bc$, $c > d$ y $b > 0$, demostrar que $a > bd$.
11. Si $a < b$ y $b < c$, demostrar que $a < c$.
12. Demostrar el Corolario 1 del Teorema 6 (Art. 6.2).
13. Demostrar el Corolario 2 del Teorema 6 (Art. 6.2).
14. Demostrar el Corolario 3 del Teorema 6 (Art. 6.2).
15. Demostrar el Corolario 4 del Teorema 6 (Art. 6.2).
16. Comprobar por medio de ejemplos que el resultado de Teorema 6 no es necesariamente válido si $a$, $b$, $c$ y $d$ no son todos positivos.
17. Comprobar por medio de ejemplos que si $a$, $b$, $c$ y $d$ son todos positivos y $a > b$ y $c > d$, no necesariamente se sigue que $a/c > b/d$.
18. Si cada una de dos cantidades es mayor que la unidad, demostrar que su producto es mayor que la unidad.
19. Utilizando el resultado del ejercicio 18, demostrar el Teorema 6 (Art. 6.2).
20. Si $a$ y $b$ son positivos y $a > b$, del Corolario 2 del Teorema 6 (Art. 6.2) se sigue que $a^2 > b^2$. Enunciar y demostrar el recíproco de este teorema.

## 6.3. DESIGUALDADES ABSOLUTAS

Como ya hemos indicado, una desigualdad absoluta es análoga a una identidad. Su validez se establece por medio de una demostración analítica, utilizando uno o varios de los principios fundamentales estudiados en el Art. 6.2.

Para la demostración directa de una desigualdad absoluta se parte de alguna desigualdad conocida y luego se procede por pasos lógicos hasta llegar a la desigualdad deseada. Sin embargo, a veces no resulta fácil averiguar la desigualdad que debe tomarse como punto de partida. Entonces, generalmente, es posible hacer un *análisis* de la desigualdad que se quiere demostrar transformándola hasta obtener una relación más sencilla. En este caso la *demostración* directa equivale a tomar en orden inverso los pasos del análisis. Este procedimiento se muestra en el ejemplo siguiente:

**Ejemplo 1.** Si $a$ y $b$ son números positivos desiguales, demostrar que

$$a^3 + b^3 > a^2b + ab^2.$$

SOLUCION. Ya que no resulta fácil averiguar de que desigualdad podemos partir, transformaremos la desigualdad dada.

ANALISIS. Primeramente factorizaremos el segundo miembro y escribiremos

$$a^3 + b^3 > ab(a + b).$$

Ya que $a$ y $b$ son ambos positivos, $a + b$ será positivo y, por el Teorema 2 (Art. 6.2), podremos dividir ambos miembros entre $a + b$ sin alterar el sentido de la desigualdad. Esto es

$$a^2 - ab + b^2 > ab.$$

Transponiendo $ab$ al primer miembro (Corolario 1, Teorema 1, Artículo 6.2), tenemos

$$a^2 - 2ab + b^2 > 0,$$

o sea,

$$(a - b)^2 > 0.$$

Sabemos que esta última relación es siempre verdadera, pues $a \neq b$, de donde $a - b \neq 0$ y $(a - b)^2 > 0$. Por tanto, para la demostración que buscamos partiremos de esta última desigualdad.

DEMOSTRACION.

$$(a - b)^2 > 0,$$

de donde

$$a^2 - 2ab + b^2 > 0.$$

Trasponiendo $-ab$ al segundo miembro (Corolario 1, Teorema 1, Artículo 6.2), tenemos

$$a^2 - ab + b^2 > ab.$$

Multiplicando ambos lados por $a + b$ (Teorema 2, Art. 6.2), obtenemos el resultado deseado

$$a^3 + b^3 > a^2b + ab^2.$$

Sin embargo, para algunas desigualdades absolutas el método de análisis no conduce fácilmente a una desigualdad conocida. En tales casos habrá que hacer tanteos para ver si algunas desigualdades conocidas pueden conducir al resultado deseado. Veamos un ejemplo.

**Ejemplo 2.** Si $a$ y $b$ son dos números positivos desiguales, demostrar que

$$a^2 + b^2 + 1 > ab + a + b.$$

SOLUCION. En este caso, un análisis de la desigualdad no sugiere una determinada relación conocida. Sin embargo, las tres expresiones $(a - b)^2$,

$(a-1)^2$, y $(b-1)^2$ contienen a todos los términos de la desigualdad. Además, ya que $a \neq b$, $(a-b)^2$ es positivo. Por otra parte, aunque $a$ o $b$ pueden ser igual a 1, no pueden serlo al mismo tiempo, pues $a \neq b$. Luego, por lo menos una de las expresiones $(a-1)^2$ y $(b-1)^2$ debe ser siempre positiva, siendo ambas siempre no negativas. Así, está justificado tomar la suma de estas tres expresiones como positivas, es decir:

$$(a-b)^2 + (a-1)^2 + (b-1)^2 > 0,$$

esperando que esta relación pueda conducir al resultado deseado. Haciendo operaciones, tenemos

$$a^2 - 2ab + b^2 + a^2 - 2a + 1 + b^2 - 2b + 1 > 0.$$

Reduciendo términos, $2a^2 + 2b^2 + 2 - 2ab - 2a - 2b > 0$.
Dividiendo entre 2 (Teorema 2, Art. 6.2), $a^2 + b^2 + 1 - ab - a - b > 0$.
Transponiendo (Corolario 1, Teorema 1, Art. 6.2), $a^2 + b^2 + 1 > ab + a + b$, como se quería demostrar.

## EJERCICIOS. GRUPO 21

1. Demostrar que la suma de cualquier número positivo (excepto la unidad) con su recíproco, es mayor que 2.

2. Si $a$ y $b$ son dos números positivos desiguales, demostrar que

$$\frac{a+b}{2} > \frac{2ab}{a+b}.$$

3. Si $a$ y $b$ son positivos y $a > b$, demostrar que $\sqrt{a} > \sqrt{b}$ por un método independiente del Corolario 3 del Teorema 6 (Art. 6.2).

4. Si $a$ y $b$ son números positivos desiguales, demostrar que $a/b^2 + b/a^2 > 1/a + 1/b$.

5. Si $a$ y $b$ son números positivos desiguales, demostrar que $a + b < a^2/b + b^2/a$.

6. Si $a$ y $b$ son números positivos desiguales, demostrar que $a + b > 2\sqrt{ab}$.

7. Si $a$ y $b$ son números positivos y $a > b$, demostrar que $\dfrac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} > \dfrac{a-b}{a+b}$.

8. Si $a$, $b$ y $c$ son números positivos, demostrar que $(a + b + c)^2 > a^2 + b^2 + c^2$.

9. Si $a$, $b$ y $c$ son números positivos desiguales, demostrar que $a^2 + b^2 + c^2 > ab + ac + bc$.

10. Si $a$, $b$ y $c$ son números positivos desiguales, demostrar que $(a + b + c)^2 < 3(a^2 + b^2 + c^2)$.

11. Si $a$, $b$ y $c$ son números positivos desiguales, demostrar que

$$(a+b)(b+c)(c+a) > 8abc.$$

12. Si $a$ y $b$ son números positivos desiguales, demostrar que $(a^3 + b^3)(a + \mathrm{b}) > (a^2 + b^2)^2$.

13. Si $a$ y $b$ son números desiguales, demostrar que $a^4 + b^4 > a^3b + ab^3$.

14. Si $a$ y $b$ son números desiguales, demostrar que $(a^4 + b^4)(a^2 + b^2) > (a^3 + b^3)^2$.

15. Si $a$, $b$ y $c$ son números positivos desiguales, demostrar que

$$ab(a + b) + bc(b + c) + ca(c + a) > 6abc.$$

16. Si $a$ y $b$ son números positivos y $a > b$, demostrar que $a^4 - b^4 < 4a^4 - 4a^3b$.

17. Determinar los valores de $a$ para los cuales $a^3 + 1 > a^2 + a$.

18. Si $a$ y $b$ son números positivos, determinar cuál de las dos siguientes expresiones es la mayor $\frac{a + 2b}{a + 3b}$ o $\frac{a + b}{a + 2b}$.

19. Si $a$, $b$, $c$ y $d$ son números positivos desiguales, y si $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$, demostrar que $\frac{a}{b} > \frac{a + c}{b + d} > \frac{c}{d}$.

20. Si $a$, $b$, $x$ y $y$ son números positivos desiguales tales que $a^2 + b^2 = 1$ y $x^2 + y^2 = 1$, demostrar que $ax + by < 1$.

21. Si $a$, $b$, $c$, $x$, $y$ y $z$ son números positivos desiguales tales que $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ y $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, demostrar que $ax + by + cz < 1$.

22. Si $a$, $b$ y $c$ son números positivos desiguales, demostrar que $2(a^3 + b^3 + c^3) > a^2b + b^2a + b^2c + c^2b + c^2a + a^2c$. *Sugerencia*: Use el resultado del Ejemplo 1 (Art. 6.3).

23. Si $a$, $b$ y $c$ son números positivos desiguales, demostrar que $(a + b - c)^2 + (b + c - a)^2 + (c + a - b)^2 > ab + bc + ca$. *Sugerencia:* Use el resultado del ejercicio 9.

24. Si $a$, $b$, $c$, $x$, $y$ y $z$ son números positivos desiguales, demostrar que

$$(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) > (ax + by + cz)^2.$$

25. Si $a$, $b$ y $c$ son números positivos desiguales, demostrar que $a^3 + b^3 + c^3 > 3abc$. *Sugerencia*: Use el resultado del Ejercicio 9.

## 6.4. INECUACIONES DE PRIMER GRADO O LINEALES

En este capítulo consideraremos solamente inecuaciones con una sola variable, digamos $x$. Entonces el problema consiste en determinar el dominio de valores de la variable $x$ para los cuales es válida la desigualdad; este dominio recibe el nombre de *solución* de la inecuación. Si la variable $x$ entra solamente en forma de primera potencia, la inecuación se llama de *primer grado* o *lineal*. La resolución de una inecuación lineal es muy sencilla y análoga a la resolución de una ecuación lineal con una incógnita (Art. 4.4).

**Ejemplo.** Resolver la inecuación lineal $x + 1 > 3x + 5$, y comprobar el resultado gráficamente.

SOLUCION. Debemos encontrar los valores de $x$ para los cuales

$$x + 1 > 3x + 5. \tag{1}$$

Como en las ecuaciones lineales, transponemos todos los términos en $x$ a uno de los miembros y todos los términos conocidos al otro miembro. Así obtenemos

$$-2x > 4.$$

Dividiendo entre $-2$ resulta $\quad x < -2. \quad$ (Teorema 3, Art. 6.2).

Esta es la solución buscada, la cual afirma que la desigualdad (1) es válida para todos los valores de $x$ menores que $-2$.

Para establecer la representación gráfica de este resultado, transponemos todos los términos de (1) al primer miembro, obteniéndose la desigualdad equivalente

$$(2) \qquad -2x - 4 > 0.$$

Aquí tenemos el primer ejemplo del significado del Corolario 2 del Teorema 1 (Art. 6.2). La desigualdad (2) nos dice que para todo valor de $x$ menor que $-2$ la función lineal $-2x - 4$ es positiva. La gráfica de esta función lineal es la recta (Art. 3.9) representada en la figura 20. Allí vemos que el cero de la función es $-2$ y que para todo valor de $x$ menor que $-2$ le corresponden puntos de la recta situados encima del eje $X$.

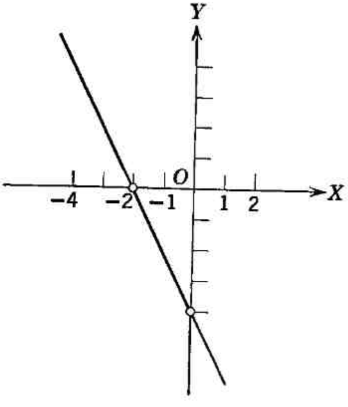


FIG. 20

## 6.5. INECUACIONES DE SEGUNDO GRADO O CUADRATICAS

En el Capítulo 5 consideramos la resolución de la ecuación cuadrática con una incógnita, o sea, la determinación de los ceros de una función cuadrática. Entendemos por resolución de una inecuación de segundo grado con una variable, digamos $x$, la determinación de aquellos valores de $x$ para los cuales es válida la desigualdad, es decir, aquellos valores de $x$ para los cuales la función cuadrática *no* es igual a cero sino positiva o negativa según lo requiera la desigualdad.

Ya hemos visto que, cuando es posible, una ecuación cuadrática se resuelve por factorización. Análogamente, para resolver una inecuación cuadrática, factorizaremos, si es posible, la función cuadrática y determinaremos sus ceros, los cuales, aunque no son soluciones de la desigualdad, son sin embargo los *valores críticos* de la solución, como se explica a continuación.

Consideremos primero la función lineal en una variable, $x - r$, en donde la constante $r$ es el cero de la función. Si asignamos a $x$ un valor ligeramente mayor que $r$, la función será positiva; si asignamos a $x$ un valor ligeramente menor que $r$, la función será negativa. En otras palabras, para valores de $x$ anteriores y posteriores a $r$ el signo de la función cambia. Por esta razón $r$ es apropiadamente llamado el *valor crítico* de la función $x - r$. Análogamente, de los dos factores lineales de una función cuadrática, podremos disponer de sus dos valores críticos.

El primer paso en la resolución de una inecuación cuadrática es transponer, si es necesario, todos los términos a un solo miembro de la desigualdad, produciéndose una relación del tipo

$$(1) \qquad ax^2 + bx + c > 0.$$

La ventaja de esto es que ahora no nos interesa la magnitud del primer miembro de (1) sino sólo su signo (Corolario 2, Teorema 1, Art. 6.2). Factorizando este primer miembro (fórmula (3), Art. 5.5), tenemos

$$(2) \qquad a(x - r_1)(x - r_2) > 0,$$

en donde $r_1$ y $r_2$ son los valores críticos.

Supongamos primero que $x$ es mayor que $r_1$, haciendo el factor $x - r_1$ positivo. Si este mismo valor de $x$ también hace positivo al otro factor $x - r_2$ entonces su producto (incluyendo a $a > 0$) será positivo, y la desigualdad (2) se cumplirá, siendo correcta nuestra hipótesis y resultando $x > r_1$ como solución de la desigualdad (1). Sin embargo, si este valor de $x$ hace que $x - r_2$ sea negativo, el producto será negativo, la desigualdad no se cumplirá y nuestra hipótesis será falsa, siendo la solución de la desigualdad $x < r_1$. Fácilmente se comprueba que se obtienen los mismos resultados si se supone inicialmente que $x$ es *menor* que $r_1$. Se razona de una manera análoga para el otro valor crítico $r_2$. Las dos desigualdades resultantes forman la solución de la inecuación (1). Veamos la aplicación de este procedimiento a un ejemplo particular.

**Ejemplo 1.** Resolver la inecuación

$$3x^2 - 2x - 2 < 2x^2 - 3x + 4,$$

y comprobar el resultado gráficamente.

SOLUCION. Primero transponemos todos los términos a un solo miembro, digamos el primero, y obtenemos la desigualdad equivalente

$$x^2 + x - 6 < 0.$$

Factorizando tenemos

$$(x-2)(x+3) < 0,$$

y los valores críticos son 2 y $-3$.

Primeramente supongamos que $x > 2$. Entonces para valores de $x$ ligeramente mayores que 2, ambos factores son positivos y su producto es positivo, que es un resultado contrario a la condición de la desigualdad. Por lo tanto, nuestra hipótesis de que $x > 2$ es falsa; siendo la solución correcta $x < 2$. Nótese que si inicialmente hubiéramos supuesto que $x < 2$, entonces para valores de $x$ ligeramente menores que 2, el primer factor sería negativo y el segundo positivo, siendo su producto negativo, con lo cual la desigualdad se cumpliría.

Análogamente, supongamos que $x > -3$. Entonces, para valores de $x$ ligeramente mayores que $-3$, el primer factor es negativo y el segundo positivo, siendo su producto negativo, con lo cual la desigualdad se satisface y la solución es $x > -3$.

En consecuencia, la solución completa es $x < 2$, $x > -3$, es decir, la desigualdad dada se cumple para todos los valores de $x$ menores que 2 pero mayores que $-3$. Esta solución puede escribirse en la forma $2 > x > -3$, que representa a todos los valores de $x$ entre $-3$ y 2. Estos valores están representados gráficamente en un sistema coordenado unidimensional (Art. 3.7) en la figura 21. La gráfica de la función cuadrática $x^2 + x - 6$ se muestra en la figura 22 de acuerdo con lo dicho en el Art. 5.8. En esta gráfica se observa que los ceros de la función con $x = 2, -3$; también se observa que la curva está por encima del eje $X$ para $x > 2$ y $< -3$, y por debajo del eje $X$ para valores de $x$ entre $-3$ y 2.

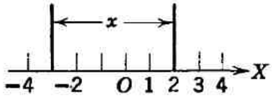


FIG. 21

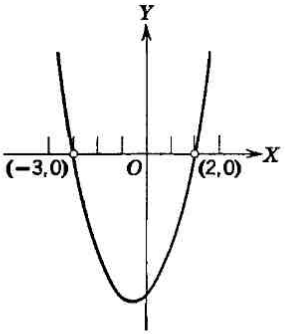


FIG. 22

Este método para resolver una inecuación utilizando sus valores críticos puede emplearse para cualquier expresión algebraica que sea factorizable en factores lineales reales, como se muestra en el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 2.** Resolver la inecuación

$$(x+1)(x-2)(x-3) > 0.$$

SOLUCION. Los valores críticos son $-1$, 2 y 3. Como en el ejemplo 1, probamos cada uno de ellos suponiendo valores de $x$ *ligeramente mayores* que el valor crítico. Así obtenemos los signos correspondientes a todos los factores, el signo del producto y la solución resultante, como se indica en la siguiente tabla.

| Hipótesis | Signos de los factores | Producto | Solución |
|---|---|---|---|
| $x > -1$ | $+ \quad - \quad -$ | $> 0$ | $x > -1$ |
| $x > 2$ | $+ \quad + \quad -$ | $< 0$ | $x < 2$ |
| $x > 3$ | $+ \quad + \quad +$ | $> 0$ | $x > 3$ |

Por lo tanto la solución completa puede escribirse en la forma

$$-1 < x < 2, \qquad x > 3.$$

Estos valores se muestran gráficamente en la figura 23.

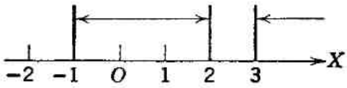


FIG. 23

NOTA 1. La solución también puede obtenerse fácilmente llevando en una gráfica los valores críticos, como en la figura 23, y luego probando el signo de la desigualdad dada para valores de $x$ en cada uno de los intervalos $x < -1$, $-1 < x < 2$, $2 < x < 3$, $x > 3$. Se recomienda que el estudiante obtenga la solución por este método y que también lo aplique al ejemplo 1.

Ahora consideraremos el caso de una inecuación de segundo grado que no puede factorizarse en factores lineales reales. Aunque de ordinario limitamos las factorizaciones al campo de los números racionales (Artículo 2.8), aquí incluiremos a los números irracionales porque son números reales. Por ejemplo, es fácil ver que la solución de la inecuación $x^2 - 5 > 0$ está dada por las desigualdades $x > \sqrt{5}$, $x < -\sqrt{5}$. Por tanto, nos limitaremos ahora a la consideración de funciones cuadráticas que son irreducibles en el campo de los números reales.

Supongamos que la función cuadrática $ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ tiene su discriminante $b^2 - 4ac < 0$, lo que significa que la función es irreducible en el campo de los números reales (Teorema 2, Art. 5.5). Completando el cuadrado en $x$, obtenemos (relación (1) Art. 5.9)

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a}$$

o sea

(3) $$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$$

En el segundo miembro de (3), $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ es no negativo para todo valor de $x$.

Además, ya que $b^2 - 4ac < 0$, se sigue que $4ac - b^2 > 0$, y, por tanto, $\frac{4ac - b^2}{4a}$ tiene el mismo signo que $a$. En consecuencia, para todo valor de $x$, el segundo miembro de (3) es positivo si $a > 0$ y es negativo si $a < 0$. Resumimos estos resultados en el teorema siguiente:

**Teorema 7.** *Si la función cuadrática*

$$ax^2 + bx + c, \qquad a \neq 0$$

*tiene su discriminante $b^2 - 4ac$ negativo, la función positiva para todo valor de $x$ si $a > 0$ y es negativa si $a < 0$.*

NOTA 2. Este teorema es muy útil siempre que uno o más factores en una inecuación sean funciones cuadráticas irreducibles. Cada uno de dichos factores puede ser suprimido sin ningún cambio en el resto, excepto en el caso de que se trate de una función negativa pues entonces hay que invertir el sentido de la desigualdad.

**Ejemplo 3.** Resolver las inecuaciones

(a) $$x^2 + 2x + 5 > 0,$$

(b) $$2x - x^2 - 2 < 0,$$

y comprobar los resultados gráficamente.

SOLUCION. Ya que ambas funciones tienen discriminantes negativos, se concluye, de acuerdo con el Teorema 7, que la función (a) es positiva para todo valor de $x$, por tener $a > 0$; y la función (b) es negativa para todo valor de $x$ ya que $a < 0$. También podemos ver esto complementando los cuadrados. Así tenemos

$$x^2 + 2x + 5 = (x + 1)^2 + 4 > 0 \text{ para todo valor de } x.$$

$$2x - x^2 - 2 = -(x^2 - 2x + 1) - 1 = -(x - 1)^2 - 1 < 0$$

para todo valor de $x$.

Por tanto, ambas desigualdades se cumplen para todo valor de $x$. Si los símbolos de desigualdad estuvieran invertidos ninguna de las dos desigualdades tendría solución. Las gráficas de estas dos funciones están dadas en la figura 24.

Finalmente, consideraremos un tipo de inecuación que, aunque no es cuadrática, puede resolverse utilizando valores críticos.

**Ejemplo 4.** Resolver la inecuación

$$\frac{3}{x+2} > \frac{1}{x-1}.$$

SOLUCION. Si el símbolo de desigualdad se reemplazara por el de igualdad, tendríamos una ecuación con fracciones cuyas soluciones se encontrarían multiplicando ambos miembros por el menor denominador común $(x+2)(x-1)$. El estudiante puede sentirse inclinado a proceder de la misma manera con esta inecuación, pero si lo hace, encontrará dificultades. Esto es debido a que si no conocemos el *signo* de un multiplicador variable, entonces no podemos decir si el *sentido* de la desigualdad se conserva o se altera (Teorema 3, Art. 6.2). Por tanto, nunca debemos multiplicar por, o dividir entre, un factor variable ambos miembros de una desigualdad, a menos que dicho factor conserve el *mismo signo* en todo el dominio en que está definido (Teorema 7).

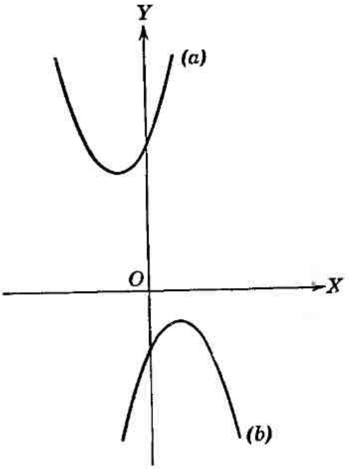


FIG. 24

Como es usual, nuestro primer paso consistirá en transponer todos los términos a un solo miembro de la desigualdad, o sea

$$\frac{3}{x+2} - \frac{1}{x-1} > 0.$$

El siguiente paso *no* será multiplicar por el menor denominador común sino sumar ambas fracciones usando su menor denominador común. Esto nos da

$$\frac{2x-5}{(x+2)(x-1)} > 0.$$

Los valores críticos son $5/2$, $-2$ y 1. Para cada valor crítico, supondremos que $x$ toma valores ligeramente mayores o menores que ese valor, y entonces observaremos cómo afectan estos valores en los signos del numerador y denominador obteniendo el signo de la fracción. Los resultados se muestran a continuación en forma de tabla.

| Hipótesis | Signos del numerador y del denominador | Signo de la fracción | Solución |
|---|---|---|---|
| $x > 5/2$ | $\dfrac{+}{+\qquad +}$ | $> 0$ | $x > 5/2$ |
| $x > -2$ | $\dfrac{-}{+\qquad -}$ | $> 0$ | $x > -2$ |
| $x > 1$ | $\dfrac{-}{+\qquad +}$ | $< 0$ | $x < 1$ |

Por tanto, la solución completa es $x > 5/2$, $-2 < x < 1$.

Se recomienda que el estudiante represente gráficamente estos resultados, y que además resuelva esta inecuación por el método descrito en la nota 1 del ejemplo 2.

## EJERCICIOS. GRUPO 22

En cada uno de los ejercicios 1-6, resolver la inecuación lineal dada y comprobar el resultado gráficamente.

1. $x - 5 > 3 - x$.
2. $x + 4 < 3$.
3. $2x + 1 < 3x - 1$.
4. $4x + 10 > 4 - 2x$.
5. $x - 2/3 > 2x + 4/3$.
6. $x + 1/2 < 2 + \dfrac{x}{4}$.

En cada uno de los ejercicios 7-10, determinar los valores de $x$ para los cuales la función cuadrática dada es positiva, negativa y nula y comprobar los resultados gráficamente.

7. $2 + x - x^2$.
8. $x^2 - 6x + 8$.
9. $x^2 + 4x + 6$.
10. $4x - x^2 - 5$.

En cada uno de los ejercicios 11-20, resolver la inecuación dada y comprobar gráficamente el resultado.

11. $x^2 - x - 6 > 0$.
12. $x^2 + 5x + 4 < 0$.
13. $5x^2 + 8x - 3 > x^2 - 3x$.
14. $2x^2 + 5x - 1 < 2x + 1$.
15. $x^2 + 12x + 60 > 10 - 2x$.
16. $12x + x^2 - 30 > 2x^2 + 7$.
17. $2x^2 - 4x - 3 < 3x^2 + 2$.
18. $x^2 - 6x + 25 < 11$.
19. $x^2 + 8x - 11 < 2x^2 + 5$.
20. $x^2 - 8x + 8 > 4 - 4x$.

En cada uno de los ejercicios 21-24, determinar los valores de $x$ para los cuales el radical dado representa números reales.

21. $\sqrt{x - 7}$.
22. $\sqrt{x^2 + 16}$.
23. $\sqrt{x^2 - 16}$.
24. $\sqrt{x^2 + x - 12}$.

En cada uno de los ejercicios 25 y 26, determinar los valores de $k$ para los cuales las raíces de la ecuación cuadrática dada son reales y diferentes.

25. $4x^2 - kx + 1 = 0$.
26. $kx^2 + 2kx - 5 = 0$.

En cada uno de los ejercicios 27 y 28, determinar los valores de $k$ para los cuales las raíces de la ecuación cuadrática dada son complejas.

27. $x^2 + kx - k = 0.$
28. $(k + 1)x^2 - 2kx + 1 = 0.$

En cada uno de los ejercicios 29 y 30, determinar los valores de $k$ para los cuales el sistema dado tiene dos soluciones reales y diferentes.

29. $x - 2y + k = 0$, $x^2 + y^2 = 5.$
30. $x + 2y + k = 0$, $y^2 - 2x + 6y + 9 = 0.$

En cada uno de los ejercicios 31-50, resolver la inecuación dada.

31. $x(x + 2)(x - 1) > 0.$
32. $(x + 1)(2x - 1)(x + 3) < 0.$
33. $x^3 - 2x^2 - x + 2 < 0.$
34. $x^3 + x^2 - 4x - 4 > 0.$
35. $(x + 2)(x - 1)(x - 4) < 0.$
36. $(x + 2)(x - 1)^2(x - 4) < 0.$
37. $(x^2 + x + 1)(x - 1) > 0.$
38. $(x^2 + 2x + 4)(x^2 - x - 2) < 0.$
39. $(x^2 + 2x - 3)(3x - 4 - x^2) > 0.$
40. $(x - 2 - x^2)(x^2 + 2x - 8) < 0.$
41. $\dfrac{x + 2}{x - 1} < 0.$
42. $\dfrac{x + 3}{x - 4} > 0.$
43. $\dfrac{x + 3}{x - 4} > 1.$
44. $\dfrac{2}{x - 2} < \dfrac{4}{x + 1}.$
45. $\dfrac{3}{2x - 2} > \dfrac{1}{2x + 1}.$
46. $\dfrac{x^2 - 4}{1 - x^2} > 2.$
47. $\dfrac{x}{x + 1} > \dfrac{x - 1}{x + 2}.$
48. $\dfrac{6}{x - 1} - \dfrac{5}{x - 2} > -2.$
49. $\dfrac{x^2 + x + 1}{x(x - 1)(x - 2)} > 0.$
50. $\dfrac{3}{x + 1} - \dfrac{5}{x - 1} > 6.$

## 6.6. OTRAS INECUACIONES

En este artículo consideraremos algunos tipos adicionales de inecuaciones. Primeramente nos referiremos a inecuaciones que llevan el valor absoluto (Art. 2.4) de una expreisón, por ejemplo, la $|x - 1| < 1$. Tales inecuaciones se pueden presentar en la determinación del llamado *intervalo de convergencia* de una serie potencial.

**Ejemplo 1.** Resolver la inecuación

$$|x - 1| < 1.$$

SOLUCION. Esta inecuación significa exactamente que

$$-1 < x - 1 < 1.$$

La resolución de la inecuación

$$-1 < x - 1$$

conduce inmediatamente al resultado $x > 0$.

Analogamente, la resolución de la inecuación

$$x - 1 < 1$$

resulta ser $x < 2$.

Por tanto, la solución de la inecuación dada es $0 < x < 2$.

En el siguiente ejemplo se considera una de las propiedades fundamentales del valor absoluto.

**Ejemplo 2.** Si $a$ y $b$ son números reales cualesquiera, demostrar que

$$|a + b| \leq |a| + |b|.$$

SOLUCION. Por supuesto, esta desigualdad puede demostrarse considerando los diversos casos posibles: $a$ y $b$ ambos positivos o ambos negativos; $a$ positivo y $b$ negativo, y viceversa; y las diversas combinaciones en que $a$, $b$ o ambos son cero. Sin embargo, aquí daremos otra demostración.

Supongamos en contra de lo que requiere la desigualdad, que

$$|a + b| > |a| + |b|.$$

Elevando al cuadrado ambos miembros (Corolario 2, Teorema 6, Art. 6.2), tenemos

$$a^2 + 2ab + b^2 > a^2 + 2|a| \cdot |b| + b^2$$

de donde

$$ab > |a| \cdot |b|,$$

lo que no es verdadero para todo valor de $a$ y $b$. Esta contradicción muestra que nuestro supuesto es falso, con lo cual queda demostrada la desigualdad dada.

A continuación consideraremos desigualdades con radicales. En algunas de estas inecuaciones debe tenerse sumo cuidado con los signos. También se debe considerar que se está trabajando exclusivamente con números reales.

**Ejemplo 3.** Resolver la inecuación

$$\sqrt{x - 1} + 2 > 0.$$

SOLUCION. Siguiendo el método empleado al resolver ecuaciones con radicales aislaremos el radical:

$$\sqrt{x - 1} > -2.$$

No podemos elevar ahora al cuadrado, pues los dos miembros no son ambos positivos (Corolario 2, Teorema 6, Art. 6.2).

Si elevamos al cuadrado la inecuación original, obtenemos

$$x - 1 + 4\sqrt{x-1} + 4 > 0$$

o sea,
$$x + 3 + 4\sqrt{x-1} > 0,$$

y se nos presenta la misma dificultad que antes.

Examinando con más detalle la inecuación dada, observamos que por ser el término 2 mayor que cero, la única restricción para el radical $\sqrt{x-1}$ es que represente un número real no negativo. Esto significa que $x - 1 \geq 0$ ó $x \geq 1$, que por tanto, es la solución.

## EJERCICIOS. GRUPO 23

En cada uno de los ejercicios 1-8, resolver la inecuación dada.

1. $|x| < 2$. 2. $|x| > 5$. 3. $|x-2| < 1$. 4. $|x+2| > 1$.

5. $|x-5| < 1$. 6. $\left|\frac{x}{3}\right| < 1$. 7. $\left|\frac{x+2}{2}\right| < 1$. 8. $\left|\frac{x+1}{3}\right| < 1$.

9. Demostrar la desigualdad del ejemplo 2 (Art. 6.6), considerando los diversos casos posibles.

10. Si $a$ y $b$ son numeros reales cualesquiera, demostrar que $|a-b| \leq |a| + |b|$.

11. Si $a$ y $b$ son números reales cualesquiera, demostrar que $|a+b| \geq |a| - |b|$.

12. Si $a$ y $b$ son números reales cualesquiera, demostrar que $|a-b| \geq |a| - |b|$.

En cada uno de los ejercicios 13-22 resolver la inecuación dada.

13. $\sqrt{x+1} > 2$. 14. $\sqrt{1-x} > 2$.

15. $\sqrt{x-1} < 1$. 16. $\sqrt{x-2} + 1 > 0$.

17. $\dfrac{1}{\sqrt{x+1}} < 2$. 18. $\dfrac{1}{\sqrt{x-1}} > 2$.

19. $\sqrt{x+5} + \sqrt{x} > 5$. 20. $\sqrt{x+4} - \sqrt{x-1} > 1$.

21. $\sqrt{3x+7} - \sqrt{x-2} > 3$. 22. $\sqrt{x+7} - \sqrt{x-1} > 2$.

23. Si $a$ y $b$ son números positivos diferentes, demostrar que $\dfrac{a+b}{2} > \sqrt{ab}$.

24. Si $a$ y $b$ son números positivos diferentes, demostrar que $\sqrt{ab} > \dfrac{2ab}{a+b}$.

25. Si $a$ y $b$ son números positivos, demostrar que $\sqrt{a^2+b^2} < a + b$.

26. Si $a$ y $b$ son números positivos, demostrar que $\sqrt{a+b} < \sqrt{a} + \sqrt{b}$.

En cada uno de los ejercicios 27-30 verificar la desigualdad dada sin utilizar tablas de raíces cuadradas.

27. $\sqrt{7} + \sqrt{3} > \sqrt{19}$. 28. $\sqrt{2} + \sqrt{6} < \sqrt{15}$.

29. $\sqrt{8} + \sqrt{6} < 2 + \sqrt{11}$. 30. $\sqrt{3} - \sqrt{7} > \sqrt{5} - \sqrt{10}$.

# 7

# Inducción matemática. Teorema del binomio

## 7.1. INTRODUCCION

Como lo indica el título, este capítulo consta de dos temas distintos. La razón es que el *teorema del binomio* se demuestra por medio de un método conocido como *inducción matemática* o *inducción completa*. No se debe pensar que la inducción matemática sea solamente un método para la demostración del teorema del binomio. Veremos que existe una gran variedad de proposiciones y fórmulas que pueden demostrarse utilizando la inducción matemática. De hecho, en el capítulo siguiente se empleará la inducción matemática para demostrar una importante proposición conocida como el *Teorema de De Moivre*.

## 7.2. NATURALEZA DE LA INDUCCION MATEMATICA

En vez de introducir desde el principio el enunciado formal de la ley de inducción matemática, analizaremos un ejemplo muy sencillo para mostrar el mecanismo lógico en que se apoya este método de demostración.

Consideremos la suma $S_n$ de los primeros $n$ números impares, es decir,

$$S_n = 1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1),$$

en donde $2n - 1$ representa el *enésimo* término de la suma. Escribamos directamente la suma para los primeros cuatro casos:

$$\begin{aligned} n &= 1, \quad & S_1 &= 1. \\ n &= 2, \quad & S_2 &= 1 + 3 = 4 = 2^2. \\ n &= 3, \quad & S_3 &= 1 + 3 + 5 = 9 = 3^2. \\ n &= 4, \quad & S_4 &= 1 + 3 + 5 + 7 = 16 = 4^2. \end{aligned}$$

Hemos indicado aquí que, en cada caso, la suma es igual al cuadrado del número de términos sumados, de lo cual resulta obvio inferir que la suma de $n$ términos es *probablemente* igual a $n^2$. Nótese que no hemos demostrado esta relación para la suma de un *número cualquiera* de términos, sino que simplemente hemos comprobado que es verdadera hasta $n$ igual a 4.

En el método de inducción matemática se supone que la relación es verdadera para cierto valor de $n$, digamos $k$, y luego hay que demostrar apoyándose en esta hipótesis, que la relación es también verdadera para $k + 1$ que representa el siguiente valor posible de $n$. Si se logra esta demostración, se completa con el razonamiento siguiente: Ya que la relación resultó verdadera para $n = 1$, del paso inmediatamente anterior se sigue que es verdadera para $n = 2$; análogamente, si vale para $n = 2$, entonces vale para $n = 3$, y así sucesivamente para todo valor entero positivo de $n$.

Utilicemos la inducción matemática para completar la demostración de la relación

$$(1) \qquad 1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2.$$

Supongamos que (1) es verdadera para $n = k$, es decir,

$$(2) \qquad 1 + 3 + 5 + \dots + (2k - 1) = k^2$$

lo que representa nuestra hipótesis

Añadamos ahora el término orden $k + 1$, o sea, $2(k + 1) - 1 = 2k + 1$, a ambos miembros de (2). Obtenemos la igualdad

$$(3) \qquad \begin{aligned} 1 + 3 + 5 + \dots + (2k - 1) + (2k + 1) &= k^2 + 2k + 1 \\ &= (k + 1)^2. \end{aligned}$$

La igualdad (3), *que solamente es verdadera* si (2) *es verdadera*, representa la verificación de la relación (1) para $n = k + 1$. Por tanto, hemos demostrado que si la relación (1) es verdadera para $n = k$, entonces es verdadera para $n = k + 1$. El razonamiento continúa como ya se indicó: ya que la relación (1) resultó verdadera para $n = 1$, se sigue de (2) y (3) que también es verdadera para $n = 2$. Análogamente, si (1) vale para $n = 2$, entonces vale para $n = 3$, y así sucesivamente para todos los valores enteros positivos de $n$.

Por comodidad y facilidad para consultas posteriores, damos ahora un enunciado formal del método de inducción matemática.

## Inducción matemática

La inducción matemática, o inducción completa, es una forma de razonamiento que puede usarse para demostrar relaciones o proposiciones que dependan de una variable, digamos $n$, que solo admite valores enteros y positivos. El método de inducción matemática para demostrar una relación particular consta, en esencia, de los tres siguientes pasos:

1. Comprobar que la relación es verdadera para $n = 1$, o para el primer valor admisible de $n$.

2. Partiendo de la hipótesis de que la relación es verdadera para cierto valor de $n$, digamos $k$, demostrar que también es verdadera para $n = k + 1$.

3. Comprobado que la relación es cierta para $n = 1$ en el paso 1, del paso 2 se sigue que también es cierta para $n = 2$. Análogamente, si la relación es cierta para $n = 2$, entonces es cierta para $n = 3$, y así sucesivamente para todos los valores enteros y positivos de $n$.

Hagamos destacar que los pasos 1 y 2 son *ambos* esenciales para la validez de la demostración. El paso 3 es solamente una consecuencia lógica de los pasos 1 y 2.

NOTA. A continuación damos dos ejemplos en que una relación resulta falsa porque no satisface simultáneamente los pasos 1 y 2.

Primero consideremos la relación

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n.$$

Es obvio que esta relación es válida para $n = 1$, satisfaciendo por lo tanto el paso 1. Pero es fácil demostrar que no satisface el paso 2. En consecuencia, la relación (4) no se cumple para todos los valores enteros positivos de $n$.

Consideremos ahora la relación

$$(5) \qquad 1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2 + 1.$$

Se puede probar fácilmente que esta relación satisface el paso 2. Pero no satisface el paso 1 y, por tanto, no es válida para ningún valor entero y positivo de $n$.

## 7.3. EJEMPLOS DE INDUCCION MATEMATICA

En este artículo damos varios ejemplos y una amplia colección de ejercicios de inducción matemática.

**Ejemplo 1.** Por el método de inducción matemática, demostrar la relación

$$(1) \qquad 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \tfrac{1}{6}n(n + 1)(2n + 1),$$

en donde $n$ es cualquier número entero y positivo.

SOLUCION. Efectuaremos, en orden, cada uno de los tres pasos mencionados en el Art. 7.2.

1. Sustituyendo $n = 1$ obtenemos

$$1^2 = \tfrac{1}{6} \cdot 1(1+1)(2+1) = \tfrac{1}{6} \cdot 2 \cdot 3 = 1.$$

Luego el paso 1 se satisface.

2. Suponiendo que (1) es verdadera para $n = k$, es decir, suponiendo que la siguiente relación es verdadera:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + k^2 = \tfrac{1}{6}k(k+1)(2k+1). \tag{2}$$

Sumando a ambos miembros de (2) $(k+1)^2$, que es el término de orden $k+1$. Se obtiene:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + k^2 + (k+1)^2 = \tfrac{1}{6}k(k+1)(2k+1) + (k+1)^2. \tag{3}$$

Ahora debemos probar que el segundo miembro de (3) es idéntico al segundo miembro de (1) cuando se reemplaza $n$ por $k+1$. Así, sacando factor común a $\dfrac{k+1}{6}$ tenemos

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{6}k(k+1)(2k+1) + (k+1)^2 &= \frac{k+1}{6}[k(2k+1) + 6(k+1)] \\ &= \frac{k+1}{6}[2k^2 + 7k + 6] = \frac{k+1}{6}(k+2)(2k+3) \\ &= \frac{k+1}{6}[(k+1)+1][2(k+1)+1]. \end{aligned}$$

Esta última expresión es idéntica al segundo miembro de (1) cuando $n$ se reemplaza por $k+1$. Por tanto, hemos demostrado que si (1) es verdadera para $n = k$, también es verdadera para $n = k + 1$.

3. Ya que (1) es verdadera para $n = 1$ según el paso 1, se sigue del paso 2 que (1) es verdadera para $n = 2$. Por la misma razón, si es verdadera para $n = 2$, entonces lo es para $n = 3$, y así sucesivamente para todos los valores enteros positivos de $n$, como se quería demostrar.

**Ejemplo 2.** Por el método de inducción matemática, demostrar que $x^{2n} - y^{2n}$ es exactamente divisible entre $x + y$ para todo valor entero positivo de $n$.

SOLUCION. 1. Para $n = 1$ tenemos $(x^2 - y^2)/(x + y) = x - y$, con lo cual se cumple el paso 1.

2. Ahora debemos probar que si $x^{2k} - y^{2k}$ es divisible exactamente entre $x + y$, entonces $x^{2k+2} - y^{2k+2}$ también es divisible exactamente entre $x + y$. Existen varias maneras de demostrarlo. Utilizaremos el método muy natural de dividir $x^{2k+2} - y^{2k+2}$ entre $x + y$. Por división algebraica ordinaria (Art. 2.7), tenemos

$$\frac{x^{2k+2} - y^{2k+2}}{x + y} = x^{2k+1} - x^{2k}y + \frac{x^{2k}y^2 - y^{2k+2}}{x + y},$$

en donde la división se ha desarrollado justamente lo necesario para permitir el uso de la hipótesis que consiste en que $x^{2k} - y^{2k}$ es exactamente divisible entre $x + y$. En efecto, el resto

$$x^{2k}y^2 - y^{2k+2} = y^2(x^{2k} - y^{2k}),$$

es, según nuestra suposición, exactamente divisible entre $x + y$, y por tanto la división de $x^{2k+2} - y^{2k+2}$ entre $x + y$ es exacta. Luego el paso 2 también se cumple.

3. Aquí repetimos las frases usuales que completan la demostración para todo valor entero y positivo de $n$.

NOTA. Muchas de las dificultades encontradas en el paso 2, de una demostración por inducción matemática, pueden evitarse si el resultado de sustituir $n$ por $k + 1$ se transforma de modo que permita el uso de la hipótesis para $n = k$. Se recomienda que el estudiante observe este hecho en el ejemplo anterior.

## EJERCICIOS. GRUPO 24

1. Demostrar que la relación (4) del Art. 7.2 no satisface el paso 2 del método de inducción matemática.

2. Demostrar que la relación (5) del Art. 7.2 satisface el paso 2 del método de inducción matemática.

3. En el ejemplo 2 del Art. 7.3, efectuar el paso 2 utilizando la identidad
$$x^{2k+2} - y^{2k+2} \equiv x^2(x^{2k} - y^{2k}) + y^{2k}(x^2 - y^2).$$

4. Demostrar que $x^{2n-1} + y^{2n-1}$ es exactamente divisible entre $x + y$ para todo valor entero positivo de $n$, efectuando el paso 2 como en el ejemplo 2 del Art. 7.3.

5. Efectuar el paso 2 del ejercicio 4 utilizando la identidad
$$x^{2k+1} + y^{2k+1} \equiv x^2(x^{2k-1} + y^{2k-1}) - y^{2k-1}(x^2 - y^2).$$

6. Demostrar que $x^n - y^n$ es divisible exactamente entre $x - y$ para todo valor entero positivo de $n$, efectuando el paso 2 como en el ejemplo 2 del Art. 7.3.

7. Efectuar el paso 2 del ejercicio 6 utilizando la identidad
$$x^{k+1} - y^{k+1} \equiv x(x^k - y^k) + y^k(x - y).$$

En cada uno de los ejercicios 8-39, demostrar por el método de inducción matemática la relación o proporción dada, siendo $n$ un número entero y positivo.

8. $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \dfrac{n(n + 1)}{2}$.

9. $2 + 4 + 6 + \dots + 2n = n(n + 1)$.

10. $1 + 4 + 7 + \dots + (3n - 2) = \frac{n}{2}(3n - 1)$.

11. $3 + 6 + 9 + \dots + 3n = \frac{3}{2}n(n + 1)$.

12. $5 + 10 + 15 + \dots + 5n = \frac{5}{2}n(n + 1)$.

13. $a + (a + d) + (a + 2d) + \dots + [a + (n - 1)d] = \frac{n}{2}[2a + (n - 1)d]$.

14. $2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^n = 2(2^n - 1)$.

15. $3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^n = \frac{3}{2}(3^n - 1)$.

16. $1 + 5 + 5^2 + \dots + 5^{n-1} = \frac{1}{4}(5^n - 1)$.

17. $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} = 2 - \frac{1}{2^{n-1}}$

18. $a + ar + ar^2 + \dots + ar^{n-1} = \dfrac{a(1 - r^n)}{1 - r}$.

19. $1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2n - 1)^2 = \frac{n}{3}(4n^2 - 1)$.

20. $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2}{4}(n + 1)^2$.

21. $(1 + 2 + 3 + \dots + n)^2 = \frac{n^2}{4}(n + 1)^2$.

22. $1^3 + 3^3 + 5^3 + \dots + (2n - 1)^3 = n^2(2n^2 - 1)$.

23. $1 + 3 + 6 + \dots + \frac{n}{2}(n + 1) = \frac{n}{6}(n + 1)(n + 2)$.

24. $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + n(n + 1) = \frac{n}{3}(n + 1)(n + 2)$.

25. $1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 5 + \dots + n(n + 2) = \frac{n}{6}(n + 1)(2n + 7)$.

26. $2 \cdot 5 + 3 \cdot 6 + 4 \cdot 7 + \dots + (n + 1)(n + 4) = \frac{n}{3}(n + 4)(n + 5)$.

27. $1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + 3 \cdot 4 \cdot 5 + \dots + n(n + 1)(n + 2)$
$= \frac{n}{4}(n + 1)(n + 2)(n + 3)$.

28. $\dfrac{1}{1 \cdot 2} + \dfrac{1}{2 \cdot 3} + \dfrac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \dfrac{1}{n(n + 1)} = \dfrac{n}{n + 1}$.

29. $\dfrac{1}{1 \cdot 3} + \dfrac{1}{3 \cdot 5} + \dfrac{1}{5 \cdot 7} + \dots + \dfrac{1}{(2n - 1)(2n + 1)} = \dfrac{n}{2n + 1}$.

30. $\dfrac{1}{1 \cdot 3} + \dfrac{1}{2 \cdot 4} + \dfrac{1}{3 \cdot 5} + \dots + \dfrac{1}{n(n + 2)} = \dfrac{n(3n + 5)}{4(n + 1)(n + 2)}$.

31. $1 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \dots + n \cdot 2^n = (n - 1)2^{n+1} + 2$.

32. $1 \cdot 1 + 2 \cdot 3^2 + 3 \cdot 5^2 + \dots + n(2n - 1)^2 = \frac{n}{6}(n + 1)(6n^2 - 2n - 1)$.

33. $1 \cdot 3 + 3 \cdot 3^2 + 5 \cdot 3^3 + \dots + (2n - 1)3^n = (n - 1)3^{n+1} + 3$.

34. Si $a$ y $b$ son números positivos tales que $a > b$, entonces $a^n > b^n$.

35. $2^{4n} - 1$ es divisible entre 15.

36. $2^{2n} + 5$ es divisible entre 3.

37. $3^{2n} + 7$ es divisible entre 8.

38. $\dfrac{x^n - y^n}{x - y} = x^{n-1} + x^{n-2}y + \dots + xy^{n-2}$

39. $\dfrac{x^n + y^n}{x + y} = x^{n-1} - x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 - \ldots - xy^{n-2} + y^{n-1}$, $n$ impar.

40. Demostrar el teorema 12 del Art. 2.6 por el método de inducción matemática.

## 7.4. TEOREMA DEL BINOMIO

El teorema del binomio es una fórmula (por esto se llama también fórmula del binomio) con la cual se pueden escribir directamente los términos del desarrollo de una potencia entera y positiva de un binomio. Para formarnos una idea de la estructura del desarrollo de $(a + b)^n$, en donde $n$ es un número entero y positivo, escribiremos el resultado para los primeros cuatro valores de $n$. Así, por multiplicación directa, tenemos

$$\begin{aligned}
(a + b)^1 &= a + b, \\
(a + b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2, \\
(a + b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3, \\
(a + b)^4 &= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4.
\end{aligned}$$

Observemos que cada uno de estos desarrollos tienen las siguientes características:

1. El número de términos es $n + 1$, o sea, una unidad más que el exponente $n$ del binomio.
2. En el primer término el exponente de $a$ es $n$ y decrece de unidad en unidad en cada uno de los términos siguientes.
3. La $b$ aparece por primera vez en el segundo término, con exponente 1, y su exponente aumenta de unidad en unidad en cada uno de los términos siguientes. El exponente de $b$ es siempre una unidad menor que el número de orden del término.
4. La suma de los exponentes de $a$ y $b$ es igual a $n$ en cualquiera de los términos.
5. Los coeficientes de $a$ y $b$ presentan cierta simetría, que consiste en que los coeficientes de términos equidistantes de los extremos son iguales.
6. El coeficiente del primer término es la unidad y el del segundo término es $n$.
7. Si en cualquiera de los términos, el coeficiente se multiplica por el exponente de $a$ y este producto se divide entre el exponente de $b$ aumentado en 1, el resultado es el coeficiente del siguiente término.

NOTA 1. Las primeras seis características se observan inmediatamente, la séptima tal vez no parezca tan evidente, y como es de mucha importancia en la determinación de coeficientes, la explicaremos con más detalle aplicándola al desarrollo de $(a+b)^4$. El coeficiente del tercer término se obtiene del segundo como sigue: se multiplica el coeficiente 4 del segundo término por el exponente 3 de $a$ y este producto se divide entre el exponente 1 de $b$ aumentado en 1. Es decir, $\frac{4 \times 3}{1+1} = 6$, que es el coeficiente del tercer término. Análogamente, de este coeficiente obtenemos $\frac{6 \times 2}{2+1} = 4$, que es el coeficiente del cuarto término, y así sucesivamente.

Antes de intentar escribir la fórmula para el desarrollo general de $(a+b)^n$, es conveniente introducir la siguiente definición:

**Definición.** Por el símbolo $n!$, llamado *factorial* de $n$, se entiende el producto de todos los números enteros y positivos consecutivos de 1 a $n$. Es decir,

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n. \tag{1}$$

*Ejemplo.* $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24.$

Como generalización, con frecuencia resulta útil disponer de un valor para 0! que *no* está definido en la relación (1) siendo $n$ un entero positivo. Para encontrar un significado a 0! observemos lo siguiente:

De (1) tenemos

$$n! = n(n-1)! \tag{2}$$

De la relación (2), para $n = 1$ tenemos

$$1! = 1(0)!$$

Y para que esta relación sea válida establecemos la siguiente definición o convenio:

$$0! = 1.$$

NOTA 2. Factorial de $n$ se representa a veces con el símbolo $\underline{n|}$. Sin embargo, nosotros utilizaremos el símbolo $n!$.

Si ahora *suponemos*, que para *cualquier* valor entero y positivo de $n$, el desarrollo de $(a+b)^n$ tiene las mismas características que observamos para $n = 1, 2, 3, 4$, podemos escribir

$$(a+b)^n = a^n + \frac{n}{1}a^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}a^{n-3}b^3$$
$$+ \ldots + \frac{n(n-1)\ldots(n-r+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (r-1)}a^{n-r+1}b^{r-1} + \ldots + b^n,$$

que con el símbolo de $n!$, puede escribirse así:

$$(3)\qquad \begin{aligned}(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b &+ \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2 \\ &+ \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^{n-3}b^3 \\ &+ \dots + \frac{n(n-1)\dots(n-r+2)}{(r-1)!}a^{n-r+1}b^{r-1} \\ &+ \dots + b^n,\end{aligned}$$

en donde el término de orden $r$

$$\frac{n(n-1)\dots(n-r+2)}{(r-1)!}a^{n-r+1}b^{r-1},$$

se conoce como el *término general.*

La fórmula o relación (3) recibe el nombre de *teorema del binomio* para exponentes enteros y positivos. Esta relación ya ha sido comprobada para $n = 1, 2, 3, 4$. Ahora surge la pregunta, ¿será válida para todos los valores enteros y positivos de $n$? La respuesta es afirmativa, tal como se demuestra, por inducción matemática, en el artículo siguiente.

## 7.5. DEMOSTRACION DEL TEOREMA DEL BINOMIO

Por comodidad, volveremos a escribir la fórmula del binomio, incluyendo tanto el término de orden $r-1$ como el de orden $r$. Así tenemos

$$(1)\qquad \begin{aligned}(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b &+ \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2 + \dots \\ &+ \frac{n(n-1)\dots(n-r+3)}{(r-2)!}a^{n-r+2}b^{r-2} \\ &+ \frac{n(n-1)\dots(n-r+2)}{(r-1)!}a^{n-r+1}b^{r-1} \\ &+ \dots + nab^{n-1} + b^n.\end{aligned}$$

Vamos a establecer la validez de la relación (1) para todos los valores enteros y positivos de $n$ por medio del método de inducción matemática.

En el artículo anterior, al comprobar que (1) se verifica para $n = 1$, se ha establecido el paso 1 de la demostración (Art. 7.2).

Para demostrar el paso 2 suponemos que (1) es válida para $n = k$, o sea que se verifica la igualdad

$$
\begin{aligned}
(2) \qquad (a+b)^k = {} & a^k + ka^{k-1}b + \dots \\
& + \frac{k(k-1)\dots(k-r+3)}{(r-2)!}a^{k-r+2}b^{r-2} \\
& + \frac{k(k-1)\dots(k-r+2)}{(r-1)!}a^{k-r+1}b^{r-1} \\
& + \dots + kab^{k-1} + b^k.
\end{aligned}
$$

Multiplicando ambos miembros de (2) por $a+b$, se obtiene $(a+b)^{k+1}$ en el primer miembro. En las dos siguientes líneas escribiremos, en orden, el producto del segundo miembro de (2) primero por $a$ y luego por $b$.

(3)

$$a^{k+1} + ka^kb + \dots + \frac{k(k-1)\dots(k-r+2)}{(r-1)!}a^{k-r+2}b^{r-1} + \dots + ab^k,$$

(4)

$$a^kb + \dots + \frac{k(k-1)\dots(k-r+3)}{(r-2)!}a^{k-r+2}b^{r-1} + \dots + kab^k + b^{k+1}.$$

Sumando (3) y (4), obtenemos como segundo miembro de $(a+b)^{k+1}$,

$$
\begin{aligned}
& a^{k+1} + (k+1)a^kb \\
& \quad + \dots + \left[\frac{k(k-1)\dots(k-r+2)}{(r-1)!} + \frac{k(k-1)\dots(k-r+3)}{(r-2)!}\right]a^{k-r+2}b^{r-1} \\
& \quad + \dots + (k+1)ab^k + b^{k+1}.
\end{aligned}
$$

El coeficiente del término de orden $r$ de esta última expresión puede ser simplificado como sigue:

$$
\begin{aligned}
& \frac{k(k-1)\dots(k-r+2)}{(r-1)!} + \frac{k(k-1)\dots(k-r+3)}{(r-2)!} \\
& = \frac{k(k-1)\dots(k-r+3)}{(r-1)!}(k-r+2) + \frac{k(k-1)\dots(k-r+3)}{(r-1)(r-2)!}(r-1) \\
& = \frac{k(k-1)\dots(k-r+3)}{(r-1)!}[k-r+2+r-1] \\
& = \frac{k(k-1)\dots(k-r+3)}{(r-1)!}[k+1] = \frac{(k+1)k(k-1)\dots(k-r+3)}{(r-1)!}.
\end{aligned}
$$

Por tanto, escribimos finalmente

$$
\begin{aligned}
(5) \qquad (a+b)^{k+1} = {} & a^{k+1} + (k+1)a^kb \\
& + \dots + \frac{(k+1)k\dots(k-r+3)}{(r-1)!}a^{k-r+2}b^{r-1} \\
& + \dots + (k+1)ab^k + b^{k+1}.
\end{aligned}
$$

Comparando (1) y (5), y particularmente los términos de orden $r$, vemos que (5) es precisamente el resultado que se obtiene al reemplazar $n$ por $k+1$ en (1). Por tanto, hemos demostrado que si el teorema del binomio (1) es válido para $n = k$, también es válido para $n = k + 1$. Así queda demostrado el paso 2.

Utilizando el argumento acostumbrado del paso 3, se concluye que el teorema del binomio (1) es válido para todos los valores enteros y positivos de $n$.

NOTAS

1. Debe tenerse en cuenta que hemos demostrado el teorema del binomio sólo para valores enteros y positivos del exponente. Por métodos superiores se demuestra que el desarrollo del binomio $(a + b)^n$ también es válido para valores fraccionarios y negativos de $n$, siempre que el valor absoluto de $b/a$ sea menor que la unidad. En este caso el número de términos es infinito, es decir, el desarrollo continúa indefinidamente y se tiene lo que se conoce como una *serie infinita.*

2. En la quinta característica del desarrollo del binomio (Art. 7.4), observamos cierto tipo de simetría en los coeficientes de los términos. Esta simetría se muestra claramente en el siguiente arreglo triangular conocido con el nombre de *triángulo de Pascal,* que da los coeficientes de los términos del desarrollo de $(a + b)^n$ para valores enteros y positivos de $n$. Estos coeficientes se llaman *coeficientes binomiales* o *binómicos.*

$$
\begin{array}{lccccccccccc}
n = 0 & & & & & & 1 & & & & & \\
n = 1 & & & & & 1 & & 1 & & & & \\
n = 2 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
n = 3 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
n = 4 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
n = 5 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}
$$

En el triángulo de Pascal observamos que los elementos en los extremos de cualquier fila son la unidad, ya que los coeficientes de los términos primero y último son iguales a 1. Cada elemento interior puede obtenerse como la suma de los dos elementos que aparecen en la fila inmediata superior y a la izquierda y derecha inmediatas de ese elemento. Así para $n = 4$, el segundo coeficiente 4, es la suma de los elementos 1 y 3 de la fila anterior que se encuentran inmediatamente a la izquierda y a la derecha de 4, respectivamente; análogamente, el tercer coeficiente 6 se obtiene como suma de los elementos 3 y 3 de la fila anterior, etc. Esta relación entre los coeficientes del desarrollo del binomio será demostrada en un capítulo posterior al tratar de *permutaciones y combinaciones.*

Veamos ahora algunos ejemplos de aplicación del teorema del binomio.

**Ejemplo 1.** Desarrollar por el teorema del binomio $(a + 2b)^5$.

SOLUCION. Empezaremos escribiendo el primer término $a^5$ y el coeficiente 5 del segunto término, que va multiplicado por $a^4(2b)$. De este punto en adelante podemos escribir inmediatamente todos los términos que siguen, incluyendo los coeficientes, de acuerdo con las características del desarrollo mencionadas en el Art. 7.4. Así tenemos:

$$\begin{aligned}(a+2b)^5 &= a^5 + 5a^4(2b) + \frac{5\cdot 4}{2}a^3(2b)^2 \\ &\quad + \frac{10\cdot 3}{3}a^2(2b)^3 + \frac{10\cdot 2}{4}a(2b)^4 + \frac{5\cdot 1}{5}(2b)^5 \\ &= a^5 + 5a^4(2b) + 10a^3(2b)^2 + 10a^2(2b)^3 + 5a(2b)^4 + (2b)^5.\end{aligned}$$

Nótese que hemos conservado el término $2b$ encerrado en paréntesis para que no interfiera con la formación correcta de los coeficientes binomiales. Luego podemos efectuar las potencias de $2b$ y obtener la forma final:

$$(a+2b)^5 = a^5 + 10a^4b + 40a^3b^2 + 80a^2b^3 + 80ab^4 + 32b^5.$$

**Ejemplo 2.** Desarrollar $\left(\frac{2a}{x^2} - \frac{x^2}{2a}\right)^4$

SOLUCION. En este desarrollo es aconsejable encerrar *ambos* términos en paréntesis, ya que aquí no solo nos interesa formar correctamente los coeficientes binomiales, sino también obtener correctamente los exponentes finales y los signos de cada término. Por tanto, escribimos el desarrollo en varios pasos, como sigue:

$$\begin{aligned}\left(\frac{2a}{x^2} - \frac{x^2}{2a}\right)^4 &= \left(\frac{2a}{x^2}\right)^4 + 4\left(\frac{2a}{x^2}\right)^3\left(-\frac{x^2}{2a}\right) + \frac{4\cdot 3}{2}\left(\frac{2a}{x^2}\right)^2\left(-\frac{x^2}{2a}\right)^2 \\ &\quad + \frac{6\cdot 2}{3}\left(\frac{2a}{x^2}\right)\left(-\frac{x^2}{2a}\right)^3 + \frac{4\cdot 1}{4}\left(-\frac{x^2}{2a}\right)^4 \\ &= \frac{16a^4}{x^8} - 4\,\frac{8a^3}{x^6}\cdot\frac{x^2}{2a} + 6\,\frac{4a^2}{x^4}\cdot\frac{x^4}{4a^2} - 4\,\frac{2a}{x^2}\cdot\frac{x^6}{8a^3} + \frac{x^8}{16a^4} \\ &= \frac{16a^4}{x^8} - \frac{16a^2}{x^4} + 6 - \frac{x^4}{a^2} + \frac{x^8}{16a^4}.\end{aligned}$$

## 7.6. EL TERMINO GENERAL

Ya hemos observado (Art. 7.4) que en el desarrollo de $(a+b)^n$, el

(1) término de orden $r = \dfrac{n(n-1)\ldots(n-r+2)}{(r-1)!}a^{n-r+1}b^{r-1}$,

se llama el *término general.* Esta es una fórmula muy conveniente para obtener cualquier término del desarrollo de la potencia de un binomio sin calcular los términos anteriores. Nótese que en (1) el coeficiente tiene el mismo número de factores tanto en el numerador como en el denominador, es decir, $r - 1$ factores.

Se sigue de (1) que el término que contiene $b^r$ es el término de orden $r + 1$ o sea

$$(2) \qquad \text{término de orden } r + 1 \; \frac{n(n-1)\ldots(n-r+1)}{r!}\, a^{n-r} b^r,$$

que frecuentemente es llamado término general en lugar del término (1). Aunque cualquiera de estas formas puede usarse para obtener un término particular del desarrollo, por ahora utilizaremos la forma (1). Más adelante tendremos oportunidad de utilizar la forma (2) cuando estudiemos los coeficientes binomiales en términos de números combinatorios.

**Ejemplo 1.** Obtener el cuarto término del desarrollo de $(a + 2b)^5$.

SOLUCION. Utilizando la forma (1), tenemos

$$\text{cuarto término de } (a + 2b)^5 = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3}\, a^2(2b)^3 = 10a^2(8b^3) = 80a^2b^3.$$

(Véase el ejemplo 1 del Art. 7.5).

**Ejemplo 2.** En el desarrollo de $\left(2x^2 - \frac{xy}{2}\right)^9$, obtener el término que contiene $x^{14}$.

SOLUCION. Este problema difiere del anterior en que no sabemos el orden del término que se busca. Por tanto, representaremos por $r$ el orden del término. De acuerdo con la forma (1), el término de orden $r$, aparte de su coeficiente, contiene $(2x^2)^{9-(r-1)}\left(-\frac{xy}{2}\right)^{r-1}$ lo que significa que el exponente de $x$ en este término es

$$2(10 - r) + r - 1 = 20 - 2r + r - 1 = -r + 19.$$

Ya que nos interesa que el exponente de $x$ sea 14, se debe tener $-r + 19 = 14$, de donde $r = 5$. O sea, que el término buscado es el

$$\text{quinto término de} \left(2x^2 - \frac{xy}{2}\right)^9 = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}\,(2x^2)^5\left(-\frac{xy}{2}\right)^4$$
$$= 126(32x^{10})\left(\frac{x^4y^4}{16}\right) = 252x^{14}y^4.$$

## EJERCICIOS. GRUPO 25

En cada uno de los ejercicios 1-14, efectuar el desarrollo indicado.

1. $(3a - b)^4$.
2. $(x - 2y)^5$.
3. $(x + 3y)^6$.
4. $(x^2 - y^2)^4$.
5. $(x^2 + x^{1/2})^4$.
6. $(x^2 - x^{-2})^5$.
7. $\left(\frac{a}{2} - \frac{2}{a}\right)^4$.
8. $\left(\frac{a^2}{2} + \frac{2}{a^2}\right)^6$.
9. $\left(\frac{x^{1/2}}{y} - \frac{y}{x^{1/2}}\right)^4$.
10. $(a\sqrt{b} + b\sqrt{a})^6$.
11. $(a^{3/2} - a^{-3/2})^4$.
12. $(\sqrt{3} - \sqrt{2})^4$.
13. $(a + b - c)^3$.
14. $(1 + x)^4 + (1 - x)^4$.

En cada uno de los ejercicios 15-26, escribir y simplificar los primeros cuatro términos del desarrollo de la potencia del binomio.

15. $(2a - b)^7$.
16. $\left(x + \frac{y}{2}\right)^8$.
17. $\left(a - \frac{b}{3}\right)^9$.
18. $\left(a + \frac{x}{2}\right)^{10}$
19. $(x^{1/2} - y^{1/2})^{12}$.
20. $(1 + x)^{20}$.
21. $(1 + x)^{-1}$.
22. $(1 + x^2)^{-1}$.
23. $(1 - x)^{-2}$
24. $(1 + x)^{1/2}$.
25. $(1 - x^2)^{1/2}$.
26. $(1 + x)^{3/2}$.
27. Obtener el resultado del ejercicio 21 dividiendo 1 entre $1 + x$.
28. Obtener el resultado del ejercicio 22 dividiendo 1 entre $1 + x^2$.
29. Calcular $(1.01)^4$ desarrollando $(1 + 0.01)^4$.
30. Calcular $(0.99)^3$ usando el desarrollo de un binomio.
31. Calcular $\sqrt{0.99}$, correcto con tres decimales, usando el resultado del ejercicio 25.
32. Prolongar el triángulo de Pascal, dado en el Art. 7.5, para $n = 6, 7, 8$.
33. Demostrar que el coeficiente del término de orden $r$ de $(a + b)^n$, dado por la relación (1) del Art. 7.6, puede escribirse en la forma

$$\frac{n!}{(n - r + 1)!(r - 1)!}.$$

34. Demostrar que el coeficiente del término de orden $r$ de $(a + b)^n$, dado por la relación (1) del Art. 7.6, es válido para todo valor de $r$, excepto para 1; pero que la forma dada en el ejercicio 33 sí es válida para $r = 1$.
35. Demostrar que el coeficiente del término de orden $r + 1$ de $(a + b)^n$, dado por la relación (2) del Art. 7.6, puede escribirse en la forma $\frac{n!}{r!(n - r)!}$.
36. Demostrar que la suma de los coeficientes en el desarrollo de $(a + b)^n$ es igual a $2^n$.
37. Verifique, en el triángulo de Pascal, la propiedad de los coeficientes del desarrollo del binomio dada en el ejercicio 36.

En cada uno de los ejercicios 38-49, obtener solamente el término o términos indicados en el desarrollo correspondiente.

38. Cuarto término de $(a - 2b)^9$.
39. Octavo término de $(x^{1/2} + y^{1/2})^{12}$.
40. Quinto término de $\left(x + \frac{y}{2}\right)^7$.
41. Séptimo término de $\left(\frac{a}{2} - x\right)^{11}$.

42. Término central de $\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)^{8}$.

43. Término central de $\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right)^{10}$

44. Los dos términos centrales de $\left(\frac{x^2}{2}-y\right)^{9}$.

45. Los dos términos centrales de $(ab+\tfrac{1}{2})^{11}$.

46. Término en $a^7$ de $\left(\frac{a}{3}+9b\right)^{10}$.

47. Término en $y^4$ de $\left(\frac{2x}{3y}+\frac{3y}{2x}\right)^{10}$.

48. Término independiente de $x$ de $\left(\frac{2x}{3}-\frac{3}{2x}\right)^{6}$.

49. Término independiente de $x$ de $\left(\frac{x^{1/2}}{y^{2/3}}+\frac{y^{1/3}}{x^{3/2}}\right)^{16}$.

50. Demostrar que el término central en el desarrollo de $(1+x)^{2n}$ puede escribirse en la forma $\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{n!}2^n x^n$.

# 8

# Números complejos

## 8.1. INTRODUCCION

Con pocas excepciones, hasta ahora nos hemos limitado al uso del sistema de números reales. Sin embargo, ya hemos observado la necesidad de los números complejos. De hecho, en nuestro primer estudio de los números (Art. 1.3), llegamos a la conclusión de que el sistema de los números complejos debía ser considerado como el general del álgebra. El propósito de este capítulo es hacer un estudio formal de los números complejos y sus propiedades.

Lo estudiado hasta ahora es suficiente para desarrollar muchas de las operaciones con números complejos, pero debido a que es muy útil y conveniente introducir el uso de la forma trigonométrica de un número complejo, se requerirá además algún conocimiento de trigonometría plana. En el Apéndice I hemos incluido, con este propósito, las definiciones y fórmulas de trigonometría que son necesarias.

En capítulos anteriores se han dado definiciones y se han hecho comentarios en relación con los números complejos. Por comodidad, y para hacer un estudio completo, varios de esos enunciados se repetirán en el siguiente artículo.

## 8.2. DEFINICIONES Y PROPIEDADES

Resolver la ecuación cuadrática $x^2 + 1 = 0$, es buscar un número que satisfaga la condición de que $x^2 = -1$, que es un número negativo. Pero según la regla de los signos de la multiplicación de números reales (Art. 2.5), sabemos que todo número real tiene la propiedad de que su cuadrado es un número real no negativo.

Por tanto, el número $x$ que es solución de $x^2 + 1 = 0$ no puede ser un número real. Para que sea posible la resolución de la ecuación, introducimos un nuevo número dado por la definición siguiente:

**Definición.** La cantidad $\sqrt{-1}$ se llama la *unidad imaginaria.* Se la representa con el símbolo $i$ y tiene la propiedad de que $i^2 = -1$.

Para representar la raíz cuadrada de un número negativo distinto de $-1$, introducimos una nueva clase de números definidos así:

**Definición** Un número de la forma $bi$, en donde $b$ es cualquier número real e $i$ es la unidad imaginaria, recibe el nombre de *número imaginario puro.*

En relación con nuestro estudio de la ecuación cuadrática (Art. 5.5), vimos que bajo ciertas condiciones las raíces de tal ecuación son números expresados como la suma de un número real y un número imaginario puro. En consecuencia tenemos:

**Definición.** Un número de la forma $a + bi$, en donde $a$ y $b$ son números reales e $i$ es la unidad imaginaria, se llama un *número complejo.*

Si $a = 0$ pero $b \neq 0$, el número complejo $a + bi$ toma la forma $bi$ lo que significa que los números imaginarios puros son un caso particular de los números complejos.

Si $b = 0$, el número complejo $a + bi$ toma la forma $a$, que es un número real. Podemos recordar que a este respecto, al final del Art. 1.4, ya dijimos que un número real es simplemente un caso particular de un número complejo; en consecuencia, el conjunto de todos los números reales es un *subconjunto* del conjunto de los números complejos.

**Definición.** Se dice que dos números complejos $a + bi$ y $c + di$ son *iguales* si y sólo si $a = c$ y $b = d$.

Como una consecuencia inmediata de esta definición, se tiene que $a + bi = 0$ solamente si $a = 0$ y $b = 0$.

Veamos una aplicación de esta definición.

**Ejemplo.** Hallar los valores reales de $x$ y $y$ que cumplen con la siguiente igualdad:

$$x^2 + 2y^2 + xi + yi = xy + 7 + 3i.$$

SOLUCION. Primero ordenamos los términos de modo que cada miembro sea un número complejo en la forma $a + bi$. Así tenemos:

$$(x^2 + 2y^2) + (x + y)i = (xy + 7) + 3i.$$

Ahora, por la definición de igualdad de dos números complejos, igualando las partes reales e imaginarias entre sí, tenemos

$$\begin{aligned} x^2 + 2y^2 &= xy + 7, \\ x + y &= 3. \end{aligned}$$

Por el método del Art. 5.12 se calcula inmediatamente que las soluciones de este sistema son $x = 1$, $y = 2$ y $x = {}^{11}\!/_4$, $y = {}^1\!/_4$, que corresponden a los valores buscados.

Hemos observado anteriormente (Art. 6.1) que la relación de orden de los números reales no es aplicable a los números complejos, es decir, no tiene sentido hablar de que un número complejo es mayor o menor que otro. En consecuencia, no se puede asignar un signo a un número complejo dado (Art. 2.4). Pero sí existe el negativo de un número complejo, dado por la siguiente definición:

**Definición.** El *negativo* del número complejo $a + bi$ es $-a - bi$. Por ejemplo, $-5i$ es el negativo de $5i$ y $4 - 3i$ es el negativo de $-4 + 3i$.

Finalmente tenemos:

**Definición.** Dos números complejos que sólo difieren en el signo de sus partes imaginarias se llaman *números complejos conjugados.*

Así, $a + bi$ y $a - bi$ son números complejos conjugados.

## 8.3. OPERACIONES FUNDAMENTALES

Las cuatro operaciones de adición, sustracción, multiplicación y división se llaman las *operaciones fundamentales.* Cuando estas operaciones se aplican a números complejos sus definiciones son tales que obedecen todas las leyes del álgebra, tal como se mencionaron en el Capítulo 2 para números reales, con dos excepciones. Una excepción se ha observado ya, a saber, que $i^2 = -1$, que es una propiedad que no poseen los números reales. La otra excepción es la siguiente ley de los números reales:

$$\text{Para } a > 0 \quad \text{y} \quad b > 0, \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}.$$

Esta ley no es válida para los números imaginarios. Así tenemos,

$$\text{para} \quad a > 0 \text{ y } b > 0, \sqrt{-a} \cdot \sqrt{-b} \neq \sqrt{(-a)(-b)} = \sqrt{ab}.$$

El resultado correcto se obtiene como sigue:

$$\sqrt{-a} \cdot \sqrt{-b} = (\sqrt{a}i)(\sqrt{b}i) = i^2\sqrt{ab} = -\sqrt{ab}.$$

Para evitar este error siempre escribiremos los números complejos en la forma $a + bi$, la cual se llama a veces la *forma canónica*, y haremos operaciones con $i$ como con cualquier otra literal, reemplazando al final las potencias de $i$ como sigue: $i^2 = -1$, $i^3 = i^2 \cdot i = -i$, $i^4 = (i^2)^2 = (-1)^2 = 1$, $i^5 = i^4 \cdot i = i$, etcétera.

Ahora vamos a dar las definiciones de las cuatro operaciones fundamentales para dos números complejos cualesquiera $a + bi$ y $c + di$, sobrentendiéndose que el resultado final también quedará expresado en la forma canónica de un número complejo.

(1) *Adición.* Para sumar dos (o más) números complejos, se suman separadamente las partes reales e imaginarias del mismo modo como se reducen los términos semejantes en la adición de expresiones algebraicas ordinarias (Art. 2.4). Así tenemos:

$$(a + bi) + (c + di) = a + c + bi + di,$$

o sea
$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i,$$

esta última igualdad constituye la *definición para la suma de dos números complejos.*

(2) *Sustracción.* Para restar un número complejo de otro, se restan las partes reales e imaginarias separadamente. Así tenemos:

$$(a + bi) - (c + di) = a - c + bi - di,$$

o sea
$$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i,$$

y esta última igualdad constituye la *definición de la diferencia de dos números complejos.*

(3) *Multiplicación.* El producto de dos números complejos se obtiene multiplicándolos como binomios ordinarios y luego reemplazando $i^2$ por $-1$. Así tenemos,

$$(a + bi)(c + di) = ac + adi + bci + bdi^2,$$

o sea
$$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i,$$

siendo esta igualdad la *definición del producto de dos números complejos.*

(4) *División.* Para expresar el cociente de dos números complejos como un solo número complejo, utilizamos un proceso análogo a la racionalización de un denominador con radicales en una fracción (Art. 2.14). En este caso, utilizamos el conjugado del denominador en lugar del factor de racionalización. Así tenemos

$$\frac{a + bi}{c + di} = \frac{a + bi}{c + di} \cdot \frac{c - di}{c - di}$$
$$= \frac{ac - adi + bci - bdi^2}{c^2 - d^2i^2} = \frac{(ac + bd) + (bc - ad)i}{c^2 + d^2},$$

o sea $$\frac{a+bi}{c+di}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i, \qquad c+di\neq 0,$$

siendo esta última igualdad la *definición del cociente de dos números complejos.*

Al efectuar las operaciones fundamentales con números complejos, se recomienda no utilizar las definiciones anteriores como fórmula. En lugar de esto, se deben usar los métodos empleados en la obtención de estas definiciones, como se muestra en los siguientes ejemplos.

**Ejemplo 1.** Efectuar la operación indicada en cada una de las siguientes expresiones y dar el resultado en la forma canónica:

(a) $3+2\sqrt{-2}-2(\sqrt{-3}-1)+2i-4.$
(b) $(2+3i)(2-3i)(1+2i).$

SOLUCION. (a) Siempre que sea necesario expresamos primeramente todos los términos imaginarios en la firma $bi$. Así tenemos,

$$3+2\sqrt{-2}-2(\sqrt{-3}-1)+2i-4=3+2\sqrt{2}i-2(\sqrt{3}i-1)+2i-4=3+2\sqrt{2}i-2\sqrt{3}i+2+2i-4=(3+2-4)+(2\sqrt{2}-2\sqrt{3}+2)i=1+(2\sqrt{2}-2\sqrt{3}+2)i.$$

(b) Aquí los dos primeros factores forman un producto notable (Artículo 2.6) y podemos escribir

$$\begin{aligned}(2+3i)(2-3i)(1+2i)&=(4-9i^2)(1+2i)=(4-9[-1])(1+2i)\\&=13(1+2i)=13+26i.\end{aligned}$$

**Ejemplo 2.** Calcular $(\sqrt{3}-i)^6$ utilizando el teorema del binomio y expresar el resultado en la forma canónica.

SOLUCION. Al desarrollar por el teorema del binomio consideraremos a $i$ como una literal ordinaria y, al final, reemplazaremos las diversas potencias de $i$ por sus valores. Así tendremos:

$$\begin{aligned}(3^{1/2}-i)^6 &= (3^{1/2})^6+6(3^{1/2})^5(-i)+15(3^{1/2})^4(-i)^2\\&+20(3^{1/2})^3(-i)^3+15(3^{1/2})^2(-i)^4+6(3^{1/2})(-i)^5\\&+(-i)^6=3^3-6\cdot 3^2\sqrt{3}i+15\cdot 3^2i^2-20\cdot 3\sqrt{3}i^3\\&+15\cdot 3i^4-6\sqrt{3}i^5+i^6=27-54\sqrt{3}i-135\\&+60\sqrt{3}i+45-6\sqrt{3}i-1=(27-135\\&+45-1)+(-54\sqrt{3}+60\sqrt{3}-6\sqrt{3})i=-64.\end{aligned}$$

Nótese que hemos tomado $i^5=i^4\cdot i=i$ e $i^6=i^4\cdot i^2=i^2=-1$. También observemos que $\sqrt{3}-i$ resulta ser la raíz sexta de $-64$.

**Ejemplo 3.** Expresar $\frac{1+i}{1-i}-\frac{2-i}{2+2i}$ en la forma canónica de los números complejos.

SOLUCION. Aquí operaremos separadamente con cada una de las fracciones. Aplicando el mismo método que ha conducido a la definición del cociente de dos números complejos, aquí multiplicaremos el numerador y el denominador por el conjugado del denominador. Así tenemos:

$$\frac{1+i}{1-i}=\frac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\frac{1+2i+i^2}{1-i^2}=\frac{2i}{2}=i.$$

$$\frac{2-i}{2+2i}=\frac{(2-i)(2-2i)}{(2+2i)(2-2i)}=\frac{4-4i-2i+2i^2}{4-4i^2}=\frac{2-6i}{8}=\frac{1-3i}{4}$$

$$=\frac{1}{4}-\frac{3}{4}i.$$

Por lo tanto $\frac{1+i}{1-i}-\frac{2-i}{2+2i}=i-\left(\frac{1}{4}-\frac{3}{4}i\right)=-\frac{1}{4}+\frac{7}{4}i.$

## EJERCICIOS. GRUPO 26

En cada uno de los ejercicios 1-8, calcular los valores reales de $x$ y $y$ que cumplen con la relación dada.

1. $x+yi=2-3i$. 2. $3x-2yi=6+4i$.
3. $x+3y+(2x-3y-9)i=0$. 4. $2x-y+(3y-2x)i=2-2i$.
5. $(x+yi)^2=3-4i$. 6. $(x-yi)^2=-8-6i$.
7. $x^2-4y+(2y-x)i=2-i$. 8. $x^2+y^2-2+(x+3y-2)i=0$.

En cada uno de los ejercicios 9-34, efectuar las operaciones indicadas y expresar el resultado en la forma canónica.

9. $(1+i)+(3-2i)$. 10. $(4-5i)+(2+7i)$.
11. $(2+\sqrt{-4})-(3-\sqrt{-9})$. 12. $(3+2i)-(6-4i)$.
13. $\sqrt{-4}-\sqrt{-9}+\sqrt{-16}$. 14. $2\sqrt{-36}-\sqrt{-49}+7$.
15. $\sqrt{-a^2}+\frac{1}{2}\sqrt{-4a^2}-\frac{1}{3}\sqrt{-9a^2}$.
16. $\frac{1}{2}\sqrt{-16a^2}+\frac{1}{a}\sqrt{-4a^4}-\sqrt[3]{-27}$.
17. $(3+2i)(3-2i)$. 18. $(4-3i)(3+4i)$.
19. $(1+i)(1-2i)(1+3i)$. 20. $(3-i)(2+i)(7-i)$.
21. $(\sqrt{-3}+\sqrt{-2}-\sqrt{-1})(\sqrt{-3}+\sqrt{-2}+\sqrt{-1})$.
22. $(\sqrt{-1}+\sqrt{-2}-\sqrt{-3})(\sqrt{-1}-\sqrt{-2}+\sqrt{-3})$.
23. $(1-i)^4$. 24. $\left(-\frac{3}{2}+\frac{3}{2}\sqrt{3i}\right)^3$. 25. $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^6$.
26. $\frac{5}{\sqrt{-3}}$. 27. $\frac{1}{1-2i}$. 28. $\frac{3}{2-i}$.

29. $\dfrac{3 - i}{1 + i}$. 30. $\dfrac{2 - i}{1 + 2i}$. 31. $\dfrac{i^5 + 3}{i^3 - 1}$.

32. $(1 - 2i)^{-2}$. 33. $(1 + i)^{-1} - i^{-1}$. 34. $(1 + i)^{-2} - i^{-2}$.

35. Demostrar que el número complejo $1 + \sqrt{3}i$ es una raíz de la ecuación $2x^4 - 7x^3 + 12x^2 - 8x - 8 = 0$.

36. Demostrar que el número complejo $1 - \sqrt{3}i$ también es una raíz de la ecuación del ejercicio 35.

37. Demostrar que cada uno de los números complejos $-\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{3}{2}}i$ y $-\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{3}{2}}i$ son una raíz cúbica de la unidad.

38. Demostrar que cualquiera de las dos raíces cúbicas complejas de la unidad, mencionadas en el ejercicio 37, es igual al cuadrado de la otra.

39. Por factorización, obtener las cuatro raíces de la ecuación $x^4 - 16 = 0$ y demostrar que su suma es igual a cero.

40. Demostrar que el número complejo $a + bi$ es igual a cero si y sólo si $a = 0$ y $b = 0$.

41. Demostrar que la suma de cualquier número complejo con su negativo es igual a cero.

42. Demostrar que la operación de restar un número complejo $z_1$ de otro número complejo $z_2$ es equivalente a la operación de sumar $z_2$ al negativo de $z_1$.

43. Si $n$ y $k$ son enteros positivos tales que $n = 4k + m$, en donde $m = 1$, 2 ó 3, demostrar que $i^n = i^m$.

44. Si tanto $a$ como $b$ son números positivos, demostrar que $\pm\sqrt{a}\cdot\sqrt{-b} = \pm\sqrt{ab}i$, $(-\sqrt{a})(-\sqrt{-b}) = \sqrt{ab}i$, $\sqrt{-a}(-\sqrt{-b}) = \sqrt{ab}$.

45. Obtener definiciones para la suma, diferencia, producto y cociente de dos números imaginarios puros $bi$ y $di$, en forma análoga a las definiciones dadas para números complejos $a + bi$ y $c + di$ (Art. 8.3).

46. Si el número complejo $c + di \neq 0$, demostrar que $c^2 + d^2 \neq 0$ y que, por tanto, el resultado obtenido en la definición del cociente de dos números complejos (Art. 8.3) es válido.

47. Demostrar que el conjugado de la suma de dos números complejos es igual a la suma de dos conjugados.

48. Demostrar que el conjugado del producto de dos números complejos es igual al producto de sus conjugados.

49. Demostrar que la suma y el producto de dos números complejos conjugados producen números reales y que su diferencia es un número imaginario puro.

50. Demostrar que si la suma y el producto de dos números complejos son números reales, entonces dichos complejos son conjugados.

## 8.4. REPRESENTACION RECTANGULAR

Hemos visto anteriormente que los números reales pueden representarse geométricamente como puntos en una línea recta (Art. 3.7). Pero tratándose del número complejo $x + yi$, se hace necesario representar tanto al número real $x$ como al número imaginario puro $yi$. Esto puede hacerse usando un sistema de coordenadas rectangulares (Art. 3.8), representando en el eje $X$ a los números reales y en el eje $Y$ a los números imaginarios puros. Así, como se indica en la figura 25, el número complejo $x + yi$ queda representado gráficamente por el punto $P$, el cual está a una distancia de $x$ unidades del eje $Y$ y a una distancia de $y$ unidades del eje $X$. Ya que el convenio de signos para el sistema de coordenadas rectangulares debe conservarse, entonces el punto $P$ tiene como coordenadas rectangulares al par de números *reales* $(x, y)$. Bajo esta base obtenemos los puntos $P_1$, $P_2$, $P_3$ (fig. 25) que representan, respectivamente, a los números complejos $2 - 3i$, $-1 + 3i$, $-2i$. Se acostumbra referirse al eje $X$ con el nombre de *eje de los números reales* y al eje $Y$ con el de *eje de los números imaginarios.*

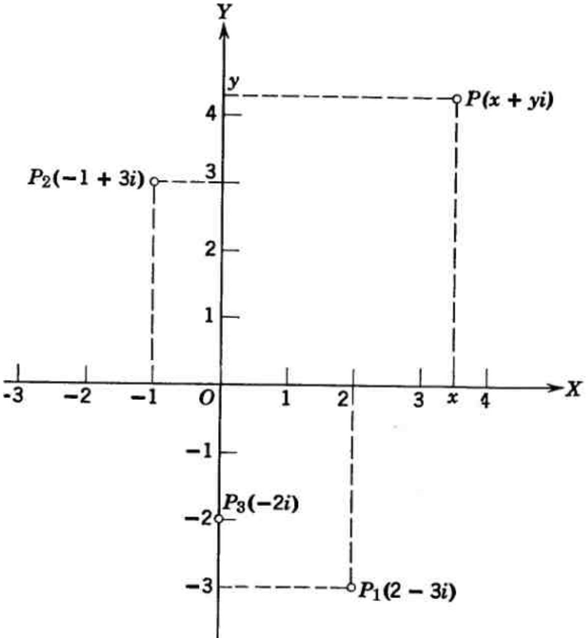


FIG. 25

Debido a esta representación, el número complejo $x + yi$, que dijimos se llamaba la forma canónica de un número complejo (Art. 8.3), ahora puede también recibir el nombre de *forma rectangular*. Este último término es particularmente conveniente cuando se desea distinguir entre la representación rectangular de un número complejo y su representación polar, que estudiaremos en el artículo siguiente.

NOTA 1. Ya que los números reales son de una naturaleza diferente a la de los números imaginarios puros, resulta lógico representarlos gráficamente en ejes distintos. Pero no es tan inmediata la razón por la cual estos ejes deben formar un ángulo recto como sucede con el eje $X$ y el eje $Y$ en un sistema de coordenadas rectangulares. Ahora justificaremos esta forma de proceder.

Consideremos, como se muestra en la figura 26, un segmento dirigido $OA$ a lo largo del lado positivo del eje $X$ y con una longitud igual a una unidad, tomada arbitrariamente, de modo que el punto $A$ represente a la unidad entera y positiva 1. Introduzcamos ahora un operador, designado por la letra $j$, que tiene la propiedad de que cuando se multiplica por un segmento dirigido hace girar al segmento alrededor de $O$ un ángulo de 90° en sentido contrario a las manecillas del reloj, pero no cambia la longitud del segmento. Es decir, multiplicar el segmento dirigido $OA$ por $j$, equivale a dar a $OA$ un giro de 90° alrededor de $O$ en sentido contrario a las manecillas del reloj, de modo de que queda en la posición $OB$, en el lado del eje $Y$, representando el punto $B$ la cantidad $j \times 1 = j$. Análogamente, aplicando $j$ a $OB$, obtenemos el segmento dirigido $OC$ en el lado negativo del eje $X$, en donde el punto $C$ representa la cantidad $j \times j = j^2$. De la misma manera, aplicando $j$ a $OC$, obtenemos $OD$ en el lado negativo del eje $Y$, representando el punto $D$ la cantidad $j \times j^2 = j^3$. Finalmente, aplicando $j$ a $OD$, volvemos a la posición inicial $OA$, lo que significa que el punto $A$ también representa a la cantidad $j \times j^3 = j^4$.

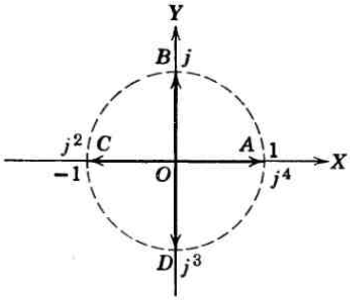


FIG. 26.

Ahora podemos determinar la naturaleza del operador $j$ considerando las diversas posiciones que toma el segmento unitario dirigido $OA$ en el estudio anterior. Ya que $A$ representa 1 en el eje $X$, $C$ representa —1, es decir, $j^2 = -1$. Análogamente $B$ representa $j$ en el eje $Y$, entonces $D$ representa $-j$, es decir $j^3 = -j$. Para el punto $A$ tenemos también $j^4 = 1$. Pero todas estas relaciones son precisamente las propiedades de la unidad imaginaria $i$, por lo tanto el operador $j$ y la unidad imaginaria $i$ son idénticos; esto explica por qué los números imaginarios puros se representan por puntos en el eje $Y$.

Consideremos ahora la *representación geométrica de la suma de dos números complejos*. Representemos con los puntos $P_1(a, b)$ y $P_2(c, d)$ los números complejos $a + bi$ y $c + di$, respectivamente, como se muestra en la figura 27. Unamos cada uno de estos puntos con el origen $O$ y completemos el paralelogramo $OP_1PP_2$ que tiene a $OP_1$ y $OP_2$ como lados adyacentes. Sean $A$, $B$ y $C$, respectivamente, los pies de las perpendiculares bajadas de $P_2$, $P_1$, y $P$ al eje $X$, y trácese $P_1D$ perpendicular a $PC$. Por geometría, los triángulos rectángulos $OP_2A$ y $P_1PD$ son iguales resultando $OA = P_1D = BC$ y $AP_2 = DP$. Entonces tenemos:

$$OC = OB + BC = OB + P_1D = OB + OA = a + c.$$
$$CP = CD + DP = BP_1 + AP_2 = b + d.$$

Por tanto, el punto $P$ representa al número complejo $(a + c) + (b + d)i$, que es la suma de los dos números complejos $a + bi$ y $c + di$.

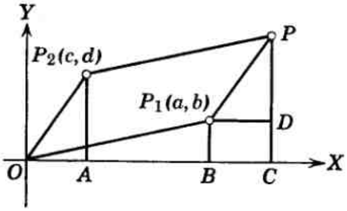


Fig. 27.

Para efectuar gráficamente la *sustracción* de un número complejo de otro, digamos $c + di$ de $a + bi$, sumamos los números complejos $a + bi$ y $-c - di$, usando el método que acabamos de describir para la adición. Se deja como ejercicio trazar una figura análoga a la figura 27, que represente la *diferencia* de dos números complejos dados.

NOTA 2. Quien en física haya estudiado la suma de dos vectores por medio de un paralelogramo, reconocerá que esa operación es idéntica a la representación geométrica de la suma de dos números complejos. Se nota entonces que los números complejos y los vectores están íntimamente relacionados. Más adelante trataremos este punto (Art. 8.8).

NOTA 3. La representación geométrica del producto y el cociente de dos números complejos, puede hacerse en coordenadas rectangulares por medio de construcciones geométricas especiales. Sin embargo, como se muestra en el siguiente artículo, estas operaciones se estudian con más facilidad usando otro tipo de representación, conocida como la forma polar de un número complejo.

## 8.5. REPRESENTACION POLAR

Ahora introduciremos la forma trigonométrica de los números complejos, que presenta ciertas ventajas especiales sobre la forma rectangular. En la figura 28, sea $P$ el número complejo $x + yi$. Tracemos el segmento $OP$ que une $P$ con el origen y representemos su longitud con $r$.

Tracemos la perpendicular $PA$ de $P$ al eje $X$, y llamemos $\theta$ al ángulo $POA$. Entonces, por trigonometría (Apéndice I), en el triángulo rectángulo $OAP$ tenemos:

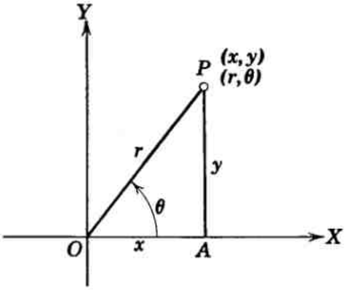


Fig. 28.

(1) $x = r\cos\theta, \quad y = r\operatorname{sen}\theta,$

(2) $r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad r \geq 0,$

(3) $\tan\theta = \dfrac{y}{x}, \quad x \neq 0.$

De la relación (1) podemos escribir

(4) $x + yi = r(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta).$

El segundo miembro de (4) se llama la *forma polar* del número complejo. La longitud $r$ se llama *módulo* o *valor absoluto* del número complejo y es siempre una cantidad no negativa cuyo valor está dado por (2). El ángulo $\theta$ se llama *amplitud* o el *argumento* del número complejo y, a menos que se especifique lo contrario $\theta$ quedará restringida al dominio $0 \leq \theta < 360°$.

NOTA 1. El módulo $r$ se llama también *valor absoluto* (Art. 2.4) del número complejo y podemos escribir $r = |x + iy|$.

Para un número complejo particular, el argumento $\theta$ tiene un valor único que es no negativo y menor que 360°, y que puede determinarse por las relaciones (1). También puede determinarse por la relación (3) y el cuadrante a que pertenece $\theta$. Observemos que la relación (3) tiene la restricción $x \neq 0$. Si $x = 0$ el número complejo $x + yi$ toma la forma de un número imaginario puro, de modo que $\theta = 90°$ si $y > 0$ y $\theta = 270°$ si $y < 0$. Es evidente que un número complejo y su representación gráfica quedan determinados en forma única para valores dados de $r$ y $\theta$.

En este artículo y en el siguiente consideraremos las operaciones de multiplicación, división, potenciación y radicación de números complejos dados en la forma polar. Por tanto, si nos dan números complejos en la forma rectangular es muy importante saber obtener correctamente sus formas polares. Veamos un ejemplo.

**Ejemplo 1.** Obtener el módulo, el argumento y la forma polar del número complejo $-2 + 2i$.

SOLUCION. Para reducir la posibilidad de error, siempre es preferible empezar por representar gráficamente el número complejo dado, como se muestra en la figura 29. Entonces su módulo es

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{4 + 4} = 2\sqrt{2}.$$

Para el argumento $\theta$ tenemos

$$\tan\theta = y/x = 2/-2 = -1,$$

de donde, ya que $\theta$ es un ángulo del segundo cuadrante, resulta $\theta = 135°$. La forma polar de $-2 + 2i$ es, pues,

$$2\sqrt{2}(\cos 135° + i \operatorname{sen} 135°).$$

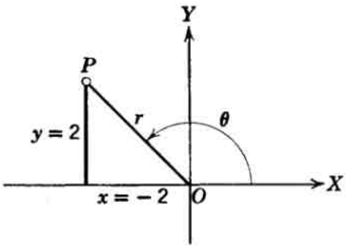


Fig. 29.

Como comprobación, podemos calcular las funciones trigonométricas que aparecen en esta forma polar y ver que se obtiene la forma rectangular dada. Esto se deja como ejercicio para el estudiante.

Ahora consideremos el producto de dos números complejos en la forma polar. Tendremos:

$$\begin{aligned}
&[r_1(\cos\theta_1 + i \operatorname{sen}\theta_1)][r_2(\cos\theta_2 + i \operatorname{sen}\theta_2)]\\
&\quad = r_1r_2(\cos\theta_1\cos\theta_2 + i\cos\theta_1\operatorname{sen}\theta_2 + i\operatorname{sen}\theta_1\cos\theta_2 + i^2\operatorname{sen}\theta_1\operatorname{sen}\theta_2)\\
&\quad = r_1r_2[(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \operatorname{sen}\theta_1\operatorname{sen}\theta_2) + i(\operatorname{sen}\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\operatorname{sen}\theta_2)]\\
&\quad = r_1r_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2)],
\end{aligned}$$

recordando las fórmulas para funciones trigonométricas de sumas de ángulos (Apéndice I).

Enunciamos este resultado en el teorema siguiente:

**Teorema 1.** *El módulo del producto de dos números complejos es igual al producto de sus módulos y el argumento del producto es igual a la suma de los argumentos.*

**Corolario.** *El módulo del producto de tres o más números complejos es igual al producto de los módulos de los factores y el argumento del producto es igual a la suma de los argumentos de los factores.*

**Ejemplo 2.** Calcular el producto de los números complejos $3(\cos 45° + i \operatorname{sen} 45°)$ y $2(\cos 30° + i \operatorname{sen} 30°)$ indicando gráficamente el proceso.

SOLUCION. Por el Teorema 1, tenemos: módulo del producto $= 2 \cdot 3 = 6$, y argumento $= 45° + 30° = 75°$. Por tanto, el producto en la forma polar es el número complejo $6(\cos 75° + i \operatorname{sen} 75°)$.

Los resultados se muestran en la figura 30 en donde los puntos $P_1$,

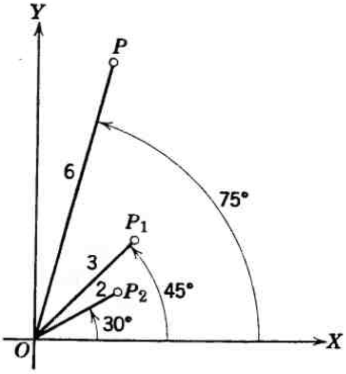


Fig. 30.

$P_2$ y $P$ representan el primer factor, segundo factor y producto, respectivamente.

Consideremos ahora el cociente de dos números complejos en forma polar. Tendremos:

$$\begin{aligned}\frac{r_1(\cos\theta_1 + i \operatorname{sen}\theta_1)}{r_2(\cos\theta_2 + i \operatorname{sen}\theta_2)} &= \frac{r_1}{r_2}\cdot\frac{\cos\theta_1 + i\operatorname{sen}\theta_1}{\cos\theta_2 + i\operatorname{sen}\theta_2}\cdot\frac{\cos\ \theta_2 - i\operatorname{sen}\theta_2}{\cos\ \theta_2 - i\operatorname{sen}\theta_2}\\ &= \frac{r_1}{r_2}\cdot\frac{\cos\theta_1\cos\theta_2 - i\cos\theta_1\operatorname{sen}\theta_2 + i\operatorname{sen}\theta_1\cos\theta_2 - i\operatorname{sen}\theta_1\operatorname{sen}\theta_2}{\cos^2\theta_2 - i^2\operatorname{sen}^2\theta_2}\\ &= \frac{r_1}{r_2}\cdot\frac{\cos\theta_1\cos\theta_2 + \operatorname{sen}\theta_1\operatorname{sen}\theta_2 + i(\operatorname{sen}\theta_1\cos\theta_2 - \cos\theta_1\operatorname{sen}\theta_2)}{\cos^2\theta_2 + \operatorname{sen}^2\theta_2 = 1}\\ &= \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\operatorname{sen}(\theta_1 - \theta_2)],\end{aligned}$$

por las fórmulas de las funciones trigonométricas para diferencia de ángulos(Apéndice I).

Enunciamos este resultado en el teorema siguiente:

**Teorema 2.** *El módulo del cociente de dos números complejos es igual al módulo del dividendo dividido entre el módulo del divisor, y la amplitud del cociente es igual a la amplitud del dividendo menos la del divisor.*

**Ejemplo 3.** Calcular el cociente indicado y expresar el resultado en la forma rectangular:

$$4(\cos 75^\circ + i\operatorname{sen} 75^\circ) \div 2(\cos 45^\circ + i\operatorname{sen} 45^\circ).$$

SOLUCION. Por el Teorema 2,

$$\begin{aligned}\frac{4(\cos 75^\circ + i\operatorname{sen} 75^\circ)}{2(\cos 45^\circ + i\operatorname{sen} 45^\circ)} &= \frac{4}{2}[\cos\ (75^\circ - 45^\circ)\ + i\operatorname{sen}(75^\circ - 45^\circ)]\\ &= 2(\cos 30^\circ + i\operatorname{sen} 30^\circ = \sqrt{3} + i.\end{aligned}$$

Se deja como ejercicio la interpretación geométrica.

NOTA 2. Si la amplitud de un número complejo es un ángulo notable tal como 30° ó 45°, o un múltiplo de estos ángulos, entonces la forma polar puede transformarse inmediatamente a la forma rectangular, y viceversa. Pero para otros ángulos, debe utilizarse una tabla de funciones trigonométricas naturales (Apéndice II).

## EJERCICIOS. GRUPO 27

En cada uno de los ejercicios 1-9 representar geométricamente el número complejo dado, su conjugado y su negativo.

1. $1 + 3i$.
2. $-2 + 2i$.
3. $-1 - 2i$.
4. $4 - 2i$.
5. $3i$.
6. $5 + \sqrt{-4}$.
7. $\sqrt{-9} + 1$.
8. $-3$.
9. $2i - 7$.

En cada uno de los ejercicios 10-23 efectuar las operaciones indicadas tanto algebraicamente como gráficamente.

10. $(1 - i) + (2 + 3i)$.
11. $(3 + 2i) + (-2 - i)$.
12. $(-2 - \sqrt{-4}) + (5 - 2i)$.
13. $(4 + \sqrt{-9}) + (1 - \sqrt{-16})$.
14. $(-1 + 2i) - (2 - 3i)$.
15. $(3i + 2) - (3 + 2i)$.
16. $(6 + \sqrt{-9}) - (3 - \sqrt{-4})$.
17. $(3 + 2i) + 5$.
18. $(3 + 2i) - 5$.
19. $(2 - 7i) + 4i$.
20. $(5 + i) + (-3 - 2i) + (1 + 3i)$.
21. $(2 - 4i) + (6 + i) + (-7 - i)$.
22. $(8 + i) + (1 - 3i) - (6 - 2i)$.
23. $(4 - 2i) - (2 + i) + (-2 - i)$.

En cada uno de los ejercicios 24-32, calcular el módulo y el argumento y hallar la forma polar del número complejo dado.

24. $1 + i$.
25. $-2 + 2\sqrt{3}i$.
26. $3 - 3\sqrt{3}i$.
27. $-\sqrt{3} - i$.
28. $\sqrt{2} + \sqrt{2}i$.
29. $-7$.
30. $2\sqrt{2} - 2\sqrt{2}i$.
31. $-4 - 4\sqrt{3}i$.
32. $3i$.

En cada uno de los ejercicios 33-36, calcular el producto indicado, utilizando el Teorema 1 del Art. 8.5, y expresar el resultado en forma rectangular.

33. $2(\cos 30° + i \operatorname{sen} 30°) \cdot 3(\cos 60° + i \operatorname{sen} 60°)$.
34. $3(\cos 45° + i \operatorname{sen} 45°) \cdot \sqrt{2}(\cos 90° + i \operatorname{sen} 90°)$.
35. $4(\cos 180° + i \operatorname{sen} 180°) \cdot \frac{1}{2}(\cos 30° + i \operatorname{sen} 30°)$.
36. $(\cos 20° + i \operatorname{sen} 20°) \cdot 4(\cos 100° + i \operatorname{sen} 100°)$.

En cada uno de los ejercicios 37-40 obtener el cociente indicado, usando el Teorema 2 del Art. 8.5, y expresar el resultado en forma rectangular.

37. $\dfrac{3(\cos 130° + i \operatorname{sen} 130°)}{2(\cos 70° + i \operatorname{sen} 70°)}$.
38. $\dfrac{5(\cos 135° + i \operatorname{sen} 135°)}{\cos 45° + i \operatorname{sen} 45°}$.
39. $\dfrac{6(\cos 220° + i \operatorname{sen} 220°)}{3(\cos 40° + i \operatorname{sen} 40°)}$.
40. $\dfrac{4(\cos 70° + i \operatorname{sen} 70°)}{2(\cos 50° + i \operatorname{sen} 50°)}$.

41. Mostrar cómo puede generalizarse el método para obtener gráficamente la suma de dos números complejos, al caso de la suma de tres o más números complejos.

42. Construir una figura que muestre el método gráfico para obtener la diferencia de dos números complejos. Explicar detalladamente cada paso como se hizo en el problema análogo de la adición (Art. 8.4).

43. Si el punto $P_1$ representa un número complejo y el punto $P_2$ representa el negativo de ese número, demostrar que el segmento de $P.P_2$ pasa por el origen $O$ y queda dividido por $O$ en dos partes iguales.

44. Demostrar que si un número complejo es igual a cero, entonces su módulo es cero, y recíprocamente.

45. Demostrar que un número complejo y su negativo tienen el mismo módulo.

46. Demostrar que un número complejo y su conjugado tienen el mismo módulo.

47. Demostrar algebraicamente que el módulo del producto de dos números complejos es igual al producto de sus módulos.

48. Demostrar algebraicamente que el módulo del cociente de dos números complejos es igual al cociente de sus módulos.

49. Demostrar que si dos números complejos son iguales, entonces sus módulos son iguales pero que el recíproco no es necesariamente verdadero.

50. Demostrar el Corolario del Teorema 1 (Art. 8.5).

51. Multiplicar cualquier número complejo dado en la forma polar por la unidad imaginaria $i$ dada en la forma polar y mostrar que el argumento del producto excede al del número complejo dado en 90°. Comparar este resultado con la definición del operador $j$ dada en el Art. 8.4.

En cada uno de los ejercicios 52-55 $z_1$ y $z_2$ representan, respectivamente, los números complejos $x_1 + y_1 i$ y $x_2 + y_2 i$.

52. Demostrar gráficamente que el módulo o valor absoluto de la suma de dos números complejos es igual o menor que la suma de sus módulos o valores absolutos, es decir

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|.$$

*Sugerencia:* La suma de dos lados de un triángulo es mayor que el tercer lado.

53. Demostrar gráficamente que el módulo o valor absoluto de la diferencia de dos números complejos es mayor o igual que la diferencia de sus módulos o valores absolutos, es decir

$$|z_1 - z_2| \geq |z_1| - |z_2|.$$

54. Demostrar algebraicamente el resultado del ejercicio 52 (véase el ejemplo 2 del Art. 6.6).

55. Demostrar algebraicamente el resultado del ejercicio 53. (Véase ejercicio 11 del grupo 23, Art. 6.6.)

## 8.6. POTENCIAS Y RAICES

Ahora consideraremos las dos operaciones algebraicas restantes, la potenciación y la extracción de raíces, aplicadas a números complejos. Ya que la potenciación es un caso especial de la multiplicación (Art. 1.3), podemos utilizar el Teorema 1 del Art. 8.5 referente a la multiplicación de dos números complejos. Como consecuencia de este teorema tenemos que si los dos números complejos son iguales a $r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$, entonces su producto está dado por la relación

$$[r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)]^2 = r^2(\cos 2\theta + i \operatorname{sen} 2\theta).$$

Es fácil también ver que

$$[r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)]^3 = r^3(\cos 3\theta + i \operatorname{sen} 3\theta).$$

Lo que nos hace pensar que para cualquier número entero y positivo $n$ tendremos

$$(1) \qquad [r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)]^n = r^n(\cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta)$$

La relación (1) se llama el *teorema de De Moivre* que vamos a demostrar usando el método de inducción matemática (Art. 7.2).

Es obvio que la relación es cierta para $n = 1$. Suponiendo ahora que sea cierta para $n = k$, tenemos

$$[r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)]^k = r^k(\cos k\theta + i \operatorname{sen} k\theta). \tag{2}$$

Multiplicando ambos miembros de (2) por $r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$, se obtiene

$$[r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)]^{k+1} = r^{k+1}[\cos (k + 1)\theta + i \operatorname{sen} (k + 1)\theta], \tag{3}$$

donde el segundo miembro de (3) es una consecuencia del Teorema 1 del Art. 8.5.

Pero la relación (3) que se obtuvo directamente de la relación (2) es la misma que se obtiene de la relación (1) cuando $n$ se reemplaza por $k + 1$. Por tanto, hemos demostrado que si se supone que (1) es válida para $n = k$, entonces también es válida para $n = k + 1$. Y como (1) es válida para $n = 1$, entonces vale para $n = 2$; si vale para $n = 2$, entonces vale para $n = 3$, y así sucesivamente para todos los valores enteros y positivos de $n$, tal como se quería demostrar. De aquí el teorema siguiente:

**Teorema 3.** *(Teorema de De Moivre). Si $n$ es cualquier número entero y positivo, y si $r$ y $\theta$ son, respectivamente, el módulo y el argumento o amplitud de cualquier número complejo, entonces*

$$[r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)]^n = r^n(\cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta),$$

*es decir, si $n$ es un entero positivo, el módulo de la enésima potencia de un número complejo es igual a la enésima potencia del módulo de ese número, y la amplitud de la enésima potencia es igual a $n$ veces la amplitud del número.*

**Ejemplo 1.** Calcular $(\sqrt{3} - i)^6$ usando el Teorema de De Moivre y expresar el resultado en la forma rectangular.

SOLUCION. Este problema es el mismo que se resolvió por medio del teorema del binomio en el ejemplo 2 del Art. 8.3. Comparando con ese ejemplo podremos apreciar la ventaja de utilizar la forma polar de los números complejos. Primero expresaremos $\sqrt{3} - i$ en la forma polar y luego aplicaremos el Teorema de De Moivre. Así tenemos

$$\begin{aligned}
&& (\sqrt{3} - \mathrm{i})^6 &= [2(\cos 330^\circ + i \operatorname{sen} 330^\circ)]^6,\\
&\text{Por el Teorema de De Moivre} && = 2^6(\cos 1980^\circ + i \operatorname{sen} 1980^\circ),\\
&\text{por trigonometría} && = 64(\cos 180^\circ + i \operatorname{sen} 180^\circ),\\
&&& = 64(-1 + 0) = -64.
\end{aligned}$$

Consideremos ahora la radicación o extracción de raíces de un número complejo.

Sean $n$ un número entero y positivo, $r$ un número positivo y $r^{1/n}$ su raíz principal *enésima* que es también un número positivo único (Artículo 2.13). Consideremos un número complejo con módulo $r^{1/n}$ y amplitud $\theta/n$ de modo que su forma polar sea $r^{1/n}\left(\cos\frac{\theta}{n} + i \operatorname{sen}\frac{\theta}{n}\right)$. La enésima potencia de este número será $r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$ según el Teorema 3 (Teorema de De Moivre) es decir,

$$r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta) = \left[r^{1/n}\left(\cos\frac{\theta}{n} + i \operatorname{sen}\frac{\theta}{n}\right)\right]^n.$$

Extrayendo la raíz enésima en ambos miembros tenemos

$$(4) \qquad [r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)]^{1/n} = r^{1/n}\left(\cos\frac{\theta}{n} + i \operatorname{sen}\frac{\theta}{n}\right),$$

lo que significa que el Teorema de De Moivre es también válido para el exponente $1/n$ que representa el recíproco de cualquier entero positivo.

La fórmula (4) así obtenida, nos da solamente una raíz enésima del número complejo. Ahora veremos cómo pueden obtenerse todas sus raíces enésimas. Recordemos que los valores de las funciones trigonométricas de un ángulo cualquiera no se alteran si el ángulo aumenta o disminuye en un múltiplo entero positivo de 360°. Por tanto, para cualquier número complejo, si $k$ es un número entero no negativo podemos escribir

$$r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta) = r[\cos(\theta + k\cdot 360^\circ) + i \operatorname{sen}(\theta + k\cdot 360^\circ)],$$

en donde el segundo miembro es llamado a veces la *forma polar completa* o *general* del número complejo. Extrayendo la raíz enésima en ambos miembros de acuerdo con la fórmula (4), tenemos

(5)

$$[r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)]^{1/n} = r^{1/n}\left[\cos\frac{\theta + k\cdot 360^\circ}{n} + i \operatorname{sen}\frac{\theta + k\cdot 360^\circ}{n}\right].$$

Si en (5) hacemos $k = 0, 1, 2, 3, \ldots, n - 1$ sucesivamente, obtenemos las siguientes $n$ raíces enésimas distintas de $r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$.

Para

$$k = 0, \qquad r^{1/n}\left[\cos\frac{\theta}{n} + i \operatorname{sen}\frac{\theta}{n}\right],$$

$$k = 1, \qquad r^{1/n}\left[\cos\frac{\theta + 360^\circ}{n} + i \operatorname{sen}\frac{\theta + 360^\circ}{n}\right],$$

$$k = 2, \qquad r^{1/n}\left[\cos\frac{\theta + 2\cdot 360^\circ}{n} + i \operatorname{sen}\frac{\theta + 2\cdot 360^\circ}{n}\right],$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$$k = n - 1, \quad r^{1/n}\left[\cos\frac{\theta + (n-1)\,360^\circ}{n} + i \operatorname{sen}\frac{\theta + (n-1)\,360^\circ}{n}\right].$$

Estas $n$ raíces son todas diferentes debido a que los argumentos o amplitudes de dos cualesquiera de ellas difieren en menos de 360°. Además, no hay más que $n$ raíces distintas debido a que al asignar a $k$ valores mayores que $n - 1$, obtenemos de nuevo las mismas raíces. Así, por ejemplo, para $k = n$, la raíz toma la forma

$$r^{1/n}\left[\cos\left(\frac{\theta}{n} + 360^\circ\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{n} + 360^\circ\right)\right]$$

que es idéntica a la raíz obtenida para $k = 0$.

Además observamos, que ya que todas las $n$ raíces tienen el mismo módulo $r^{1/n}$ y que para valores sucesivos de $k$ las amplitudes difieren en $360^\circ/n$, entonces la representación gráfica de estas raíces consiste en puntos igualmente espaciados en la circunferencia con centro en el origen y cuyo radio es igual al módulo común $r^{1/n}$.

Los resultados anteriores se resumen en el teorema siguiente:

**Teorema 4.** *Todo número (excepto el cero), real o complejo, tiene exactamente n raíces enésimas diferentes.*

*Si el módulo y el argumento de un número cualquiera se representan con r y θ, respectivamente, entonces las n raíces están dadas por la expresión.*

$$r^{1/n}\left[\cos\frac{\theta + k\cdot 360^\circ}{n} + i \operatorname{sen}\frac{\theta + k\cdot 360^\circ}{n}\right]$$

*en donde $r^{1/n}$ representa la raíz enésima principal del número positivo r, y k toma sucesivamente los valores* $0, 1, 2, \ldots, (n-1)$.

*Gráficamente estas raíces son los vértices de un polígono regular de n lados inscrito en una circunferencia con centro en el origen y de radio $r^{1/n}$.*

Con esto se ha demostrado que el Teorema de De Moivre es válido cuando el exponente $n$ es cualquier número entero y positivo o el recíproco de cualquier número entero y positivo. Puede demostrarse que también es válido cuando $n$ es un entero negativo cualquiera o un número racional cualquiera. Las demostraciones para estos dos últimos casos se dejan como ejercicio.

NOTA 1. El Teorema de De Moivre es válido para cualquier exponente $n$, real o complejo. La demostración para valores de $n$ no racionales es un tema fuera del alcance de este libro.

**Ejemplo 2.** Calcular las cuatro raíces cuartas de $-8 + 8\sqrt{3}i$ y representarlas gráficamente.

SOLUCION. Primero obtendremos la forma polar del número complejo dado. Resulta:

$$-8 + 8\sqrt{3}i = 16(\cos(120^\circ + i \operatorname{sen} 120^\circ),$$

y usando la forma polar general, tenemos

$$-8 + 8\sqrt{3}i = 16[\cos(120^\circ + k \cdot 360^\circ) + i \operatorname{sen}(120^\circ + k \cdot 360^\circ)].$$

Por el Teorema 4, la expresión para las raíces cuartas es

$$16^{1/4}\left[\cos\frac{120^\circ + k \cdot 360^\circ}{4} + i \operatorname{sen}\frac{120^\circ + k \cdot 360^\circ}{4}\right]$$
$$= 2[\cos(30^\circ + k \cdot 90^\circ) + i \operatorname{sen}(30^\circ + k \cdot 90^\circ)].$$

Asignando sucesivamente a $k$ los valores 0, 1, 2, 3, obtenemos las cuatro raíces pedidas:

$k = 0,$

$2(\cos 30^\circ + i \operatorname{sen} 30^\circ) = \sqrt{3} + i,$

$k = 1,$

$2(\cos 120^\circ + i \operatorname{sen} 120^\circ) = -1 + \sqrt{3}i,$

$k = 2,$

$2(\cos 210^\circ + i \operatorname{sen} 210^\circ) = -\sqrt{3} - i,$

$k = 3,$

$2(\cos 300^\circ + i \operatorname{sen} 300^\circ) = 1 - \sqrt{3}i.$

Estas raíces están representadas gráficamente en la figura 31 por los puntos $P_0$, $P_1$, $P_2$, $P_3$, en donde los subíndices coinciden con los valores asignados a $k$. Estos puntos están en la circunferencia con centro en el origen $O$ y radio 2, que es el módulo común a las raíces. Además, se observa que estos puntos son los vértices de un cuadrado inscrito en el círculo.

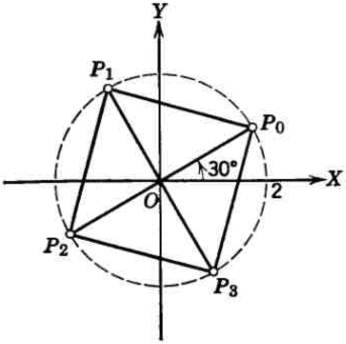


FIG. 31.

**Ejemplo 3.** Calcular todas las raíces de la ecuación $x^3 - 1 = 0$ usando dos métodos: (a) por el Teorema de De Moivre y (b) algebraicamente.

SOLUCION. (a) La solución de esta ecuación requiere la determinación de las tres raíces cúbicas de la unidad. Por tanto, procederemos como en el ejemplo anterior. Así tenemos

$$1 = 1(\cos 0^\circ + i \operatorname{sen} 0^\circ) = \cos k \cdot 360^\circ + i \operatorname{sen} k \cdot 360^\circ.$$

Por el Teorema 4, la fórmula que da las raíces cúbicas es

$$\cos \frac{k \cdot 360^\circ}{3} + i \operatorname{sen} \frac{k \cdot 360^\circ}{3} = \cos k \cdot 120^\circ + i \operatorname{sen} k \cdot 120^\circ.$$

Las tres raíces cúbicas serán

para $k = 0, \qquad \cos 0^\circ + i \operatorname{sen} 0^\circ = 1,$

$k = 1, \qquad \cos 120^\circ + i \operatorname{sen} 120^\circ = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i,$

$k = 2, \qquad \cos 240^\circ + i \operatorname{sen} 240^\circ = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i.$

(b) La ecuación $x^3 - 1 = 0$ puede resolverse inmediatamente por factorización.

Así tenemos $\qquad (x - 1)(x^2 + x + 1) = 0.$

El primer factor da la raíz $x = 1$.

Igualando a cero el segundo factor y utilizando la fórmula de la ecuación de segundo grado, tenemos

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4}}{2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i.$$

NOTA 2. Hemos visto que si aplicamos cualquiera de las seis operaciones del álgebra a los números complejos, el resultado es siempre un número complejo, es decir, el sistema de los números complejos es suficiente para nuestra álgebra. En relación con ésto se aconseja que el estudiante vuelva a leer el último párrafo del Art. 1.4.

## EJERCICIOS. GRUPO 28

En los ejercicios de este grupo las amplitudes o argumentos son ángulos notables cuyas funciones trigonométricas pueden calcularse sin el uso de tablas. Los resultados finales pueden pasarse a la forma rectangular o dejarse en la forma polar.

En cada uno de los ejercicios 1-12, calcular la potencia indicada usando el Teorema de De Moivre.

1. $[2(\cos 15^\circ + i \operatorname{sen} 15^\circ)]^3$. 2. $[\sqrt{2}(\cos 30^\circ + i \operatorname{sen} 30^\circ)]^4$.
3. $[\sqrt{3}(\cos 15^\circ + i \operatorname{sen} 15^\circ)]^6$. 4. $[2(\cos 45^\circ + i \operatorname{sen} 45^\circ)]^4$.
5. $[\sqrt{5}(\cos 20^\circ + i \operatorname{sen} 20^\circ)]^4$. 6. $[2\tfrac{1}{4}(\cos 150^\circ + i \operatorname{sen} 150^\circ)]^8$.
7. $(1 + i)^6$. 8. $(-1 + \sqrt{3}i)^4$. 9. $(1 - i)^{-3}$.
10. $(-\sqrt{3/2} - 1/2 i)^7$. 11. $(-\sqrt{3/2} + 1/2 i)^9$. 12. $(-\sqrt{2/2} \quad \sqrt{2/2} i)^{12}$.

En cada uno de los ejercicios 13-18, calcular la potencia indicada usando (a) el teorema del binomio; (b) el Teorema de De Moivre.

13. $(1 - \sqrt{3}i)^3$. 14. $(-1 + i)^4$. 15. $(\sqrt{3} - i)^8$.
16. $(\frac{1}{2} + \sqrt{3/2}\,i)^7$. 17. $(-1 + \sqrt{3}i)^5$. 18. $(-1 - \sqrt{3}i)^6$.

En cada uno de los ejercicios 19-31, calcular las raíces que se indican y representarlas gráficamente.

19. Las tres raíces cúbicas de $-27$.
20. Las tres raíces cúbicas de $8(\cos 60^\circ + i \operatorname{sen} 60^\circ)$.
21. Las tres raíces cúbicas de $-2 + 2i$
22. Las cuatro raíces cuartas de $-8 - 8\sqrt{3}i$.
23. Las cuatro raíces cuartas de $-4$.
24. Las cuatro raíces cuartas de $4 - 4\sqrt{3}i$.
25. Las cinco raíces quintas de $32$.
26. Las cinco raíces quintas de $-16 - 16\sqrt{3}i$.
27. Las seis raíces sextas de $27i$.
28. Las seis raíces sextas de $1 + \sqrt{3}i$.
29. Las ocho raíces octavas de $-128 + 128\sqrt{3}i$.
30. Las ocho raíces octavas de $-\frac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$.
31. Las nueve raíces novenas de $-i$.

En cada uno de los ejercicios 32-37 calcular todas las raíces de la ecuación dada usando el Teorema de De Moivre y también algebraicamente.

32. $x^3 + 8 = 0$. 33. $x^6 - 1 = 0$. 34. $x^6 - 64 = 0$.
35. $x^4 - 1 = 0$. 36. $x^4 - 16 = 0$. 37. $x^3 - 27 = 0$.

38. Explicar por qué el número cero está excluído en el enunciado del Teorema 4 (Art. 8.6).

39. Demostrar que el Teorema de De Moivre es válido cuando $n$ es cualquier número entero negativo $-m$.

40. Demostrar que el Teorema de De Moivre es válido cuando $n$ es cualquier número racional $p/q$.

## 8.7. GRUPOS

En este artículo daremos una breve y elemental introducción al concepto de grupo de gran importancia en las matemáticas superiores.

**Definición.** Se dice que un conjunto de elementos forma un *grupo* con respecto a una determinada operación (representada por el símbolo o) si estos elementos y solamente ellos, cumplen los cuatro postulados siguientes:

1. *Cerradura.* Si $a$ y $b$ son dos elementos cualesquiera (no necesariamente diferentes) del conjunto, entonces $a \circ b$ es un elemento único del conjunto.

2. *Asociatividad.* Si $a$, $b$ y $c$ son tres elementos cualesquiera del conjunto, entonces $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$.

3. *Identidad.* Existe un elemento $e$ en el conjunto, llamado el elemento identidad, que tiene la propiedad de que para todo elemento $a$ del conjunto

$$a \circ e = e \circ a = a.$$

4. *Inversos.* Para todo elemento $a$ del conjunto, existe un elemento $a'$ que también es del conjunto y que tiene la propiedad

$$a \circ a' = a' \circ a = e.$$

El elemento $a'$ se llama el *inverso* de $a$.

Como una señal de la importancia del concepto de grupo en el análisis matemático y en la geometría podemos mencionar que los elementos de un grupo pueden ser no sólo números ordinarios del álgebra sino también matrices, cuaterniones, vectores, sustituciones, transformaciones, etcétera.

Un ejemplo muy sencillo de grupo es el conjunto de todos los números enteros positivos y negativos y el cero, siendo la operación de grupo la adición. Así, si $a$ y $b$ son dos números enteros cualesquiera, entonces $a + b$ es un número entero único (Art. 2.3), con lo cual se satisface el Postulado 1. El Postulado 2 se satisface debido a que la adición es asociativa (Art. 2.3). El número cero es el elemento de identidad único, ya que cero es el único número con la propiedad de que para todo número entero $a$, $a + 0 = 0 + a = a$ (Art. 2.4). Por tanto, el Postulado 3 se satisface. Finalmente, el Postulado 4 también se satisface ya que todo número entero tiene como inverso a su negativo correspondiente; es decir, si $a$ es cualquier número entero, entonces $a + (-a) = (-a) + a = 0$ (Art. 2.4, Teorema 1). Como el número de elementos de este grupo es infinito, se llama un *grupo infinito.*

Veamos ahora un ejemplo de *grupo finito.*

**Ejemplo.** Demostrar que las tres raíces cúbicas de la unidad forman un grupo con respecto a la operación de multiplicación.

SOLUCION. En el ejemplo 3 del Art. 8.6, encontramos que las tres raíces cúbicas de la unidad son $1$, $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, y $-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

Es fácil comprobar que cualquiera de las dos raíces cúbicas complejas de la unidad es igual al cuadrado de la otra (ejercicio 38, grupo 26, Art. 8.3). Por tanto, si una de estas raíces cúbicas complejas se representa por $\omega$, entonces la otra puede representarse por $\omega^2$. Vamos a demostrar que las tres cantidades $1$, $\omega$ y $\omega^2$ forman un grupo, con respecto a la multiplicación, comprobando que se satisfacen los cuatro postulados de la definición de grupo.

1. El producto de cualquier par de raíces cúbicas de la unidad es también una raíz cúbica de la unidad. Es decir,

$$1 \times \omega = \omega,\ 1 \times \omega^2 = \omega^2,\ \omega \times \omega^2 = \omega^3 = 1.$$

2. La ley asociativa es válida, ya que

$$(1 \times \omega) \times \omega^2 = 1 \times (\omega \times \omega^2) = \omega^3.$$

3. Es evidente que el elemento identidad es 1.

4. El inverso de cada elemento es su recíproco, y estos recíprocos también son elementos de grupo. Es decir

$$\frac{1}{1} = 1,\ \frac{1}{\omega} = \frac{\omega^2}{\omega^3} = \frac{\omega^2}{1} = \omega^2, \qquad \frac{1}{\omega^2} = \frac{\omega}{\omega^3} = \frac{\omega}{1} = \omega.$$

Como es natural, el producto de cada elemento por su inverso es el elemento identidad 1.

Como el grupo está formado por tres elementos es un grupo finito.

## 8.8. VECTORES

En este artículo estudiaremos brevemente el tema de vectores que, como ya hemos dicho (Art. 8.4, Nota 2), está íntimamente relacionado con el de los números complejos.

En física un *vector* es una cantidad que posee magnitud y dirección. Son ejemplos de vectores la fuerza, la velocidad y la aceleración. Un vector puede representarse gráficamente por un segmento de recta dirigido cuya longitud, según una escala adecuada, represente la magnitud del vector. Ya que aquí sólo consideraremos vectores coplanares, es decir, vectores situados en el mismo plano, utilizaremos el plano del sistema de coordinadas rectangulares como el plano común. Así, como se muestra en la figura 32, el segmento de recta $\overline{OP}$ dirigido *del* origen $O$ al *punto* $P$ representa un vector cuya longitud $OP = r$ indica su *magnitud*. La *dirección*[1] del vector está dada por el ángulo $\theta$ que el seg-

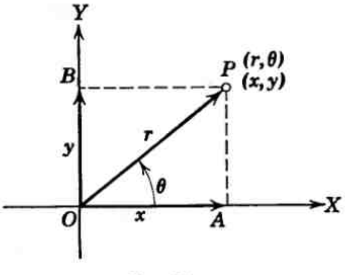


FIG. 32.

---

[1] En realidad, la dirección la da la *recta* que forma el ángulo $\theta$ con el eje $X$ y sobre ella se distinguen dos *sentidos* uno de los cuales es $OP$.

mento dirigido $OP$ forma con la parte positiva del eje $X$. La cabeza de flecha da el sentido de la dirección e indica que el vector está dirigido de su *punto inicial* u *origen* $O$ a su *punto final* o *extremo* $P$. La proyección del vector sobre el eje $X$, o sea el segmento dirigido $OA = x$, se llama la *componente horizontal*, y la proyección sobre el eje $Y$, o sea el segmento dirigido $OB = y$, es la *componente vertical*.

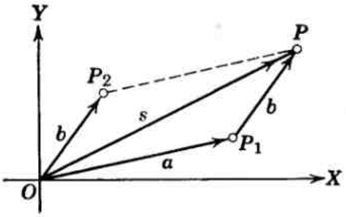


FIG. 33.

Dada la forma anterior de orientar un vector, con su origen en el origen de coordenadas $O$, es evidente que queda completamente determinado por la posición de su extremo $P$. Por otra parte, según vimos anteriormente, el punto $P$ queda determinado en forma única como representación geométrica de un número complejo. En la forma rectangular (Art. 8.4), $P$ representa el número complejo $x + yi$, en donde $x$ es la componente horizontal y $y$ es la componente vertical de un vector representado por el segmento de recta dirigido de longitud $\sqrt{x^2 + y^2}$. En la forma polar (Art. 8.5), $P$ representa el número complejo $r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$ en donde el módulo $r$ corresponde a la magnitud del vector y la amplitud $\theta$ da su dirección con respecto a la parte positiva del eje $X$. Por tanto, se concluye que si el origen del vector es el origen del sistema de coordenadas rectangulares, el vector queda completamente determinado si se conoce cualquiera de los pares de números $(x, y)$ o $(r, \theta)$, en donde las literales tienen el significado anteriormente mencionado. Por tanto, se puede designar un vector por cualquiera de estos dos pares de números.

Se dice que dos vectores son *iguales* siempre que estén representados por dos segmentos de recta dirigidos de igual longitud, dirección y sentido. Por lo tanto, cualquier vector $a$ situado en cualquier lugar del plano de coordenadas puede reemplazarse por un vector representado por un segmento de recta dirigido paralelo e igual en longitud al segmento de recta dirigido que representa a $a$, con el mismo sentido, pero con su origen en el origen de coordenadas. Entonces podremos representar este vector con uno cualquiera de los dos pares de números $(x, y)$ o $(r, \theta)$.

Consideremos ahora los vectores $a$ y $b$ con los extremos respectivos $P_1$ y $P_2$ pero con el mismo origen $O$, como se muestra en la figura 33. Tracemos el segmento de recta $P_1P$ paralelo y de igual longitud que $OP_2$ de modo que el segmento de recta $P_1P$ con origen en $P_1$ también represente al vector $b$. El punto $P$ es entonces el extremo del vector $s$ representado por el segmento de recta dirigido $OP$, *definido* como la *suma* de los vectores $a$ y $b$, es decir, $s = a + b$. Si el estudiante compara esta definición con lo estudiado en el Art. 8.4, Fig. 27, observará la analogía entre la adición de vectores y la de números complejos. También notamos que trazando el segmento de recta $P_2P$ se completa un paralelogramo. Esto forma la base de la llamada *ley del paralelogramo* para la adición de dos vectores.

**Ejemplo.** Hallar gráfica y analíticamente la suma de los vectores $a(6, 30°)$ y $b(4, 60°)$.

SOLUCION. Para la suma gráfica seguiremos el método que acabamos de explicar. Primeramente (Fig. 34) trazaremos los extremos $P_1(6, 30°)$ y $P_2(4, 60°)$ de los vectores dados $a$ y $b$, respectivamente, y luego completaremos el paralelogramo de lados contiguos $OP_1$ y $OP_2$. Esto nos da el extremo $P$ del vector suma $OP$.

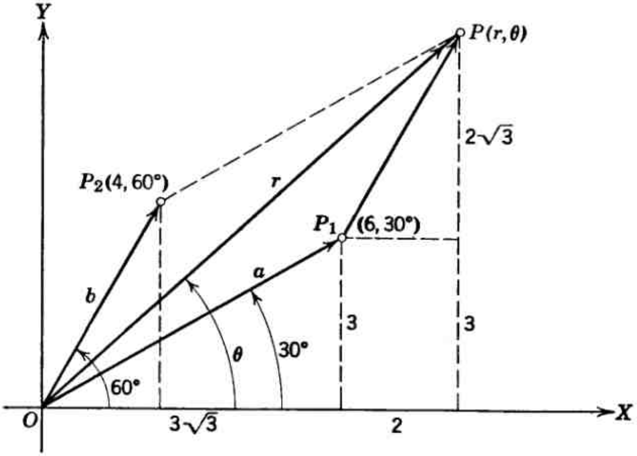


FIG. 34.

Por trigonometría, las componentes horizontal y vertical del vector $a$ son $3\sqrt{3}$ y 3, respectivamente, y las componentes horizontal y vertical del vector $b$ son 2 y $2\sqrt{3}$, respectivamente. Luego, las componentes horizontal y vertical del vector suma $OP$ con $3\sqrt{3} + 2$ y $3 + 2\sqrt{3}$, respectivamente. En consecuencia, la magnitud y dirección, respectivamente, del vector suma $OP$ son:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(3\sqrt{3} + 2)^2 + (3 + 2\sqrt{3})^2} = 9.673,$$
$$\theta = \text{arc tan}\,\frac{y}{x} = \text{arc tan}\,\frac{3 + 2\sqrt{3}}{3\sqrt{3} + 2} = 41°\ 56'.$$

Se dice que un vector es el *negativo* de otro vector si ambos son paralelos y tienen la misma magnitud pero sentidos opuestos. Para restar el vector $b$ del vector $a$, sumamos el negativo de $b$ con $a$, es decir,

$$a - b = a + (-b),$$

o sea que la diferencia $a - b$ de dos vectores es igual a la suma $a + (-b)$. Por tanto, podemos obtener la diferencia de dos vectores por medio de una suma equivalente usando el método que acabamos de explicar.

En resumen, resulta que aun en un estudio tan breve como el que acabamos de hacer se nota la íntima relación que existe entre los vectores y los números complejos. Esta relación se aprovecha en muchas aplicaciones, como, por ejemplo, en la teoría de circuitos de corriente alterna.

Las propiedades y aplicaciones de los vectores forman un campo muy amplio y de gran importancia, siendo el objeto de los tratados de análisis vectorial.

## 8.9. FUNCIONES DE UNA VARIABLE COMPLEJA

Finalizamos este capítulo con algunas notas breves sobre las funciones de una variable compleja. En el Art. 3.3 definimos a $y$ como una función de una variable real. Si $x$ se restringe a que tome valores reales, decimos que $y$ es una *función de una variable real.* Sin embargo, si tenemos una relación funcional en la cual la variable independiente puede tomar tanto valores reales como valores complejos, decimos que tenemos una *función de una variable compleja.* Se acostumbra expresar esta relación en la forma

$$w = f(z), \tag{1}$$

en donde $z = x + yi$, siendo $x$ y $y$ variables reales e $i$ la unidad imaginaria. Se sigue que, en general, $w$ puede escribirse en forma de dos expresiones que contienen las variables $x$ y $y$, llevando una de dichas expresiones coeficientes reales y la otra coeficientes imaginarios. Escribimos esto en la forma

$$w = u(x, y) + iv(x, y), \tag{2}$$

en donde tanto $u$ como $v$ son funciones de las variables reales $x$ y $y$.

**Ejemplo.** Si $w = z^2$, en donde $z = x + yi$, hallar las funciones $u(x, y)$ y $v(x, y)$ definidas en la relación (2).

SOLUCION. $w = z^2 = (x + yi)^2 = x^2 + 2xyi - y^2$

$= x^2 - y^2 + i(2xy)$.

siendo $u(x, y) = x^2 - y^2$,

y $v(x, y) = 2xy$.

Ahora consideraremos algunas de las diferencias entre las funciones de una variable real y las de una variable compleja. En el Art. 3.9 estudiamos la representación gráfica de la función $y = f(x)$ localizando puntos en un sistema de coordenadas rectangulares, utilizando el eje $X$ para valores *reales* de la variable $x$ y el eje $Y$ para valores *reales* de la variable $y$. Pero la cosa varía al tratar de representar gráficamente la función $w = f(z)$ dada por la ecuación (1). En este caso a cada valor de la variable independiente $z = x + yi$, le corresponde un punto del plano $xy$ o plano $z$ (Art. 8.4), con lo cual no queda lugar para representar los valores correspondientes de la función $w$. Para resolver este inconveniente hay que crear otro plano de coordenadas, llamado el plano $uv$, o plano $w$, de acuerdo con la notación de la relación (2). Es decir, del mismo modo que se localiza el punto $z = x + yi$ como un punto con las coordenadas reales $(x, y)$ en el plano $z$, así se representa el punto correspondiente $w = u + vi$ como el punto con coordenadas reales $(u, v)$ en el plano $w$. Esto significa que la representación gráfica o geométrica de la función $w = f(z)$ se estudia como una correspondencia entre puntos de los planos $z$ y $w$. Con definiciones y restricciones adecuadas, esta correspondencia se conoce con el nombre de *representación conforme* y es de gran importancia en la teoría y aplicaciones de funciones analíticas de una variable compleja.

Quien haya estudiado logaritmos recordará que en la relación $y = \log x$, el número $x$ está restringido a tomar valores positivos, es decir que sólo se consideran logaritmos de números positivos. Pero en la teoría de funciones de una variable compleja se muestra que también existen los logaritmos de los números negativos; de hecho se demuestra que existen logaritmos tanto de números reales como de números complejos.

Algo análogo ocurre en trigonometría. En la trigonometría elemental las diversas funciones trigonométricas están restringidas a valores reales del ángulo. Así, en la relación $y = \operatorname{sen} x$, el ángulo $x$ sólo puede tomar valores reales y el valor de $y$ nunca puede ser en valor absoluto mayor que la unidad. Desde este punto de vista el ángulo $x$ no tiene significado en la relación $\operatorname{sen} x = 2$. Pero si se admite que $x$ puede tomar cualquier valor, real o complejo, entonces esta última relación tiene un significado preciso en el campo de las funciones de una variable compleja.

Existen muchas otras diferencias entre funciones de variable real y funciones de variable compleja, pero los pocos ejemplos que acabamos de mencionar son suficientes para mostrar que la teoría de funciones de variable compleja ha servido para unir muchos conceptos que anteriormente se consideraban desconectados. El admitir que la variable independiente puede tomar valores cualesquiera, reales o complejos, conduce a una *generalización* de un concepto ya que da lugar a resultados más generales cuya existencia sería de otro modo desconocida. La teoría de funciones de variable compleja es de gran importancia en los estudios superiores y es la base para la resolución de muchos problemas de la física matemática, especialmente de hidrodinámica, calor y electricidad.

## EJERCICIOS. GRUPO 29

1. Demostrar que el conjunto de todos los números, positivos, negativos y cero, forman un grupo infinito con respecto a la operación de sustracción.

2. Demostrar que el conjunto del ejercicio 1 no forma un grupo con respecto a la multiplicación.

3. Demostrar que el conjunto de todos los números reales forma un grupo con respecto a la adición pero no con respecto a la multiplicación.

4. Demostrar que el conjunto de todos los números racionales positivos forma un grupo con respecto a la multiplicación.

5. Demostrar que el conjunto de todos los números racionales forma un grupo con respecto a la adición.

6. El postulado 1 de la definición de grupo establece que los dos elementos que se combinan con la operación de grupo no deben ser necesariamente diferentes. Si la operación de grupo es la multiplicación, esto implica que el cuadrado de cualquier elemento también debe ser un elemento de grupo. Comprobar este hecho en el grupo del ejemplo del Art. 8.7 demostrando que el cuadrado de cualquier elemento del grupo es también un elemento del grupo.

7. Demostrar que las cuatro raíces cuartas de la unidad forman un grupo con respecto a la multiplicación.

8. Demostrar que todas las potencias enteras (exponentes positivos y negativos) de la unidad imaginaria $i$ forman un grupo con respecto a la multiplicación.

9. Demostrar que el elemento identidad $e$ de un grupo es único. *Sugerencia:* Suponer que hay dos elementos identidad y demostrar que deben ser idénticos.

10. Demostrar que para todo elemento $a$ de un grupo, su inverso $a'$ es único. *Sugerencia:* Suponer que $a$ tiene dos inversos y demostrar que deben ser idénticos.

En los ejercicios 11-16 $1$, $\omega$, $\omega^2$ representan las tres raíces cúbicas de la unidad.

11. Demostrar que $1 + \omega + \omega^2 = 0$.

12. Empleando el resultado del ejercicio 11, demostrar que $(1 + \omega)^3 = -1$.

13. Empleando el resultado del ejercicio 11, demostrar que $(1 + \omega^2)^4 = \omega$.

14. Demostrar que $1 + 1/\omega + 1/\omega^2 = 0$.

15. Demostrar que $1 + \omega + 1/\omega = 0$.

16. Si $N$ es cualquier número real, demostrar que las tres raíces cúbicas de $N$ son $\sqrt[3]{N}$, $\sqrt[3]{N}\omega$, y $\sqrt[3]{N}\omega^2$, en donde $\sqrt[3]{N}$ es la raíz cúbica principal de $N$.

17. Según el Teorema 4 (Art. 8.6), la fórmula para las $n$ raíces enésimas de la unidad es

$$\cos \frac{k \cdot 360^\circ}{n} + i \operatorname{sen} \frac{k \cdot 360^\circ}{n}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n - 1.$$

Si $\omega$ es la raíz enésima correspondiente a $k = 1$, es decir,

$$\omega = \cos \frac{360^\circ}{n} + i \operatorname{sen} \frac{360^\circ}{n}.$$

Demostrar que para $k = 2, 3, 4, \ldots, n - 1$, las sucesivas raíces enésimas de la unidad están dadas por $\omega^2, \omega^3, \omega^4, \ldots, \omega^{n-1}$, respectivamente. A partir de esto demostrar que las $n$ raíces enésimas de la unidad vienen dadas por $1, \omega, \omega^2, \ldots, \omega^{n-1}$

18. Usando el resultado del ejercicio 17, demostrar que el producto de dos cualesquiera de las raíces enésimas de la unidad es también una raíz enésima de la unidad.

19. Usando el resultado del ejercicio 17, demostrar que (a) el cuadrado de cada raíz enésima de la unidad es también una raíz enésima de la unidad, (b) el recíproco de cada raíz enésima de la unidad es también una raíz enésima de la unidad.

20. Usando los resultados de los ejercicios 18 y 19, generalizar el ejemplo del Art. 8.7, es decir, demostrar que las $n$ raíces enésimas de la unidad forman un grupo con respecto a la operación de multiplicación.

21. Demostrar que todo vector es igual a la suma de sus componentes horizontal y vertical.

22. Si el vector $b$ es el negativo del vector $a$, demostrar que las componentes horizontal y vertical de $b$ son, respectivamente, los negativos de las componentes horizontal y vertical de $a$.

23. Demostrar que el método para hallar gráficamente la suma de dos vectores puede generalizarse para la suma de tres o más vectores.

24. Trazar una figura que ilustre el método gráfico para obtener la diferencia de dos vectores dados.

25. Demostrar que la suma de cualquier número de vectores dados es otro vector cuya componente horizontal es igual a la suma algebraica de las componentes horizontales de los vectores dados y cuya componente vertical es igual a la suma algebraica de las componentes verticales de los vectores dados.

26. Hallar gráfica y analíticamente la suma de los vectores $a(3\sqrt{2}, 45^\circ)$ y $b(2, 120^\circ)$.

27. Hallar, gráfica y analíticamente la diferencia $a - b$ de los dos vectores $a$ y $b$ del ejercicio 26.

En cada uno de los ejercicios 28-30, obtener las funciones $u(x, y)$ y $v(x, y)$ tales que $w = u(x, y) + iv(x, y)$ para la función dada de $z = x + yi$.

28. $w = z^2 + 2z - 1$. 29. $w = 1/z, z \neq 0$. 30. $w = z^3$.

# 9

# Variación de funciones

## 9.1. INTRODUCCION

En una relación funcional, como $y = f(x)$, hemos visto que un cambio en la variable $x$ va generalmente acompañado por un cambio en la variable $y$, y viceversa.

Entonces decimos que $y$ varía con $x$ o que $x$ varía con $y$, y nos referimos a esta correspondencia con el nombre de *variación funcional.*

Existe una gran variedad de formas de variación funcional. Aquí estudiaremos primero ciertos tipos determinados de variación a los que se les puede aplicar el nombre de *variación especial* o *variación proporcional.* Estos tipos son especiales en el sentido de que siguen una ley o relación determinada que, en general, puede expresarse fácilmente con palabras y en forma de ecuación. Estas clases de variaciones se presentan con frecuencia en geometría y en física. Por ejemplo, la variación del área de un triángulo guarda una relación fija con respecto a las variaciones de la longitud de la base y de la altura. En el artículo siguiente veremos los fundamentos para la resolución de problemas en los que intervienen funciones cuya variación es especial.

## 9.2. DEFINICIONES Y PROPIEDADES

La *razón* de un número $y$ a otro número $x$, no igual a cero, se *define* como el cociente $y/x$. Es importante observar que la razón es un número abstracto pues proviene del cociente de cantidades homogéneas. Así, por ejemplo, la razón de 3 cm a 2 m es 3/200.

Se dice que la variable *$y$ es directamente* proporcional a la variable $x$ si la razón de dos valores correspondientes cualesquiera de $y$ y $x$ es constante, es decir, si $y/x = k$, o sea, si

$$y = kx, \tag{1}$$

en donde la constante $k$ se llama *constante de proporcionalidad* o *constante de variación.*

*Ejemplo.* La longitud $C$ de una circunferencia es directamente proporcional al radio $r$, ya que $C = 2\pi r$ en donde $2\pi$ es la constante de proporcionalidad.

Se dice que la variable $y$ *es inversamente* proporcional a la variable $x$ si $y$ es directamente proporcional al recíproco de $x$. En este caso escribimos

$$y = \frac{k}{x}, \tag{2}$$

siendo $k$ la constante de proporcionalidad.

*Ejemplo.* La intensidad de iluminación $I$ sobre una superficie es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia $d$ entre la superficie y el foco luminoso, es decir, $I = k/d^2$, en donde $k$ es la constante de proporcionalidad.

Los dos casos de variación especial que acabamos de mencionar comprenden solamente dos variables. Pero también se presentan problemas de variación en los que aparecen más de dos variables. En este caso, se dice que una variable *varía conjuntamente* con dos o más variables si es directamente proporcional a su producto. Por ejemplo, se dice que $w$ varía conjuntamente con $x$, $y$ y $z$ si $w = kxyz$, en donde $k$ es la constante de proporcionalidad. Además, si $w$ varía conjuntamente con $x$, $y$ y $1/z$ de modo que $w = \dfrac{kxy}{z}$, entonces decimos que $w$ es directamente proporcional a $x$, directamente proporcional y a $y$ e inversamente proporcional a $z$. Este último tipo se llama a veces *variación combinada* aunque evidentemente es un caso particular de la variación conjunta.

Una propiedad importante de la variación conjunta viene dada por el teorema siguiente.

**Teorema 1.** *Si $z$ es directamente proporcional a $x$, cuando $y$ es constante, y si $z$ es también directamente proporcional a $y$ cuando $x$ es constante, entonces $z$ es directamente proporcional al producto $xy$.*

DEMOSTRACION. De la primera parte de la hipótesis se deduce

$$z = k_1 x, \qquad y \text{ constante.} \tag{3}$$

Supongamos que $z$ cambia a algún otro valor, digamos $\bar{z}$, y que $x$ cambia al valor correspondiente $x'$ de modo que

$$\bar{z} = k_1 x'. \tag{4}$$

Dividiendo miembro a miembro (3) entre (4), tenemos

$$\frac{z}{\bar{z}} = \frac{x}{x'}. \tag{5}$$

De la segunda parte de la hipótesis

$$z = k_2 y, \qquad x \text{ constante} \tag{6}$$

Ahora, mientras que $x$ conserva su valor $x'$ hagamos que $y$ cambie a $y'$. El valor de $z$ pasará de $\bar{z}$ a $z'$ de modo que por (6) tengamos

$$\frac{\bar{z}}{z'} = \frac{y}{y'}. \tag{7}$$

Multiplicando (5) y (7) miembro a miembro, tenemos

$$\frac{z}{z'} = \frac{xy}{x'y'}$$

o sea

$$z = \frac{z'}{x'y'}xy.$$

Llamando $k$ a la cantidad contante $\frac{z'}{x'y'}$ obtenemos

$$z = kxy,$$

como se quería demostrar.

**Corolario.** *Si $z$ es directamente proporcional a $x$ cuando $y$ es constante, y si $z$ es inversamente proporcional a $y$ cuando $x$ es constante, entonces $z$ varía conjuntamente con $x$ y con $1/y$, es decir $z = k\frac{x}{y}$.*

Un ejemplo en geometría sencillo del Teorema 1 es la relación entre el área de un triángulo y su base y su altura. El área es directamente proporcional a la base, cuando la altura permanece constante, y es directamente proporcional a la altura cuando la base permanece constante, y en consecuencia el área es directamente proporcional al producto de la base por la altura.

Un ejemplo en física, muy importante, del corolario del Teorema 1 es la relación que existe entre el volumen $V$, la presión $P$ y la temperatura absoluta $T$ de una masa determinada de un gas perfecto. El volumen $V$ es directamente proporcional a $T$, cuando $P$ permanece constante, y es inversamente proporcional a $P$ cuando $T$ permanece constante. Por tanto, de acuerdo con el corolario, $V = R\frac{T}{P}$, fórmula que se acostumbra escribir $PV = RT$ en donde $R$ es la constante de proporcionalidad. Esta relación recibe a veces el nombre de *ecuación característica* de un gas.

## 9.3. PROBLEMAS DE VARIACION PROPORCIONAL

A continuación vamos a ver diversos problemas de variación proporcional. Para la resolución de tales problemas, primero se escribe la ley de variación correspondiente en forma de una ecuación que contenga la constante de proporcionalidad $k$. Luego se determina el valor de $k$ usando los datos, obteniéndose así una relación con la que se puede calcular la cantidad que se busca. Este método es el que se aplica en los dos ejemplos siguientes.

**Ejemplo 1.** $w$ es directamente proporcional a $x$ y al cuadrado de $y$ y es inversamente proporcional al cubo de $z$. Si $w = 8$ cuando $x = 2$, $y = 6$, y $z = 3$, calcular $w$ cuando $x = 5$, $y = 4$, $z = 2$.

SOLUCION. Primeramente escribiremos el tipo dado de variación en forma de una ecuación

$$w = \frac{kxy^2}{z^3}, \tag{1}$$

en donde $k$ es la constante de proporcionalidad que es lo primero que hay que calcular. Sustituyendo en esta ecuación los valores dados de $w$, $x$, $y$ y $z$, tenemos

$$8 = \frac{k \cdot 2 \cdot 6^2}{3^3}$$

de donde $k = 3$. La relación (1) se puede escribir ahora en la forma

$$w = \frac{3xy^2}{z^3}.$$

Por tanto, para $x = 5$, $y = 4$ y $z = 2$, tenemos

$$w = \frac{3 \cdot 5 \cdot 4^2}{2^3} = 30.$$

**Ejemplo 2.** La presión $P$ del viento sobre una superficie plana vertical es directamente proporcional al área $A$ de la superficie y al cuadrado de la velocidad $v$ del viento. Si una velocidad del viento de 20 Km por hora produce una presión de 10 Kg por decímetro cuadrado, calcular la velocidad del viento que producirá la presión de 360 Kg por metro cuadrado.

SOLUCION. La ley de variación viene dada por la ecuación

$$P = kAv^2. \tag{2}$$

Sustituyendo los datos en (2), tenemos

$$10 = k \cdot 1 \cdot \overline{20}^2,$$

de donde $k = 1/40$. La relación (2) puede escribirse en la forma

$$P = \frac{1}{40} Av^2.$$

Al calcular $v$ usando esta última relación debe tenerse cuidado de emplear las unidades adecuadas, pues la constante de proporcionalidad $k$ se obtuvo bajo el supuesto de que $v$ está en Km por hora, $P$ en Kg y $A$ en decímetros cuadrados. Por tanto, el área de un metro cuadrado debe cambiarse a 100 decímetros cuadrados.

La velocidad que se busca la obtendremos de la fórmula:

$$360 = \frac{1}{40} \cdot 100 \cdot v^2$$

de donde $$v = 12 \text{ Km por hora.}$$

En los problemas de variación proporcional generalmente es útil calcular la constante de proporcionalidad a fin de obtener una fórmula que sirva para obtener valores numéricos. Sin embargo, en algunos casos la constante no se pide o no se puede obtener. Esto sucede, por ejemplo, si solamente se desea saber el efecto que tiene sobre una variable el cambio de otras variables.

**Ejemplo 3.** La resistencia eléctrica $R$ de un alambre de sección transversal circular es directamente proporcional a la longitud $L$ e inversamente proporcional al cuadrado del diámetro $d$ del alambre. Calcular el porcentaje de variación en la resistencia de un alambre dado si la longitud aumenta un 40 por ciento y el diámetro un 30 por ciento.

SOLUCION. La ley de variación queda expresada por

$$R = \frac{kL}{d^2}, \tag{3}$$

en donde la constante de proporcionalidad $k$ depende de la naturaleza del material del alambre.

Llamemos $R_1$ al valor de $R$, que se obtiene al sustutir $L$ por $1.4L$ y $d$ por $1.3d$. Sustituyendo estos nuevos valores en (3) resulta

$$R_1 = \frac{k(1.4L)}{(1.3d)^2}, \tag{4}$$

en donde $k$ tiene el mismo valor que en (3).

De (3) y (4) obtenemos

$$\frac{R_1}{R} = \frac{1.4Ld^2}{1.69d^2L} = \frac{1.4}{1.69} = 0.828,$$

de donde $R_1 = 0.828R$, es decir, la resistencia decrece en un 17.2 por ciento, independientemente del material del alambre.

## EJERCICIOS. GRUPO 30

1. Si $y$ es directamente proporcional a $x$, y $y = 8$ cuando $x = 4$, hallar $y$ cuando $x = 7$.

2. Si $y$ es inversamente proporcional a $x$, y $y = 3$, cuando $x = 5$, calcular $x$ cuando $y = 5$.

3. Si $z$ es directamente proporcional a $x$ e inversamente proporcional a $y$, y $z = 2$ cuando $x = 3$ y $y = 9$, calcular $z$ cuando $x = —10$ y $y = 12$.

4. Si $y$ es inversamente proporcional a $x^2 + 1$, y $y = 2$ cuando $x = 2$, hallar el valor de $y$ cuando $x = \pm 3$.

5. Si $w$ es directamente proporcional a $x$ y $y$, e inversamente proporcional al cuadrado de $z$, y si $w = —20$ cuando $x = 6$, $y = 5$, y $z = 3$, calcular $y$ cuando $x = 8$, $z = 2$ y $w = 24$.

6. Si $z$ es directamente proporcional a $(x — y)/(x + y)$, y $z = 2$ cuando $x = 7$ y $y = 5$, calcular $x$ cuando $y = 3$ y $z = 6$.

7. $y$ es directamente proporcional a la suma de dos cantidades, la primera de las cuales es directamente proporcional a $x$ y la segunda inversamente proporcional a $x$. Si $y = 3$ cuando $x = 2$, y $y = 7$ cuando $x = 3$, hallar la relación funcional entre $x$ y $y$.

8. $y$ es directamente proporcional a la diferencia de dos cantidades, la primera de las cuales (el minuendo) es inversamente proporcional a $x$ y la segunda es inversamente proporcional a $x^2$. Si $y = 12$ cuando $x = 1$, y $y = 4$ cuando $x = 2$, hallar la relación funcional entre $x$ y $y$.

9. $y$ es directamente proporcional a la suma de tres cantidades, la primera de las cuales es directamente proporcional a $x^3$, la segunda es directamente proporcional a $x^2$, y la tercera es directamente proporcional a $x$. Si $y = 4$ cuando $x = 1$, $y = 14$ cuando $x = 2$, y $y = —10$ cuando $x = —1$, obtener la relación funcional entre $x$ y $y$.

En cada uno de los ejercicios 10-15 demostrar el teorema enunciado.

10. Si $x$ es directamente proporcional a $y$ y $y$ es directamente proporcional a $z$, entonces $x$ y $z$ son directamente proporcionales.

11. Si $x$ es inversamente proporcional a $y$ y $y$ es inversamente proporcional a $z$, entonces $x$ y $z$ son directamente proporcionales.

12. Si $x$ es directamente proporcional a $z$ y $y$ es directamente proporcional a $z$ entonces $x \pm y$ y $z$ son directamente proporcionales.

13. Si $x$ es directamente proporcional a $z$ y $y$ es directamente proporcional a $z$, entonces $\sqrt{xy}$ y $z$ son directamente proporcionales.

14. Si $x$ es directamente proporcional a $y$ entonces $x^n$ es directamente proporcional a $y^n$.

15. Si $x$ es directamente proporcional a $y$ y $u$ es directamente proporcional a $v$, entonces $xu$ y $yv$ son directamente proporcionales.

16. Demostrar el corolario del Teorema 1 del Art. 9.2.

17. Generalizar el Teorema 1 del Art. 9.2 demostrando que si $z$ es directamente proporcional a cada una de las variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$, por separado, tomando en cada caso las variables restantes como constantes, entonces $z$ es directamente proporcional al producto de $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

18. La distancia recorrida por un cuerpo que parte del reposo y cae libremente en el vacío es directamente proporcional al cuadrado del tiempo de descenso. Si el cuerpo desciende 4.45 metros en el primer segundo, calcular la distancia recorrida en los primeros 4 segundos.

19. Para un cuerpo que cae tal como se especificó en el ejercicio 18, la velocidad adquirida es directamente proporcional al tiempo de descenso. Si un cuerpo adquiere la velocidad de 20 metros por segundo al final de 2 segundos, calcular el tiempo necesario para que el cuerpo adquiera la velocidad de 55 metros por segundo.

20. La ley de Boyle establece que a temperatura constante, el volumen de una masa gaseosa es inversamente proporcional a la presión a que está sujeta. Si una determinada masa de gas tiene un volumen de 140 $cm^3$ bajo una presión de 20 Kg por metro cuadrado, calcular su volumen cuando la presión es de 35 Kg por metro cuadrado.

21. El período de oscilación de un péndulo simple es directamente proporcional a la raíz cuadrada de su longitud. Si el período de oscilación de un péndulo de 1 metro de longitud es 2 segundos, calcular el período de oscilación para un péndulo de 4 metros de longitud.

22. El volumen de una masa gaseosa es directamente proporcional a la temperatura absoluta e inversamente proporcional a la presión. Si el volumen es 0.3 $m^3$ cuando la temperatura es 300° y la presión es 1 Kg por centímetro cuadrado, calcular el volumen cuando la temperatura es 320° y la presión es 1.5 Kg por centímetro cuadrado.

23 La carga de trabajo $S$ de una viga horizontal de sección transversal rectangular apoyada en ambos extremos, es directamente proporcional al ancho $b$ y al cuadrado de su espesor $d$ e inversamente proporcional a la distancia $L$ entre los soportes. Una viga con $b$ igual a 10 cm y $d$ igual a 20 cm soporta una carga de 80 Kg siendo la separación entre los soportes igual a 6 metros. Calcular la carga de trabajo para la misma viga cuando se le voltea de modo que $b$ sea igual a 20 cm y $d$ igual a 10 cm.

24. La ley de Ohm establece que la corriente que fluye por un conductor es directamente proporcional a la fuerza electromotriz e inversamente proporcional a la resistencia. Si la resistencia decrece un 10 por ciento, calcular el porcentaje de cambio en la fuerza electromotriz necesario para aumentar la corriente en un 20 por ciento.

25. El área lateral de un cilindro circular recto es directamente proporcional al radio de su base y a su altura. Si el radio aumenta un 20 por ciento, calcular el porcentaje de cambio en la altura para que el área lateral permanezca la misma.

26. El empuje en el ala de un aeroplano es directamente proporcional al área del ala y al cuadrado de la velocidad del aeroplano. Calcular el porcentaje de cambio en el empuje si el área del ala decrece un 25 por ciento y la velocidad aumenta en un 25 por ciento.

27. El volumen de un cono circular recto es directamente proporcional al cuadrado del radio de su base y a su altura. Si el radio aumenta un 10 por ciento, hallar el porcentaje de cambio en la altura para que el volumen no varíe.

28. La iluminación en una pantalla es directamente proporcional a la intensidad del foco luminoso e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia del foco. Calcular el porcentaje de cambio en la iluminación si la intensidad del foco aumenta un 20 por ciento y la distancia al foco aumenta un 10 por ciento.

29. La frecuencia de vibración de una cuerda en tensión es directamente proporcional a la raíz cuadrada de la tensión e inversamente proporcional al producto de la longitud por el diámetro de la cuerda. Calcular el porcentaje de cambio en la frecuencia si la tensión aumenta un 20 por ciento, la longitud aumenta un 15 por ciento, y el diámetro disminuye un 10 por ciento.

30. La ley de la gravitación de Newton establece que la fuerza de atracción entre dos cuerpos es directamente proporcional al producto de sus masas e inversamente proporcional al cuadrado de su distancia. Si una masa aumenta un 10 por ciento y la distancia entre las masas disminuye un 10 por ciento, calcular el porcentaje de cambio en la otra masa para que la fuerza de atracción tenga un aumento de un 10 por ciento.

## 9.4. VARIACION EN LAS FUNCIONES ALGEBRAICAS

Ahora consideraremos un tipo más general de variación, representado por las funciones algebraicas. Sea, por ejemplo, la ecuación $x^2 + xy + y^2 = 4$, que define a $y$ como una función implícita de $x$. Es imposible expresar la ley de variación entre las variables $x$ y $y$ por medio de una proposición sencilla, tal como se hizo en los problemas de variación proporcional estudiados en los artículos anteriores. Sin embargo, podemos obtener una idea bastante clara de la relación de variación entre $x$ y $y$ utilizando la gráfica de la función. Ya hemos estudiado la representación gráfica de funciones de una sola variable, y se recomienda que el estudiante vuelva a leer el Art. 3.9.

Antes de emprender la construcción de la gráfica analizaremos las funciones de dos variables $x$ y $y$. A esto se le llama "discutir" la ecuación y presenta diversas ventajas. Generalmente sirve para reducir el trabajo que representa el calcular las coordenadas de los puntos de la gráfica. También nos puede ayudar a evitar grandes errores en el trazado de la gráfica *entre* los puntos señalados. A continuación se describen algunas características de una *discusión* de este tipo.

El primer paso en la discusión de una ecuación es hallar, si las hay, las *intercepciones* de la gráfica con los ejes de coordenadas. Llamamos *intercepción* de una curva con el eje $X$ a la abscisa del punto donde la curva corta al eje $X$, e *intercepción* de una curva con el eje $Y$ a la ordenada del punto en que la curva corta al eje $Y$. El método para obtener las intercepciones resulta obvio en virtud de las definiciones. En efecto, ya que la intercepción con el eje $X$ es la abscisa de un punto del eje $X$, la ordenada de ese punto es cero; por lo tanto, bastará hacer $y = 0$ en la ecuación de la curva y resolver la ecuación resultante. Los valores *reales* de $x$ que sean solución de la ecuación nos darán las intercepciones con el eje $X$. Análogamente, haciendo $x = 0$ en la ecuación de la curva, las soluciones de la ecuación resultante para valores *reales* de $y$ nos darán las intercepciones con el eje $Y$. Es importante observar que las intercepciones con el eje $X$ corresponden a los *ceros reales* (Art. 3.9).*

Un aspecto de mucha importancia en la discusión de una ecuación es obtener la *extensión* de su gráfica. Con este término se designa a la determinación de los dominios de los valores reales que pueden tomar las variables $x$ y $y$ en la ecuación de la curva. Esta información es útil por dos motivos: (1) Da la situación general de la gráfica en el plano de coordenadas. (2) Indica si la gráfica es una curva cerrada o se extiende indefinidamente. Como veremos pronto, los dominios de los valores reales de las variables $x$ y $y$ se determinan sencillamente despejando $y$ de la ecuación dada en términos de $x$ y despejando $x$ en términos de $y$.

**Ejemplo 1.** Discutir la ecuación $x^2 + xy + y^2 = 4$ y construir su gráfica.

SOLUCION. Haciendo $y = 0$ en la ecuación se obtiene $x^2 = 4$ de donde $x = \pm 2$, son las intercepciones con el eje $X$. Análogamente, haciendo $x = 0$ se obtiene $y = \pm 2$, que son las intercepciones con el eje $Y$. Las intersecciones son los puntos $(2, 0)$ $(-2, 0)$ y $(0. 2)$ $(0, -2)$.

Para poder determinar la extensión de la gráfica despejaremos de la ecuación $y$ en términos de $x$ y también $x$ en términos de $y$. Primeramente escribimos la ecuación dada en la forma

$$y^2 + xy + x^2 - 4 = 0$$

lo cual puede considerarse como una ecuación cuadrática en la variable $y$, tomando a $x$ como una constante. Entonces por la fórmula de la ecuación cuadrática tenemos

$$y = \frac{-x \pm \sqrt{x^2 - 4x^2 + 16}}{2}, \text{ o}$$

$$y = \frac{-x \pm \sqrt{16 - 3x^2}}{2}. \tag{1}$$

Ahora bien, ya que únicamente nos interesan valores reales de $x$ y $y$, se concluye de (1) que debe ser $16 - 3x^2 \geq 0$. Por los métodos del Capítulo 6 (Art. 6.5), encontramos que esta relación es válida cuando $x$ está restringida al dominio de valores dados por

$$-\tfrac{4}{3}\sqrt{3} \leq x \leq \tfrac{4}{3}\sqrt{3}.$$

---

* La diferencia entre intercepción e intersección es que las intercepciones con el eje $X$ son las abscisas de las coordenadas de los puntos de intersección de la curva con el eje, y las intercepciones con el eje $Y$ son las ordenadas de las coordenadas de los puntos de intersección de la curva con el eje $Y$.

Análogamente, escribiendo la ecuación dada en la forma

$$x^2 + yx + y^2 - 4 = 0$$

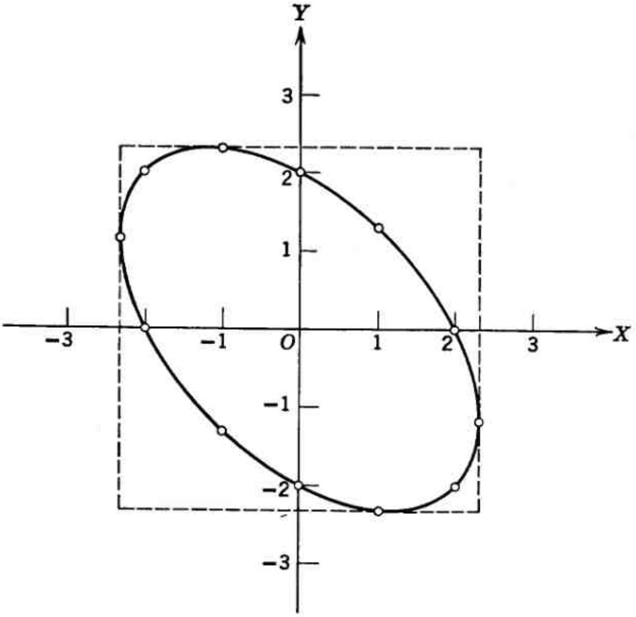
y considerándola como una ecuación cuadrática en la variable $x$, tomando a $y$ como constante, encontramos por la fórmula de la ecuación cuadrática que

$$x = \frac{-y \pm \sqrt{16 - 3y^2}}{2}.$$

Por lo tanto, para valores reales, $y$ queda restringida al dominio

$$-\tfrac{4}{3}\sqrt{3} \leq y \leq \tfrac{4}{3}\sqrt{3}.$$

En consecuencia se concluye que todos los puntos de la gráfica deben estar dentro (o sobre) un cuadrado con centro en el origen y lados paralelos a los ejes de coordenadas, cada uno de longitud $\tfrac{8}{3}\sqrt{3}$ unidades. Por supuesto esto significa que la gráfica es una *curva cerrada* como se muestra en la figura 35.



| $x$ | $y$ |
|---|---|
| $0$ | $\pm 2$ |
| $1$ | $\frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2}$ |
| $-1$ | $\frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$ |
| $2$ | $0, -2$ |
| $-2$ | $0, 2$ |
| $\tfrac{4}{3}\sqrt{3}$ | $-\tfrac{2}{3}\sqrt{3}$ |
| $-\tfrac{4}{3}\sqrt{3}$ | $\tfrac{2}{3}\sqrt{3}$ |

Fig. 35.

Aparte de las intercepciones podemos obtener las coordenadas de puntos adicionales de la curva usando la relación (1). Estos valores se muestran en la tabla que acompaña a la gráfica (una elipse).

Algunas curvas están asociadas con una o más rectas llamadas *asíntotas* las cuales son muy útiles al construir la gráfica.

**Definición.** Si para una curva dada existe una recta tal que a medida que los puntos de la curva se alejan del origen, las distancias de dichos puntos a la recta decrecen y tienden a cero, entonces la recta se llama una *asíntota* de la curva.

En nuestro estudio consideraremos solamente asíntotas horizontales y verticales, es decir, asíntotas que son paralelas al eje $X$ o al eje $Y$, respectivamente. Muchas curvas carecen de asíntotas, pero si una curva tiene una asíntota horizontal o vertical, pueden hallarse por medios análogos a los utilizados para determinar la extensión de la curva, tal como puede verse en el ejemplo siguiente.

**Ejemplo 2.** Discutir la ecuación $x^2y - x^2 - y = 0$ y trazar su gráfica.

SOLUCION. Se ve fácilmente que la única intercepción con los ejes coordenados es el origen.

Despejando $y$ en términos de $x$ resulta

$$y = \frac{x^2}{x^2 - 1}. \tag{2}$$

En (2), $y$ está definida para todo valor de $x$ excepto $\pm 1$. Por lo tanto la gráfica no es una curva cerrada sino que se extiende indefinidamente. para $x > 1$ y $x < -1$, $y$ es positiva; para valores de $x$ en el intervalo $-1 < x < 1$, $y$ es negativa o cero. Cuando $x$ tiende a $+1$ o $-1$, el valor absoluto de $y$ aumenta indefinidamente, de modo que, de acuerdo con la definición anterior, las rectas $x = 1$ y $x = -1$ son asíntotas verticales.

Despejando $x$ de la ecuación dada en términos de $y$ resulta

$$x = \pm \sqrt{\frac{y}{y - 1}}. \tag{3}$$

En (3), $x$ no está definida para $y = 1$. Además $x$ es compleja para valores de $y$ en el intervalo $0 < y < 1$, y por tanto dichos valores de $y$ deben excluirse. Conforme $y$ tiende a 1, a través de valores mayores que 1, el valor absoluto de $x$ crece indefinidamente; por tanto, la recta $y = 1$ representa una asíntota horizontal.

Las concluciones deducidas de las ecuaciones (2) y (3) acerca de los valores para los cuales están definidas $x$ y $y$, dan una buena idea de la situación de la gráfica en el plano de coordenadas. Existen tres regiones separadas en las cuales hay curva: arriba de la recta $y = 1$ y a la derecha de la recta $x = 1$; arriba de la recta $y = 1$ y a la izquierda de la recta

$x = -1$; y debajo del eje $X$ entre las rectas $x = 1$ y $x = -1$. Evidentemente la gráfica es abierta.

Las coordenadas de los puntos marcados pueden obtenerse de (2), para valores de $x$ dentro de los intervalos ya mencionados. Los pares de valores correspondientes están dados en la tabla de la figura 36. Las asíntotas están representadas con líneas de trazos. Conviene observar la ventaja de trazar primero las asíntotas de una curva, cuando existen, antes de construir la curva. Las asíntotas sirven de *guía* en la construcción.

| $x$ | $y$ |
|---|---|
| $0$ | $0$ |
| $\pm\frac{1}{4}$ | $-\frac{1}{15}$ |
| $\pm\frac{1}{2}$ | $-\frac{1}{3}$ |
| $\pm\frac{3}{4}$ | $-\frac{9}{7}$ |
| $\pm\frac{5}{4}$ | $\frac{25}{9}$ |
| $\pm\frac{3}{2}$ | $\frac{9}{5}$ |
| $\pm\frac{7}{4}$ | $\frac{49}{33}$ |
| $\pm 2$ | $\frac{4}{3}$ |
| $\pm\frac{9}{4}$ | $\frac{81}{65}$ |

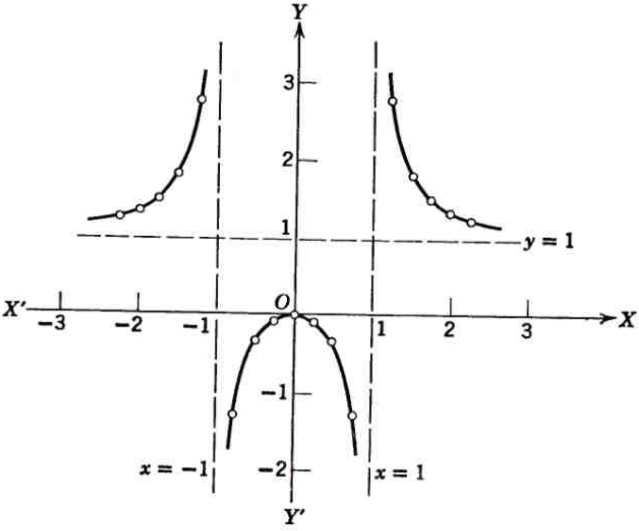


Fig. 36.

Resumiendo, tenemos los siguientes cinco pasos en la discusión de la ecuación de una curva y trazo de su gráfica:

1. Determinación de las intercepciones o intersecciones con los ejes de coordenadas.
2. Determinación de la extensión de la gráfica.
3. Determinación de las asíntotas verticales y horizontales.
4. Cálculo de las coordenadas de un número suficiente de puntos.
5. Trazado de la curva.

Se recomienda que el estudiante se acostumbre a comprobar que la discusión de una ecuación y la gráfica concuerden completamente.

NOTA. El análisis anterior está lejos de ser completo, pero es suficiente para las necesidades de este libro. En geometría analítica y en cálculo diferencial se hacen estudios más detallados de las ecuaciones que incluyen la determinación de simetría, puntos máximos y mínimos, puntos de inflexión y otros puntos que puedan ser importantes para la construcción de la curva.

Conviene además observar que a veces, en ciertos problemas, se dispone de un conjunto de pares de valores correspondientes, obtenidos por observación, pero no se conoce la ecuación. La gráfica de tales observaciones es frecuentemente de gran utilidad para deducir conclusiones importantes sobre el conjunto de los datos. Esto es lo que suele ocurrir en trabajos experimentales, estadísticos y adaptación de curvas.

## EJERCICIOS. GRUPO 31

En cada uno de los siguientes ejercicios discutir la ecuación dada y construir la gráfica correspondiente.

1. $x^2 + y^2 = 4$.
2. $9x^2 + 4y^2 = 36$.
3. $4x^2 + 9y^2 = 36$.
4. $9x^2 - 4y^2 = 36$.
5. $4y^2 - 9x^2 = 36$.
6. $x^2 + y^2 - 4y = 0$.
7. $x^2 - 6x + y^2 = 0$.
8. $4x^2 - y^2 - 2y - 2 = 0$.
9. $8x^3 - y = 0$.
10. $y = x^3 + x^2 - 9x - 9$.
11. $x^3 - x - y = 0$.
12. $x^2 - y^3 = 0$.
13. $x - y^4 + 9y^2 = 0$.
14. $xy - y - 1 = 0$.
15. $x^3 + xy^2 - y^2 = 0$.
16. $x^2 + xy + y^2 = 1$.
17. $x^2 - xy + y^2 = 1$.
18. $x^2 + 2xy - y^2 = 2$.
19. $x^2 - xy - 3y^2 = 1$.
20. $x^3 + y^2 - 4y + 4 = 0$.
21. $x^2y - 4y - x = 0$.
22. $xy^2 - 9x - y - 1 = 0$.
23. $x^2y - xy - 2y - 1 = 0$.
24. $x^2 - xy + 5y = 0$.
25. $x^2y^2 - 4x^2 - 4y^2 = 0$.
26. $y^2 = x(x - 1)^2$.
27. $y^2 = (x - 1)(x - 2)$.
28. $y^2 = (x - 1)(x - 2)(x - 3)$.
29. $y^2 = x(x + 1)(x + 2)$.
30. $y^2 = x(x + 2)^2$

# 10

# Progresiones

## 10.1. INTRODUCCION

En este capítulo estudiaremos las propiedades de ciertos conjuntos especiales de números. Se les considera especiales en el sentido de que los elementos o términos se forman ordenadamente siguiendo una determinada ley. Por ejemplo, los elementos del conjunto formado por los $n$ números,

$$(1) \qquad 3, 5, 7, \ldots, 2n + 1,$$

se obtienen en forma ordenada multiplicando el número que indica el orden del término por 2 y aumentando el resultado en 1. Así el primer término es $2(1) + 1 = 3$, el segundo término es $2(2) + 1 = 5$, el tercer término es $2(3) + 1 = 7$, y así sucesivamente.

Los conjuntos de este tipo tienen tal importancia que se les da el nombre especial de *sucesiones.*

**Definición.** Una *sucesión* de números es un *conjunto ordenado* de números formados de acuerdo con una ley dada.

El requisito esencial para que exista una sucesión es que exista una ley o fórmula con la cual sea posible obtener cualquier elemento de la sucesión. Por ejemplo, si $u_n$ representa el enésimo término de una sucesión, entonces debe existir una expresión para $u_n$ en términos de $n$, es decir, dicho término enésimo debe ser una función de $n$. Así, en el ejemplo dado anteriormente, $u_n = 2n + 1$, la cual es una fórmula que nos permite obtener cualquier término de la sucesión.

Si una sucesión tiene un último término se le llama *sucesión finita;* en caso contrario, es decir, si el número de términos es ilimitado, se le llama *sucesión infinita.*

NOTA. La suma indicada de los términos de una sucesión recibe el nombre de *serie;* una serie puede ser *finita* o *infinita* según que la sucesión que la forma sea finita o infinita. Las series infinitas son objeto de estudio especial en los tratados de cálculo diferencial y también son de gran importancia en la Teoría de funciones.

En los siguientes artículos estudiaremos tres tipos diferentes de sucesiones finitas y un tipo de sucesión infinita.

## 10.2. PROGRESION ARITMETICA

**Definición.** Una *progresión aritmética* es una sucesión de números tal que cada uno de los términos posteriores al primero se obtiene añadiendo al término anterior un número fijo llamado la *diferencia* de la progresión.

Un ejemplo de progresión aritmética es la sucesión (1) del Art. 10.1.

De acuerdo con la definición, una progresión aritmética puede escribirse en la forma

$$a_1, \quad a_1 + d, \quad a_1 + 2d, \quad a_1 + 3d, \ldots, \tag{1}$$

en donde $a_1$ se llama *primer término* y $d$ es la diferencia.

Si $a_n$ representa el enésimo término de la sucesión (1), entonces

el segundo término es $a_2 = a_1 + d$,
el tercer término es $a_3 = a_1 + 2d$,
el cuarto término es $a_4 = a_1 + 3d$,

y en general, el enésimo término es

$$a_n = a_1 + (n - 1)d. \tag{2}$$

Ahora vamos a obtener una expresión para la suma $s_n$, de los $n$ primeros términos de la sucesión (1), es decir, para la suma

$$\begin{aligned} s_n = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \ldots \\ + (a_n - 2d) + (a_n - d) + a_n. \end{aligned} \tag{3}$$

Escribiendo los términos del segundo miembro de (3) en orden inverso, tenemos

$$\begin{aligned} s_n = a_n + (a_n - d) + (a_n - 2d) + \ldots \\ + (a_1 + 2d) + (a_1 + d) + a_1. \end{aligned} \tag{4}$$

Sumando miembro a miembro (3) y (4), tenemos

$$\begin{aligned} 2s_n = (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \ldots \\ + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) = n(a_1 + a_n) \end{aligned}$$

de donde

$$s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n). \tag{5}$$

Este resultado nos dice:

**Teorema 1.** *Si en una progresión aritmética* $a_1$ *es el primer término,* $a_n$ *es el enésimo término,* $d$ *es la diferencia y* $s_n$ *es la suma de los* $n$ *primeros términos, entonces tenemos las dos relaciones independientes*

$$a_n = a_1 + (n-1)d,$$

y

$$s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n).$$

Utilizando estas dos relaciones podemos obtener una segunda para $s_n$ que puede reemplazar a la relación (5):

$$s_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]. \tag{6}$$

La demostración del Teorema 1 puede efectuarse en forma rigurosa usando el método de inducción matemática (Art. 7.2).

Es importante observar que los cinco elementos: $a_1$, $a_n$, $d$, $n$ y $s_n$, de una progresión aritmética están relacionados por medio de dos fórmulas independientes. Por tanto, si se conocen tres cualesquiera de dichos elementos, pueden calcularse los otros dos.

**Ejemplo 1.** En la progresión aritmética 3, 5, 7, 9, . . . , calcular el término de lugar doce y la suma de los primeros doce términos.

SOLUCION. En esta progresión $a_1 = 3$, $d = 2$, $n = 12$. Por tanto, por el Teorema 1,

$$a_{12} = a_1 + (n-1)d = 3 + 11 \cdot 2 = 25,$$

y

$$s_{12} = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = \frac{12}{2}(3 + 25) = 168.$$

**Ejemplo 2.** En una progresión aritmética $a_1 = 2$ y $d = 3$. ¿Cuántos términos deben tomarse para que la suma sea 155?

SOLUCION. En este problema sabemos que $a_1 = 2$, $d = 3$ y $s_n = 155$, y deseamos hallar el valor de $n$. Ya que no conocemos el valor de $a_n$, será conveniente utilizar la fórmula (6) que da $s_n$, y resulta:

$$155 = \frac{n}{2}[2 \cdot 2 + (n-1)3],$$

$$310 = 4n + 3n^2 - 3n,$$

$$3n^2 + n - 310 = 0.$$

Factorizando, $(3n + 31)(n - 10) = 0,$

de donde $n = -\frac{31}{3}, \quad 10.$

Ya que $n$ debe ser un número entero y positivo, el número de términos buscado es 10.

En una progresión aritmética los términos que están entre dos términos dados $a$ y $b$ se llaman *medios aritméticos* entre $a$ y $b$. Los términos $a$ y $b$ reciben el nombre de *extremos*. Por ejemplo, en la progresión aritmética 3, 6, 9, 12, 15, 18, . . . , los medios aritméticos entre los extremos 6 y 18 son 9, 12 y 15. La manera como se interpolan un número dado de medios aritméticos entre dos números dados se muestra en el ejemplo siguiente.

**Ejemplo 3.** Interpolar cinco medios aritméticos entre 9 y $-3$.

SOLUCION. Debemos encontrar cinco números que con el 9 y el $-3$ como extremos, formen una progresión aritmética. Por tanto, necesitamos solamente hallar la diferencia $d$ de una progresión aritmética de 7 términos con $a_1 = 9$ y $a_7 = -3$. Para ello, sustituyendo en la relación

$$a_n = a_1 + (n-1)d,$$

tenemos

$$-3 = 9 + 6d,$$

de donde

$$d = -2.$$

Por tanto, los cinco medios aritméticos entre 9 y $-3$ son: $9 - 2 = 7$, 5, 3, 1, $-1$. Como comprobación observemos que al añadir $d = -2$ al último medio aritmético $-1$, obtenemos $-3$ que es el segundo extremo.

Si se interpola un solo medio aritmético entre dos números dados, éste se llama su *media aritmética*. Sea $A$ la media aritmética de los números $a$ y $b$, lo cual significa que $a, A, b$ están en progresión aritmética. Entonces, su diferencia común será

$$d = A - a = b - A,$$

de donde

$$2A = a + b,$$

y

$$A = \frac{a+b}{2}$$

es decir, *la media aritmética de dos números dados es igual a la mitad de su suma*. La media aritmética también recibe frecuentemente el nombre de promedio.

## EJERCICIOS. GRUPO 32

En cada uno de los ejercicios 1-6 hallar $a_n$ y $s_n$ en la progresión aritmética dada para el número indicado de términos.

1. 2, 6, 10, . . . hasta 11 términos. 2. $-3$, $-1$, 1, . . . hasta 9 términos.
3. 9, 7, 5, . . . hasta 14 términos. 4. 10, 9, 8, . . . hasta 20 términos.
5. $-8$, $-13/2$, $-5$, . . . hasta 16 términos.
6. 3, $8/3$, $7/3$, . . . hasta 24 términos.

En cada uno de los ejercicios 7-14 se dan tres de los cinco elementos de una progresión aritmética. Calcular los otros dos elementos.

7. $a_1 = 5$, $d = -3$, $n = 8$.
8. $a_1 = -3$, $a_n = 8$, $s_n = 30$.
9. $a_1 = 11$, $d = -2$, $s_n = -28$.
10. $a_n = 29$, $s_n = 225$, $d = 2$.
11. $a_1 = 30$, $a_n = -10$, $s_n = 90$.
12. $n = 11$, $d = 2$, $s_n = -44$.
13. $a_1 = 45$, $d = -3$, $s_n = 357$.
14. $a_n = 9$, $d = 3$, $s_n = -66$.

15. Hallar la suma de todos los múltiplos positivos de 3 que son menores que 20.

16. Calcular la suma de todos los múltiplos positivos de 5 que son menores que 100.

17. Obtener la media aritmética de 7 y $-11$.

18. La media aritmética de dos números es 6. Si uno de los números es 21, calcular el otro número.

19. Interpolar cinco medios aritméticos entre $-4$ y 8.

20. Interpolar siete medios aritméticos entre 5 y 1.

21. Interpolar cinco medios aritméticos entre $-12$ y 4.

22. Interpolar dos medios aritméticos entre $1 + \sqrt{2}$ y $1 - 2\sqrt{2}$.

23. El tercer término de una progresión aritmética es $-3$ y el octavo término es 2. Hallar la diferencia y el sexto término.

24. El cuarto término de una progresión aritmética es 11 y el undécimo término es 21. Calcular el primer término y la suma de los primeros quince términos.

25. El quinto término de una progresión aritmética es 2 y el noveno término es $-10$. Obtener el séptimo término y la suma de los primeros 12 términos.

26. El sexto término de una progresión aritmética es $-9$, y el duodécimo término es $-33$. Hallar la diferencia y la suma de los primeros diez términos.

27. Demostrar el Teorema 1 del Art. 10.2 usando el método de inducción matemática.

28. Si se interpolan $n$ medios aritméticos entre $a$ y $b$, demostrar que la diferencia viene dada por $d = (b - a)/(n + 1)$.

29. Calcular la suma de los $n$ primeros números enteros y positivos impares.

30. Hallar la suma de los $n$ primeros números enteros y positivos pares.

31. Calcular la suma de los $2n$ primeros números enteros y positivos. Compruebe el resultado combinando los resultados de los ejercicios 29 y 30.

32. Obtener el término central de la progresión aritmética del ejercicio 1.

33. Calcular el término central de la progresión aritmética del ejercicio 2.

34. Hallar los dos términos centrales de la progresión aritmética del ejercicio 3.

35. Calcular los dos términos centrales de la progresión aritmética del ejercicio 4.

36. Hallar el término central de una progresión aritmética de $n$ términos cuyo primer término es $a_1$ y cuya diferencia es $d$, siendo $n$ un número impar. Demostrar que el término mencionado es igual a $s_n/n$.

37. Calcular los dos términos centrales de una progresión aritmética de $n$ términos cuyo primer término es $a_1$ y cuya diferencia es $d$, siendo $n$ un número par. Demostrar que la suma de dichos términos es $2s_n/n$.

38. Usar los resultados de los ejercicios 36 y 37 para comprobar los resultados de los ejercicios 32-35.

39. Calcular la suma de la sucesión $1, -3, 5, -7, 9, -11, \ldots$ hasta $2n$ términos.

40. Hallar la suma de la sucesión $1, -2, 3, -4, 5, -6, \ldots$ hasta $2n$ términos.

41. Demostrar que la suma de $2n + 1$ números enteros consecutivos cualesquiera es divisible entre $2n + 1$.

42. Si cada uno de los términos de una progresión aritmética se multiplica por una misma cantidad, no igual a cero, demostrar que la sucesión resultante es también una progresión aritmética.

43. Un cuerpo en caída libre recorre aproximadamente 4.9 metros en el primer segundo, y en cada segundo subsecuente recorre 9.8 metros más que en el segundo anterior. Se deja caer una piedra de lo alto de una torre y se observa que tarda 4 segundos en llegar al suelo; hallar la altura de la torre y la distancia recorrida por la piedra en el último segundo.

44. La suma de tres números en progresión aritmética es 21 y el producto del primero y el tercero es 33. Hallar los números. (*Sugerencia:* Representar los números por $a - d, a, a + d$.)

45. Un número está formado por cuatro dígitos en progresión aritmética. La suma de todos los dígitos es 16 y la suma de los últimos dos dígitos es 12. ¿Cuál es el número?

## 10.3. PROGRESION GEOMETRICA

El estudiante observará que entre este artículo y el precedente existe una marcada analogía.

**Definición.** Una *progresión geométrica* es una sucesión de números tal que cualquier término posterior al primero se obtiene multiplicando el término anterior por un número no nulo llamado *razón de la progresión.*

Un ejemplo de progresión geométrica es: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots$

De acuerdo con la definición, una progresión geométrica puede escribirse en la forma

$$a_1, \quad a_1r, \quad a_1r^2, \ldots, \tag{1}$$

en donde $a_1$ recibe el nombre de primer término y $r$ es la *razón.*

Si $a_n$ representa el enésimo término de la sucesión (1), entonces $a_2 = a_1r$, $a_3 = a_1r^2$, y en general, el enésimo término será

$$a_n = a_1r^{n-1} \tag{2}$$

Ahora vamos a obtener una expresión para la suma $s_n$, de los $n$ primeros términos de la sucesión (1), es decir, para la suma

$$s_n = a_1 + a_1r + a_1r^2 + \ldots + a_1r^{n-2} + a_1r^{n-1}. \tag{3}$$

Multiplicando ambos miembros de (3) por $r$, obtenemos

$$rs_n = a_1r + a_1r^2 + \ldots + a_1r^{n-2} + a_1r^{n-1} + a_1r^n. \tag{4}$$

Restando miembro a miembro (4) de (3), resulta

$$s_n - rs_n = a_1 - a_1r^n,$$

o sea

$$s_n(1 - r) = a_1(1 - r^n),$$

de donde

$$s_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}, \quad r \neq 1. \tag{5}$$

**Teorema 2.** *Si en una progresión geométrica $a_1$ es el primer término, $a_n$ es el enésimo término, $r$ es la razón y $s_n$ es la suma de los $n$ primeros términos, entonces tenemos las dos relaciones independientes*

$$a_n = a_1 r^{n-1},$$

y

$$s_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}, \quad r \neq 1.$$

De la primera igualdad obtenemos $ra_n = a_1 r^n$ que al sustituirse en la segunda nos da la siguiente fórmula que puede reemplazar a la relación (5):

$$s_n = \frac{a_1 - ra_n}{1-r}, \quad r \neq 1. \tag{6}$$

La demostración del Teorema 2 puede efectuarse en forma rigurosa usando el método de inducción matemática (Art. 7.2).

Es importante observar que los cinco elementos $a_1$, $a_n$, $r$, $n$, y $s_n$, de una progresión geométrica están relacionados por medio de dos fórmulas independientes. Por tanto, si se conocen tres cualesquiera de dichos elementos, pueden determinarse los otros dos.

**Ejemplo 1.** En la progresión geométrica 1, 2, 4, . . . , hallar el séptimo término y la suma de los siete primeros términos.

SOLUCION. En esta progresión, $a_1 = 1$, $r = 2$, $n = 7$. Por tanto, por el Teorema 2,

$$a_7 = a_1 r^{n-1} = 1 \cdot 2^6 = 64,$$

y

$$s_7 = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r} = \frac{1(1-2^7)}{1-2} = 127.$$

**Ejemplo 2.** En una progresión geométrica el primer término es 4, el último es $30\frac{3}{8}$, y la suma de los términos es $83\frac{1}{8}$. Hallar la razón y el número de términos.

SOLUCION. En este problema sabemos que $a_1 = 4$, $a_n = 30\frac{3}{8} = \dfrac{243}{8}$ y $s_n = 83\frac{1}{8} = \dfrac{665}{8}$ y deseamos calcular $r$ y $n$. Ya que se desconoce tanto $r$ como $n$ usaremos la relación (6):

$$s_n = \frac{a_1 - ra_n}{1-r}.$$

Sustituyendo, $$\frac{665}{8}=\frac{4-\frac{243}{8}r}{1-r}.$$

Multiplicando por $8(1-r)$, se obtiene $665-665r=32-243r$,

de donde $$-422r=-633 \quad \text{y} \quad r=\frac{3}{2}.$$

Sustituyendo en $a_n=a_1r^{n-1}$,

tenemos $$\frac{243}{8}=4\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1},$$

de donde $$\frac{243}{32}=\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1},$$

y $$\left(\frac{3}{2}\right)^5=\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}.$$

Por tanto $$n-1=5 \quad \text{y} \quad n=6.$$

En una progresión geométrica los términos entre dos términos dados $a$ y $b$ reciben el nombre de *medios geométricos* entre $a$ y $b$. Los términos $a$ y $b$ se llaman *extremos.* El método para interpolar medios geométricos entre dos números dados se muestra en el ejemplo siguiente.

**Ejemplo 3.** Interpolar cinco medios geométricos entre ¼ y 16.

SOLUCION. Debemos encontrar 5 números tales que, con ¼ y 16 como extremos, formen una progresión geométrica. Por tanto bastará determinar la razón $r$ de una progresión geométrica de 7 términos en la que $a_1=\frac{1}{4}$ y $a_7=16$. sustituyendo en la relación

$$a_n=a_1r^{n-1},$$

tenemos $$16=\tfrac{1}{4}r^6,$$
de donde $$r^6=64,$$
y $$r=2.$$

Los 5 medios geométricos son $\frac{1}{4}\cdot 2=\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}\cdot 2=1$, 2, 4, 8. Como comprobación observamos que al multiplicar el último medio geométrico 8 por la razón 2, obtenemos 16, que es el segundo extremo.

NOTA 1. Hemos visto anteriormente (Art. 8.6, Teorema 4) que todo número (excepto el cero) tiene exactamente $n$ raíces enésimas distintas. Por tanto, en el ejemplo anterior hay realmente seis valores distintos para $r$ y, en consecuencia, seis conjuntos distintos de medios geométricos. Sin embargo, para nuestro propósito es suficiente, a menos que se especifique lo contrario, limitarnos a progresiones geométricas cuyos términos sean reales y únicos. Esta simplificación se obtuvo en el ejemplo anterior al tomar como valor de $r$ únicamente la raíz principal de 64 (Art. 2.13).

Si se interpola un solo medio geométrico entre dos números dados se obtiene la *medida geométrica.* Sea $G$ la medida geométrica de dos números dados $a$ y $b$, lo que significa que $a$, $G$, $b$ están en progresión geométrica. Entonces la razón será

$$r = \frac{G}{a} = \frac{b}{G}$$

de donde

$$G^2 = ab,$$

y

$$G = \pm\sqrt{ab},$$

es decir, *la media geométrica de dos números dados es igual en valor absoluto a la raíz cuadrada de su producto. La media geométrica también se llama media proporcional.*

NOTA 2. En la nota 1 acordamos que, a menos que se especificara lo contrario, los términos de una progresión geométrica se considerarían como reales y únicos. Luego, para que la media geométrica $G$ de $a$ y $b$ sea real, $a$ y $b$ deben tener el mismo signo. Además, para que $G$ tenga un valor único, convendremos en dar a $G$ signo común a $a$ y $b$. Así, por ejemplo, la media geométrica de 3 y 48 es 12; mientras que la media geométrica de —3 y —48 es —12. Obsérvese que en ambos casos $r = 4$, que es la raíz cuadrada principal de 16.

## EJERCICIOS. GRUPO 33

En cada uno de los ejercicios 1-6, hallar $a_n$ y $s_n$ en la progresión geométrica dada para el número indicado de términos.

1. 2, 4, 8, . . . hasta 10 términos. 2. 3, 6, 12, . . . hasta 7 términos.
3. 1, 4, 16, . . . hasta 7 términos. 4. 3, 6, $-1$, $\frac{1}{3}$, . . . hasta 8 términos.
5. 48, 24, 12 . . . hasta 6 términos. 6. 2, $-\frac{2}{3}$, $\frac{2}{9}$, . . . hasta 7 términos.

En cada uno de los ejercicios 7-12, se dan tres de los cinco elementos de una progresión geométrica. Calcular los otros dos elementos.

7. $a_1 = 1$, $a_n = -\frac{32}{243}$, $r = -\frac{2}{3}$. 8. $a_1 = 2$, $a_{10} = -1024$, $n = 10$.
9. $a_1 = 2$, $a_6 = 64$, $n = 6$. 10. $a_n = 729$, $r = 3$, $s_n = 1093$.
11. $r = 2$, $s_7 = 635$, $n = 7$. 12. $n = 6$, $r = \frac{1}{4}$, $a_1 = 16$.
13. Interpolar tres medios geométricos entre 16 y $\frac{1}{16}$.
14. Interpolar cuatro medios geométricos entre $\frac{1}{9}$ y $-27$.
15. Interpolar cinco medios geométricos entre $\frac{1}{8}$ y 8.
16. Interpolar tres medios geométricos entre 2 y 8.
17. Hallar la media geométrica de $x^2$ y $y^2$.
18. La media geométrica de dos números positivos es 4. Hallar los números si uno de ellos es el cuádruplo del otro.
19. El tercer término de una progresión geométrica es 3, y el séptimo término es $\frac{3}{16}$. Calcular la razón y el primer término.

20. El segundo término de una progresión geométrica es —18, y el quinto término es $16/3$. Calcular el sexto término y la suma de los cinco primeros términos.

21. El tercer término de una progresión geométrica es 9 y el sexto término es 243. Hallar el séptimo término y la suma de los primeros seis términos.

22. Demostrar el Teorema 2 del Art. 10.3 por inducción matemática.

23. Las fórmulas para $s_n$, dadas por las relaciones (5) y (6) del Art. 10.3, no son válidas para $r = 1$. Obtener la fórmula para la suma de $n$ términos de una progresión geométrica cuyo primer término es $a_1$ y cuya razón es $r = 1$.

24. Demostrar que si cada término de una progresión geométrica se multiplica por una constante no nula, la sucesión resultante es también una progresión geométrica.

25. Demostrar que si se alternan los signos de los términos de una progresión geométrica resulta otra progresión geométrica.

26. Si cada término de una progresión geométrica se resta del término siguiente, demostrar que las diferencias sucesivas forman otra progresión geométrica.

27. Si cada término de una progresión geométrica es elevado a la misma potencia entera y positiva, demostrar que la sucesión resultante es también una progresión geométrica.

28. Demostrar que los recíprocos de los términos de una progresión geométrica forman también una progresión geométrica.

29. Una bomba para extracción de aire expulsa en cada movimiento la décima parte del aire de un tanque. Calcular la fracción del volumen original de aire que queda en el tanque, al final de ocho movimientos.

30. La masa de un péndulo recorre 16 cm durante la primera oscilación. En cada una de las oscilaciones siguientes la masa recorre $3/4$ de la distancia recorrida en la oscilación anterior. Calcular la distancia total recorrida por la masa en seis oscilaciones.

31. Un recipiente contiene 36 litros de alcohol puro. Se sacan seis litros y se reemplazan con agua. Si esta operación se efectúa seis veces, calcular la cantidad de alcohol puro que queda en el recipiente.

32. Una pelota de hule cae de una altura de 20 metros y rebota ascendiendo cada vez hasta una cuarta parte del ascenso anterior. Calcular la distancia total recorrida por la pelota cuando pega en el suelo por sexta vez.

33. La media aritmética de dos números positivos diferentes es 5 y su media geométrica es 4. Calcular los números.

34. La suma de tres números en progresión aritmética es 15. Si estos números se aumentan en 2, 1 y 3, respectivamente, las sumas quedan en progresión geométrica. Calcular los números.

35. Si tres números diferentes $a$, $b$ y $c$ están en progresión geométrica, demostrar que $1/(b - a)$, $1/2b$, y $1/(b - c)$ están en progresión aritmética.

## 10.4. PROGRESION ARMONICA

En este artículo consideraremos una sucesión de números especial.

**Definición.** Una *progresión armónica* es una sucesión de números cuyos recíprocos forman una progresión aritmética.

Por ejemplo, la sucesión $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \ldots, \frac{1}{2n}, \ldots$ es una progresión armónica ya que $2, 4, 6, \ldots, 2n, \ldots$ es una progresión aritmética.

De esta definición resulta evidente que los problemas de progresiones armónicas pueden resolverse considerando en cada caso la progresión aritmética correspondiente, tal como veremos en los ejemplos que damos a continuación. Sin embargo debe observarse que no hay fórmulas generales para el enésimo término o la suma de $n$ términos de una progresión armónica.

**Ejemplo 1.** El segundo término de una progresión armónica es $\frac{1}{5}$ y el octavo término es $\frac{1}{23}$. Calcular el quinto término.

SOLUCION. Resolvemos este problema considerando la correspondiente progresión aritmética en la cual $a_2 = 5$ y $a_8 = 23$. Por la fórmula del Art. 10.2, $a_n = a_1 + (n - 1)d$, tenemos

$$5 = a_1 + d,$$

y

$$23 = a_1 + 7d.$$

Restando, obtenemos $18 = 6d$, de donde $d = 3$ y $a_1 = 2$. Luego, $a_5 = a_1 + 4d = 2 + 4 \cdot 3 = 14$, lo que significa que el quinto término de la progresión armónica es $\frac{1}{14}$.

En una progresión armónica los términos que están entre dos términos dados $a$ y $b$ se llaman *medios armónicos* entre $a$ y $b$. El método para interpolar medios armónicos entre dos números dados se explica en el ejemplo siguiente.

**Ejemplo 2.** Interpolar cuatro medios armónicos entre $\frac{1}{7}$ y $-\frac{1}{3}$.

SOLUCION. Por los términos del Art. 10.2, encontramos que los cuatro medios aritméticos entre 7 y $-3$ son 5, 3, 1 y $-1$. Luego, los recíprocos de estos números nos dan los cuatro medios armónicos buscados $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{3}$, 1 y $-1$.

Si se interpola un solo medio armónico entre dos números dados se obtiene la *media armónica*. Sea $H$ la media armónica de dos números dados $a$ y $b$, lo que significa que $a, H, b$ están en progresión armónica. Por tanto, $\frac{1}{a}, \frac{1}{H}, \frac{1}{b}$ están en progresión aritmética cuya diferencia es

$$\frac{1}{H} - \frac{1}{a} = \frac{1}{b} - \frac{1}{H},$$

de donde

$$\frac{2}{H} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{b+a}{ab}$$

$$\frac{H}{2} = \frac{ab}{b+a}$$

y

$$H = \frac{2ab}{a+b}.$$

Hemos visto anteriormente (Art. 10.2) que la media aritmética $A$ de dos números dados $a$ y $b$ es

$$A = \frac{a+b}{2}.$$

Para evitar un error muy frecuente, el estudiante debe observar que la media armónica de dos números dados *no* es igual al recíproco de su media aritmética.

Existen varias relaciones interesantes entre las medias aritmética, geométrica y armónica de dos números dados. Por ejemplo, puede demostrarse fácilmente que la media geométrica de dos números es también la media geométrica de sus medias aritmética y armónica. También se deja como ejercicio la demostración de que para dos números positivos diferentes, la media aritmética es mayor que la media geométrica la cual, a su vez, es mayor que la media armónica. Resumimos estas propiedades en el teorema siguiente.

**Teorema 3.** *Si $A$, $G$ y $H$ son la media aritmética, la media geométrica y la media armónica, respectivamente, de dos números positivos diferentes $a$ y $b$, se verifica que*

$$A = \frac{a+b}{2}, \qquad G = \sqrt{ab}, \qquad H = \frac{2ab}{a+b},$$

*estando $A$, $G$ y $H$ relacionados por*

$$G^2 = AH. \qquad A > G > H.$$

**EJERCICIOS. GRUPO 34**

1. El tercer término de una progresión armónica es $\frac{4}{3}$ y el sexto término es $\frac{2}{3}$. Calcular el noveno término.

2. El segundo término de una progresión armónica es 3 y el quinto término es $\frac{6}{5}$. Hallar el octavo término.

3. Los tres primeros términos de una progresión armónica son $\frac{1}{3}$, $\frac{3}{8}$,$\frac{3}{7}$. Calcular los términos sexto y octavo.

4. Los tres primeros términos de una progresión armónica son $-\frac{1}{3}$, $-1$, 1. Hallar el noveno término.

5. Interpolar tres medios armónicos entre 2 y 1.

6. Interpolar cuatro medios armónicos entre $-\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{13}$.

7. Interpolar cinco medios armónicos entre 7 y 1.

8. Hallar la media armónica de 3 y 9.

9. Calcular la media armónica de $x + y$ y $x - y$.

10. La media aritmética de dos números es 8 y su media armónica es 6. ¿Cuáles son los números?

11. La media armónica de dos números es $\frac{15}{4}$ y su media aritmética es 4. Hallar los números.

12. La media armónica de dos números es $\frac{24}{5}$ y su media geométrica es 6. Calcular los números.

13. Determinar el valor de $x$ para que $x$, $x - 6$ y $x - 8$ formen una progresión armónica.

14. Determinar los valores de $x$ y $y$ sabiendo que $x$, 4, $y$ están en progresión aritmética y que $y$, 3, $x$ están en progresión armónica.

15. Tres números están en progresión armónica siendo el tercero el doble del primero. Si el primer número se disminuye en 1, el segundo se aumenta en $\frac{1}{3}$, y el tercero se aumenta en 5, los resultados están en progresión geométrica. ¿Cuáles son los tres números?

16. En el Teorema 3 (Art. 10.4), demostrar que $G^2 = AH$.

17. En el Teorema 3 (Art. 10.4), demostrar que $A > G > H$.

18. Si $a$, $b$, $c$ están en progresión aritmética y $b$, $c$, $d$ están en progresión armónica, demostrar que $ad = bc$.

19. Si $H$ es la media armónica de $a$ y $b$, demostrar que

$$\frac{1}{H - a} + \frac{1}{H - b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}.$$

20. Si $a^2$, $b^2$, $c^2$ están en progresión aritmética, demostrar que $b + c$, $c + a$, $a + b$ están en progresión armónica.

21. Si $a$, $b$, $c$ están en progresión armónica, demostrar que

$$\frac{a}{b + c}, \frac{b}{a + c}, \frac{c}{a + b}$$

también están en progresión armónica.

22. Si $a$, $b$, $c$ están en progresión armónica, demostrar que

$$\frac{2a - b}{2}, \frac{b}{2}, \frac{2c - b}{2}$$

están en progresión geométrica.

23. Si $a$, $b$, $c$ están en progresión armónica, demostrar que $a$, $a - c$, $a - b$, también están en progresión armónica.

24. Si $a$ es la media aritmética de $b$ y $c$, y $b$ es la media geométrica de $a$ y $c$, demostrar que $c$ es la media armónica de $a$ y $b$.

25. Si $a$, $b$, $c$ están en progresión armónica demostrar que

$$\frac{a}{b + c - a}, \frac{b}{c + a - b} \quad \text{y} \quad \frac{c}{a + b - c}$$

también están en progresión armónica.

## 10.5. PROGRESION GEOMETRICA INFINITA

Hasta aquí, hemos considerado solamente progresiones finitas. Ahora estudiaremos las progresiones geométricas infinitas, es decir, aquellas en que el número de términos es ilimitado. Para este propósito se requiere conocer el concepto de *límite,* que es de importancia fundamental en las matemáticas.

**Definición.** Se dice que la variable $x$ tiene como límite la constante $k$, si y sólo si, el valor absoluto de la diferencia entre valores sucesivos de $x$ y el número $k$, es decir $|x - k|$, puede llegar a ser, y permanecer, menor que cualquier número positivo dado de antemano, por pequeño que éste sea.

Las notaciones usadas para límite son:

$$\text{lím}\, x = k \qquad \text{o} \qquad x \to k,$$

la primera se lee "el límite de $x$ es $k$, y la segunda "$x$ tiende a $k$".

NOTA 1. El estudiante se encontrará más adelante con la definición general del concepto de límite cuando emprenda el estudio del cálculo diferencial. Sin embargo la presente definición satisface nuestras necesidades actuales.

En diversos temas de matemáticas elementales se aplica el concepto de límite. Por ejemplo, si consideramos el perímetro de un polígono inscrito en una circunferencia y hacemos que aumente el número de lados, los perímetros de los polígonos resultantes tienden hacia la longitud de la circunferencia. Esto es, aumentando el número de lados suficientemente, podemos lograr que el valor absoluto de la diferencia entre el perímetro y la longitud de la circunferencia resulte menor que cualquier número positivo dado de antemano, por pequeño que éste sea. En este ejemplo la variable $x$ de nuestra definición está representada por los diversos valores del perímetro $P$, y la constante $k$ está representada por la longitud de la circunferencia $C$. Entonces podemos escribir

$$\text{lím}\, P = C. \tag{1}$$

También consideraremos el caso en que una variable aumenta en forma ilimitada. Un ejemplo sencillo corresponde al caso de una sucesión infinita, o sea con un número de términos ilimitados. Indicamos esto escribiendo $n \to \infty$, lo cual se lee "$n$ tiende a infinito".

NOTA 2. Es importante que el estudiante comprenda que el símbolo $\infty$ *no* es un número. La notación $n \to \infty$ también puede interpretarse como que al crecer $n$, dicha variable puede llegar a ser mayor que cualquier número dado de antemano por grande que este sea.

El concepto de límite se utiliza muy a menudo en conexión con la variación de dos variables relacionadas. Por ejemplo, consideremos la función

$$y = \frac{1}{1 + x}.$$

Supongamos que $x$ tiende al límite 1, entonces es posible demostrar que $y$ tiene por límite ½. En consecuencia escribimos

$$\lim_{x \to 1} \frac{1}{1 + x} = \frac{1}{2},$$

lo cual se lee "el límite de $1/(1 + x)$, cuando $x$ tiende a 1, es ½".

En el ejemplo anterior que dio lugar a la relación (1), sea $P_n$ el perímetro de un polígono de $n$ lados inscrito en una circunferencia dada cuya longitud es igual a $C$. Si hacemos tender a infinito el número de lados $n$, podemos escribir

$$\lim_{n \to \infty} P_n = C,$$

que indica el proceso del paso al límite en forma más completa que la relación (1).

Consideremos ahora la función

$$y = \frac{1}{1 - x}.$$

Suponiendo que $x$ se acerca cada vez más al número 1, es evidente que $y$ aumenta; de hecho, tomando $x$ suficientemente próximo a 1 podemos lograr que $y$ sea mayor que cualquier número dado de antemano, por grande que éste sea. Entonces decimos que cuando $x$ tiende a 1, $y$ tiende a infinito, y escribimos

$$\lim_{x \to 1} \frac{1}{1 - x} = \infty.$$

Paradójicamente, esta última igualdad es solamente un modo simbólico de decir que no existe el límite. Como se observó anteriormente, el símbolo $\infty$ no es un número, y esta igualdad sólo significa que al aproximarse el valor de $x$ a 1 la expresión $1/(1 - x)$ aumenta, pudiendo llegar a ser mayor que cualquier número por grande que éste sea.

Ahora consideraremos algunos límites que son necesarios para estudiar una progresión geométrica infinita con primer término $a_1$ y con razón $r$. Primeramente, supongamos que el valor absoluto de $r$ es mayor que 1, es decir $|r| > 1$. Entonces si $p$ es un número positivo, podemos escribir

$$|r| = 1 + p,$$

de donde
$$|r^n| = (1 + p)^n = 1 + np + p,$$

en donde $P$ es un número positivo que representa la suma de los términos restantes en el desarrollo del binomio (Art. 7.4). En donde se observa que conforme aumenta $n$, aumenta también el término $np$, por lo cual es posible demostrar que

$$\lim_{n \to \infty} |r^n| = \infty,$$

y también

(2)
$$\lim_{n \to \infty} |a_1 r^n| = \infty, \qquad |r| > 1.$$

Consideremos ahora el caso en que $|r| < 1$, es decir, $-1 < r < 1$. Entonces si $p$ es un número positivo podemos escribir

$$|r| = \frac{1}{1 + p}$$

de donde
$$|r^n| = \frac{1}{(1 + p)^n} = \frac{1}{1 + np + P} < \frac{1}{np}.$$

Aquí resulta que si $n$ aumenta, también $np$ aumenta, y $1/np$ tiene por límite cero. Luego,

$$\lim_{n \to \infty} |r^n| = 0,$$

y también

(3)
$$\lim_{n \to \infty} |a_1 r^n| = 0, \qquad |r| < 1.$$

Por el Teorema 2 (Art. 10.3) en una progresión geométrica cuyo primer término es $a_1$ y cuya razón es $r$, la suma de los $n$ primeros términos está dada por

(4)
$$s_n = \frac{a_1(1 - r^n)}{1 - r}, \qquad r \neq 1.$$

Nos interesa ahora averiguar qué ocurre con $s_n$ al aumentar indefinidamente el número de términos $n$, dando lugar a una *serie geométrica infinita* (Art. 10.1, Nota). Veremos que bajo ciertas condiciones $s_n$ puede tender a $\infty$ o puede oscilar entre dos valores; en estos casos se dice que la serie es *divergente*. Sin embargo, bajo otras condiciones $s_n$ puede tener un límite finito; este límite es, por *definición*, la *suma* de la serie, diciéndose que en este caso la serie es *convergente*.

Como ejemplo consideremos la progresión geométrica infinita

(5)
$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} + \ldots$$

Es fácil establecer, por medio de la fórmula (4), que para los $n$ primeros términos de esta serie se tiene

$$s_n = 2 - \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Aquí resulta que cuando $n$ aumenta, $1/(2^{n-1})$ tiende a cero y $s_n$ tiende a 2. Esto se representa como sigue:

$$s_\infty = \lim_{n \to \infty} s_n = 2,$$

es decir, la suma de la serie infinita (5) es 2, y por tanto la serie es *convergente*. Nótese que la palabra "suma" no tiene aquí el significado ordinario que corresponde al resultado de sumar un número finito de números.

NOTA 3. Es un ejercicio interesante representar geométricamente la serie (5) considerando un segmento de 2 unidades de longitud, cuyo origen sea el origen de coordenadas $O$ y cuyo extremo sea el punto $P$ en el lado positivo del eje $X$. Sean $P_1$ el punto medio de $OP$, $P_2$ el punto medio de $P_1P$, $P_3$ el punto medio de $P_2P$, y así sucesivamente. ¿Cómo hay que interpretar el significado de la longitud de $OP_n$ y de la posición del punto $P_n$ conforme $n$ toma los valores 1, 2, 3, . . . ?

Veamos ahora los valores de $s_n$ para los diversos valores de la razón $r$.

La fórmula (4) no define a $s_n$ para $r = 1$. En este caso la serie toma la forma:

$$s_n = a_1 + a_1 + a_1 + \ldots = na_1,$$

de donde $$s_\infty = \lim s_n = \infty,$$

es decir, $s_n$ es una sucesión sin límite y la serie es *divergente*.

Si $r = -1$, la serie toma la forma

$$s_n = a_1 - a_1 + a_1 - a_1 + \ldots$$

Si $n$ es impar, $s_n = a_1$; si $n$ es par, $s_n = 0$. Ya que esto es válido para todos los valores de $n$, se concluye que $s_n$ oscila entre $a_1$ y 0. Una serie de este tipo se denomina *oscilante*, y corresponde también a un caso de divergencia.

Ahora consideremos valores de la razón $r$ distintos de $\pm 1$. Para esto escribiremos la fórmula (4) en la forma:

$$s_n = \frac{a_1}{1-r} - \frac{a_1 r^n}{1-r}, \qquad r \neq 1. \tag{6}$$

Si $|r| > 1$, se concluye de (2) que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_1 r^n}{1-r} = \infty$, de donde, por (6), resulta:

$$s_\infty = \lim_{n\to\infty} s_n = \infty,$$

por lo que la serie es divergente.

Finalmente consideremos el caso en que $|r| < 1$. De (3) se deduce que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_1 r^n}{1-r} = 0$ de donde, por (6), resulta

$$s_\infty = \lim_{n\to\infty} s_n = \frac{a_1}{1-r}, \qquad |r| < 1,$$

y la serie es convergente.

Resumimos los resultados anteriores en el teorema siguiente:

**Teorema 4.** *Una progresión geométrica infinita cuyo primer término es $a_1$ y cuya razón es $r$, es convergente para todos los valores de $r$ tales que $|r| < 1$, y su suma está dada por*

$$s_\infty = \lim_{n\to\infty} s_n = \frac{a_1}{1-r}, \qquad |r| < 1,$$

*en donde $n$ representa el número de términos.*

*La serie es divergente para todos los demás valores de $r$.*

**Ejemplo 1.** Una pelota de hule se deja caer de una altura de 4 metros y cada vez rebota hasta una altura igual a una cuarta parte de la altura alcanzada en el rebote anterior. Calcular el valor de la distancia total recorrida por la pelota hasta que teóricamente quede en reposo.

SOLUCION. En realidad, debido a la resistencia, la pelota se para en un tiempo finito, pero después de un cierto número finito de rebotes la distancia recorrida será casi igual al valor teórico que corresponde a un número infinito de rebotes.

La distancia total recorrida teóricamente es igual a la suma de dos progresiones geométricas infinitas:

Descensos: $4, 1, \frac{1}{4}, \ldots,$

Ascensos: $1, \frac{1}{4}, \ldots$

Por el teorema 4, el valor buscado es

$$\frac{4}{1-\frac{1}{4}} + \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{16}{3} + \frac{4}{3} = 6\tfrac{2}{3} \text{ metros.}$$

Otro ejemplo de una progresión geométrica infinita lo forman las fracciones decimales periódicas. Tales fracciones decimales tienen un número ilimitado de cifras y de cierto lugar en adelante aparece una cifra, o un conjunto de cifras, que se repite periódicamente. Son ejemplos de fracciones decimales periódicas y de sus series geométricas infinitas equivalentes:

$$0.333\ldots = \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \ldots,$$

y
$$2.151515\ldots = 2 + \frac{15}{10^2} + \frac{15}{10^4} + \frac{15}{10^6} + \ldots,$$

Una fracción decimal periódica puede abreviarse colocando puntos sobre las cifras que se repiten. Así, en los dos ejemplos anteriores podemos escribir $0.\dot{3}$ y $2.\dot{1}\dot{5}$, respectivamente. Es posible demostrar que toda fracción decimal periódica representa un número racional.

**Ejemplo 2.** Hallar la fracción común (número racional) equivalente a la fracción decimal periódica $1.2\dot{6}$.

SOLUCION. Separamos 1.2, que es la parte que no se repite. Entonces para $0.0\dot{6}$ tenemos

$$0.06 = \frac{6}{10^2} + \frac{6}{10^3} + \frac{6}{10^4} + \ldots,$$

en donde $a_1 = 0.06$ y $r = 0.1$.

De donde
$$s_\infty = \frac{a_1}{1-r} = \frac{0.06}{1-0.1} = \frac{6}{90} = \frac{1}{15},$$

y
$$1.26 = 1.2 + \frac{1}{15} = \frac{6}{5} + \frac{1}{15} = \frac{18}{15} + \frac{1}{15} = \frac{19}{15}.$$

Este resultado puede comprobarse fácilmente por división directa.

## EJERCICIOS. GRUPO 35

En cada uno de los ejercicios 1-6 calcular la suma de la progresión geométrica infinita dada.

1. $12, 6, 3, \ldots$
2. $9, -3, 1, \ldots$
3. $3, \sqrt{3}, 1, \ldots$
4. $\sqrt{2}, 2-\sqrt{2}, 3\sqrt{2}-4, \ldots$
5. $\sqrt{5}, 1, \frac{\sqrt{5}}{5}, \ldots$
6. $1, \frac{1}{1+x}, \frac{1}{(1+x)^2}, \ldots, x > 0.$

En cada uno de los ejercicios 7-14 hallar la fracción común equivalente a la fracción decimal periódica dada y comprobar el resultado.

7. $0.7$.
8. $2.\dot{5}$.
9. $0.\dot{3}\dot{5}$.
10. $1.\dot{2}\dot{1}$.
11. $0.\dot{1}\dot{2}\dot{3}$.
12. $3.\dot{2}\dot{0}\dot{1}$.
13. $0.45\dot{1}\dot{2}$.
14. $1.\dot{0}\dot{3}\dot{7}$.

15. Comprobar que es correcto el siguiente método para obtener la fracción común equivalente a una fracción decimal periódica dada en la que se repite solamente una cifra (la cifra de las décimas). Sea $x$ la fracción decimal periódica dada. Se multiplica por 10, obteniendo $10x$, o sea, 10 veces la fracción decimal dada. Se resta la primera fracción de la segunda, obteniendo $9x$ que será una fracción decimal finita. Se divide entre 9 y se simplifica si es necesario; el resultado será la fracción común que se busca. Aplicar este método para resolver el ejercicio 7.

16. Extender el método del ejercicio 15 al caso de una fracción decimal periódica pura (aquélla que el período empieza en las décimas) con período de dos cifras. Aplicar el método para resolver el ejercicio 9.

17. Extender el método del ejercicio 15 al caso de una decimal periódica pura con período de tres cifras. Aplicar el método utilizándolo para resolver el ejercicio 14.

18. Una pelota de hule cae de una altura de 9 metros y cada vez rebota hasta una tercera parte de la altura alcanzada en el rebote anterior. Calcular la distancia total recorrida por la pelota hasta que teóricamente quede en reposo.

19. Una pelota de hule cae de una altura de 10 metros y cada vez rebota hasta una quinta parte de la altura alcanzada en el rebote anterior. Calcular la distancia total recorrida por la pelota hasta que teóricamente quede en reposo.

20. La masa de un péndulo recorre 8 cm en la primera oscilación. En cada oscilación subsecuente la masa recorre $\frac{7}{8}$ de la distancia recorrida en la oscilación anterior. Calcular la distancia total recorrida por la masa del péndulo hasta que teóricamente quede en reposo.

21. La suma de una progresión geométrica infinita es $21\frac{1}{3}$. Si el primer término es 16, hallar el quinto término.

22. La suma de una progresión geométrica infinita es 81. Si la razón es $\frac{2}{3}$, hallar el séptimo término.

23. De la definición de límite, demostrar que el límite de una constante es la constante misma.

24. Por división directa demostrar que $a_1/(1-r)$ produce una serie geométrica infinita cuyo primer término es $a_1$ y cuya razón es $r$.

25. Demostrar que en una serie geométrica infinita convergente el enésimo término tiende a cero cuando $n \to \infty$. *Nota:* Esta es una condición necesaria pero no suficiente para la convergencia de cualquier serie infinita.

26. Efectuar con todo detalle la resolución del ejercicio descrito en la Nota 3 (Art. 10.5).

27. En la serie geométrica infinita $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots$, determinar el número mínimo de términos cuya suma difiere de 2 en menos de 0.001.

28. Si $a$, $b$, $c$ están en progresión aritmética, demostrar que $a^2(b+c)$, $b^2(c+a)$, $c^2(a+b)$ están en progresión aritmética.

29. Si $(a-b)/(b-c) = a/x$, demostrar que $a$, $b$ y $c$ están en progresión aritmética, geométrica o armónica, según que $x = a$, $b$ o $c$, respectivamente.

30. Si $a$, $b$, $c$ están en progresión aritmética; $b$, $c$, $d$ están en progresión geométrica y $c$, $d$, $e$ están es progresión armónica, demostrar que $a$, $c$, $e$ están en progresión geométrica.

# 11

# Teoría de las ecuaciones

## 11.1. INTRODUCCION

Hemos llegado ahora a un tema muy importante del álgebra, pues vamos a considerar el problema de la determinación de las raíces de una ecuación algebraica de cualquier grado, lo cual constituye uno de los objetivos fundamentales de esta ciencia. En particular, este capítulo estará dedicado a la ecuación entera racional de grado $n$:

$$(1) \qquad a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0, \qquad a_0 \neq 0,$$

en donde $n$ es un número entero y positivo y los coeficientes $a_0, a_1, \ldots, a_n$ son constantes cualesquiera. Nos referiremos a $a_0$, con el nombre de *coeficiente principal,* siendo el coeficiente del término de mayor grado.

Para $n = 1$, la ecuación (1) es la *ecuación lineal* o *de primer grado* estudiada en el Capítulo 4; para $n = 2$, la ecuación (1) es la *ecuación cuadrática* o *de segundo grado,* estudiada en el Capítulo 5. Por tanto, en este capítulo consideraremos ecuaciones del tipo (1) para las cuales $n \geq 3$.

Hemos visto anteriormente que la solución o soluciones de las ecuaciones lineales cuadráticas pueden expresarse en términos de sus coeficientes por medio de un número finito de una o más de las seis operaciones del álgebra (Art. 4.4, Teorema 1; Art. 5.4, Teorema 1). Una solución del tipo mencionado se llama *solución algebraica* (Art. 1.6, definición fundamental); también se le llama *solución por radicales.* Existen soluciones algebraicas de la ecuación (1) para $n = 3$ (ecuación cúbica) y para $n = 4$ (ecuación de cuarto grado); sin embargo, estas soluciones son muy laboriosas de obtener y no muy prácticas para las aplicaciones ordinarias. En consecuencia, no las estudiaremos aquí. Además de esto, en los tratados superiores de álgebra se demuestra que para $n \geq 5$, la ecuación general entera y racional (1) no posee solución algebraica. (Véase el Art. 3.6, Nota 2.)

Ya que no tenemos intención de explicar la resolución algebraica de la ecuación (1) para $n = 3$ y $n = 4$, y ya que no existe solución algebraica para $n \geqq 5$, resulta natural preguntar ¿en qué forma nos proponemos resolver una ecuación de grado mayor que 2? Sencillamente, la respuesta es que intentaremos obtener mediante tanteos, con un cierto grado de precisión, valores aproximados de las raíces, que aceptaremos o rechazaremos, según lo que se obtenga al sustituirlos en la ecuación dada. Debido a que la raíz de una ecuación puede variar entre un número ilimitado de valores, es evidente que para que este método sea de valor práctico deberemos limitar en forma razonable el campo de nuestros tanteos. Por esta razón, en los siguientes artículos mostraremos cómo es posible, bajo ciertas condiciones, determinar el número, naturaleza y valores posibles de las raíces, como pasos preliminares a la determinación propiamente dicha de la solución de la ecuación dada.

## 11.2. EL PROBLEMA GENERAL

Según el artículo anterior salta a la vista que la discusión completa de las propiedades y resolución de la ecuación general entera y racional es un problema complicado. Existen tratados dedicados exclusivamente al estudio de la teoría de ecuaciones. Ya que aquí disponemos de un solo capítulo para este tema, nos limitaremos a dar una introducción a este interesante problema. Seleccionaremos aquellos puntos que serán de mayor utilidad al estudiante, tanto para sus necesidades matemáticas actuales como para las que tendrá en el futuro. Más adelante, después de adquirir conocimientos especiales de los temas del cálculo diferencial, el estudiante estará en condiciones de proseguir el estudio de la teoría de ecuaciones en tratados superiores.

En este artículo indicaremos brevemente la naturaleza y el alcance del capítulo. Aunque los coeficientes de la ecuación general son constantes cualesquiera, reales o complejas, nos limitaremos solamente a la resolución de aquellas ecuaciones cuyos coeficientes sean reales. Además, para una ecuación dada, primeramente pondremos atención a la determinación de las raíces reales, racionales e irracionales, y posteriormente, si es posible, determinaremos las raíces complejas utilizando los métodos ya estudiados. En los artículos que siguen cada teorema y cada procedimiento considerados, es presentado con estos objetivos en mente.

Por comodidad, de aquí en adelante la ecuación general (1) del Art. 11.1 convendremos en representarla en la forma $f(x) = 0$, en donde el primer miembro $f(x)$, es un polinomio en $x$ de grado $n$.

## 11.3. TEOREMAS DEL RESIDUO Y DEL FACTOR

A continuación obtendremos una proposición sencilla, pero sumamente importante, conocida como el *teorema del residuo*. Antes de enunciar formalmente este teorema y de dar su demostración, veremos su significado con un ejemplo.

Si dividimos el polinomio $f(x) = 3x^3 - 4x^2 - 2x - 7$ entre $x^{-2}$ usando la división algebraica ordinaria (Art. 2.7), obtenemos el cociente $Q(x) = 3x^2 + 2x + 2$ y el residuo $R = -3$. Observemos que también se encuentra este último resultado si en el dividendo $f(x)$ sustituimos $x$ por el valor 2, o sea $f(2) = 3(2)^3 - 4(2)^2 - 2(2) - 7 = -3$. El hecho de que $f(2)$ y el residuo $R$ hayan sido ambos iguales a $-3$ puede, por supuesto, deberse simplemente a una coincidencia en este caso particular. Pero vamos a demostrar que esto ocurre en todos los casos.

**Teorema 1.** *(Teorema del residuo). Si el polinomio $f(x)$ se divide entre $x - r$, siendo $r$ una constante independiente de $x$, el residuo es igual a $f(r)$.*

DEMOSTRACION. Escribamos el polinomio $f(x)$ en la forma

$$(1) \qquad f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n, \qquad a_0 \neq 0.$$

Entonces

$$(2) \qquad f(r) = a_0r^n + a_1r^{n-1} + \dots + a_{n-1}r + a_n.$$

Restando miembro a miembro (2) de (1), obtenemos

$$(3) \quad f(x) - f(r) = a_0(x^n - r^n) + a_1(x^{n-1} - r^{n-1}) + \dots + a_{n-1}(x - r).$$

Ahora bien, puede demostrarse por inducción matemática que para todo valor entero y positivo de $n$, $x^n - r^n$ es exactamente divisible entre $x - r$. (Véase el ejemplo 6, Grupo 24, Art. 7.3.) Por tanto, por (3) se concluye que $f(x) - f(r)$ es divisible entre $x - r$. Llamemos $Q(x)$ el cociente obtenido. Podemos escribir.

$$f(x) - f(r) = (x - r)Q(x),$$

de donde

$$f(x) = (x - r)Q(x) + f(r),$$

y

$$\frac{f(x)}{x - r} = Q(x) + \frac{f(r)}{x - r},$$

es decir, el residuo de la división de $f(x)$ entre $x - r$ es igual a $f(r)$, como se quería demostrar.

Por medio del teorema del residuo podemos establecer otra proposición importante y útil llamada teorema del factor.

**Teorema 2.** *(Teorema del factor). Si $r$ es una raíz de la ecuación entera $f(x) = 0$, entonces $x - r$ es un factor del polinomio $f(x)$, y viceversa.*

DEMOSTRACION. Ya que $r$ es una raíz de $f(x) = 0$, se deduce, por definición de raíz, que $f(r) = 0$. Por otra parte, por el teorema del residuo, el resto de la división de $f(x)$ entre $x - r$ es $R = f(r)$. Luego, $R = 0$, es decir, la división es exacta y $x - r$ es un factor de $f(x)$.

Recíprocamente, si $x - r$ es un factor de $f(x)$, resulta que $x - r$ es un divisor exacto de $f(x)$ y el residuo $R = 0$. Por tanto, por el teorema del residuo, $R = f(r) = 0$ y $r$ es una raíz de $f(x) = 0$.

NOTA. Conviene notar que el Teorema 4 (Art. 5.5), para una ecuación cuadrática, es un caso especial del Teorema 2.

**Ejemplo 1.** Sin efectuar la división, calcular el residuo que se obtiene al dividir el polinomio $f(x) = x^4 + 5x^3 + 5x^2 - 4x - 7$ entre $x + 3$.

SOLUCION. Por el teorema del residuo, el resto que se obtiene al dividir el polinomio dado $f(x)$ entre $x + 3$ es

$$\begin{aligned} f(-3) &= (-3)^4 + 5(-3)^3 + 5(-3)^2 - 4(-3) - 7 \\ &= 81 - 135 + 45 + 12 - 7 = -4. \end{aligned}$$

Se puede comprobar fácilmente este resultado efectuando la división.

**Ejemplo 2.** Por medio del teorema del factor, demostrar que $x - 5$ es un factor de $f(x) = x^3 - 8x^2 + 19x - 20$.

SOLUCION. $x - 5$ será factor de $f(x)$ si $f(5) = 0$. Y efectivamente

$$f(5) = 5^3 - 8 \cdot 5^2 + 19 \cdot 5 - 20 = 125 - 200 + 95 - 20 = 0.$$

**Ejemplo 3.** Por medio del teorema del residuo, demostrar que $x^n - a^n$ es divisible exactamente entre $x - a$ para todo valor entero y positivo de $n$.

SOLUCION. Por el teorema del residuo, el resto de la división de $f(x) = x^n - a^n$ entre $x - a$ es $f(a) = a^n - a^n = 0$. Luego la división es exacta.

Este resultado también puede obtenerse por inducción matemática. (Véanse ejercicios 6 y 7 del Grupo 24, Art. 7.3.)

## 11.4. DIVISION SINTETICA

Como hemos visto en el artículo anterior, el teorema del residuo nos permite obtener el valor del polinomio $f(x)$ para valores determinados de $x$ sin hacer la sustitución directa. Pero esto requiere la división de un polinomio entre un binomio, y la operación puede resultar bastante larga si se utiliza la división ordinaria. Hay un método para efectuar rápidamente esta división conocido como *división sintética.*

Vamos a explicarlo efectuando la división del polinomio $3x^3-4x^2-2x-7$ entre $x-2$.

Por división algebraica ordinaria (Art. 2.7), la operación se dispone como sigue:

$$\begin{array}{l|lllll}
\multicolumn{1}{l}{} & 3x^2 & +\,2x & +\,2 & \text{(Cociente)} \\ \cline{2-5}
x-2 & 3x^3 & -\,4x^2 & -\,2x & -\,7 \\
 & 3x^3 & -\,6x^2 & & \\ \cline{2-3}
 & & 2x^2 & -\,2x & \\
 & & 2x^2 & -\,4x & \\ \cline{3-4}
 & & & 2x & -\,7 \\
 & & & 2x & -\,4 \\ \cline{4-5}
 & & & & -\,3 \text{ (Residuo)}.
\end{array}$$

Ahora procederemos a abreviar el esquema anterior tanto como sea posible. Ya que los polinomios se escriben ordenados de acuerdo con las potencias descendentes de $x$, podemos omitir tales potencias y conservar solamente sus coeficientes. Además, ya que el coeficiente de $x$ en el divisor es la unidad, el primer término de cada producto parcial es una repetición del término que está inmediatamente sobre él, y por tanto puede ser omitido. También, ya que el segundo término de cada residuo parcial es una repetición del término que está sobre él en el dividendo, puede ser omitido. Por comodidad, omitimos el primer término del divisor y colocamos el término constante a la derecha del dividendo. Además, ya que cada coeficiente del cociente, con excepción del primero, está representado por el primer coeficiente del residuo parcial resulta que todo el cociente puede omitirse. Con todas estas omisiones la división se reduce a lo siguiente:

$$\begin{array}{rrrrl}
3 & -\,4 & -\,2 & -\,7 & \underline{|-2} \\
 & -\,6 & & & \\ \cline{1-2}
 & 2 & & & \\
 & & -\,4 & & \\ \cline{1-3}
 & & 2 & & \\
 & & & -\,4 & \\ \cline{4-4} \cline{4-4}
 & & & -\,3 &
\end{array}$$

Puede escribirse ocupando menos espacio disponiendo el esquema en tres líneas y repitiendo el coeficiente principal en la tercera:

$$\begin{array}{rrrrl}
3 & -\,4 & -\,2 & -\,7 & \underline{|-2} \\
 & -\,6 & -\,4 & -\,4 & \\ \hline
3 & +\,2 & +\,2 & -\,3 &
\end{array}$$

Si cambiamos el signo del término que representa al divisor, podremos *sumar* los productos parciales en lugar de restarlos. Esto es deseable pues el residuo obtenido como resultado de esta división es el valor de $f(x)$ cuando el valor de $x$ es 2 y no $-2$. En consecuencia, la forma final de nuestra división queda como sigue:

$$\begin{array}{rrrrl} 3 & -4 & -2 & -7 & \underline{|2} \\ & +6 & +4 & +4 & \\ \hline 3 & +2 & +2 & \multicolumn{1}{|r}{\underline{-3}} & \end{array}$$

El cociente $3x^2 + 2x + 2$ se construye utilizando la tercera línea, y el residuo, separado de esta línea tal como se indica, es $-3$.

## Regla para la división sintética

Para dividir un polinomio $f(x)$ entre $x - r$, se procede como sigue:

En la primera línea se escriben en orden los coeficientes $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ del dividendo $f(x)$, y el número $r$ separado y a la derecha. Si alguna potencia de $x$ no aparece en $f(x)$ su coeficiente se escribe como cero.

Se escribe el coeficiente principal $a_0$ como primer término de la tercera línea y se multiplica por $r$, escribiendo el producto $a_0r$ en la segunda línea debajo de $a_1$. Se suma $a_1$ con el producto $a_0r$ y se escribe la suma $a_1 + a_0r$ en la tercera línea. Se multiplica esta suma por $r$, se escribe el producto en la segunda línea debajo de $a_2$ y se suma con $a_2$, escribiéndose la suma en la tercera línea. Se continúa de esta manera hasta que se usa como sumando $a_n$ escribiéndose la suma en la tercera línea.

El último número de la tercera línea es el residuo; los números anteriores son los coeficientes del cociente correspondientes a potencias descendentes de $x$.

NOTA. La demostración rigurosa de la regla anterior se obtiene por inducción matemática.

Después de practicar un poco, el estudiante estará en condiciones de efectuar la operación de división sintética con gran rapidez. Ilustramos la regla en el siguiente

**Ejemplo.** Por división sintética, hallar el cociente y el residuo de la división de $2x^4 + 3x^3 - x - 3$ entre $x + 2$.

SOLUCION. Primeramente observamos que como el dividendo carece del término en $x^2$, pondremos el coeficiente cero en ese lugar. Además, ya que vamos a dividir entre $x + 2 = x - (-2) = x - r$, deberemos tomar $r = -2$. La operación se dispone como sigue:

$$\begin{array}{r|l} 2+3+0-1-\ \ 3 & -2 \\ -4+2-4+10 & \\ \hline 2-1+2-5 \mid +7 & \end{array}$$

Por tanto, el cociente es $2x^3 - x^2 + 2x - 5$ y el residuo es 7.

## EJERCICIOS. GRUPO 36

En cada uno de los ejercicios 1-4 demostrar el enunciado dado por medio del teorema del residuo sabiendo que $n$ es un número entero y positivo.

1. $x^n - a^n$ es divisible exactamente entre $x + a$ si $n$ *es* par.
2. $x^n + a^n$ es divisible exactamente entre $x + a$ si $n$ es impar
3. $x^n + a^n$ no es divisible exactamente entre $x + a$ si $n$ es par.
4. $x^n + a^n$ no es divisible exactamente entre $x - a$ si $n$ es par.

En cada uno de los ejercicios 5-10 hallar los valores que se piden del polinomio dado usando la división sintética y el teorema de residuo.

5. $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 5x - 7$; $f(2)$, $f(-1)$.
6. $f(x) = 3x^4 - 5x^3 + 2x^2 - 7x + 8$; $f(1)$, $f(-2)$.
7. $f(x) = x^5 - 2x^4 - 3x^2 - 2x - 8$; $f(3)$, $f(-1)$.
8. $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 3x - 2$; $f(\frac{1}{2})$, $f(-\frac{1}{2})$.
9. $f(x) = 9x^4 - 3x^2 + 2x - 1$; $f(\frac{1}{3})$, $f(0.1)$.
10. $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 2$; $f(0.2)$, $f(-0.1)$.

En cada uno de los ejercicios 11-15 obtener el cociente y el residuo usando la división sintética.

11. $(x^3 + 4x^2 + 7x - 2) \div (x + 2)$.
12. $(x^4 + 2x^3 - 10x^2 - 11x - 7) \div (x - 3)$.
13. $(x^6 - x^4 + x^2 - 2) \div (x - 1)$.
14. $(2x^5 - 14x^3 + 8x^2 + 7) \div (x + 3)$.
15. $(4x^4 - 3x^2 + 3x + 7) \div (x + \frac{1}{2})$.

En cada uno de los ejercicios 16-20 averiguar, usando el teorema del factor y la división sintética, si el binomio dado es factor del polinomio dado.

16. $x - 1$; $f(x) = x^3 + 2x^2 - 4x + 1$.
17. $x + 2$; $f(x) = x^4 - 3x^3 - 2x^2 + 5x - 9$.
18. $x + 3$; $f(x) = x^5 + 4x^4 - 7x^2 + 5x - 3$.
19. $x - 5$; $f(x) = x^4 - 5x^3 - x + 5$.
20. $x - 2$; $f(x) = x^6 - 5x^5 + 3x^3 - x^2 + 7$.

En cada uno de los ejercicios 21-25 averiguar, usando el teorema del factor y la división sintética si la ecuación dada tiene la raíz que se indica.

21. $x^3 - 9x^2 + 26x - 24 = 0$; $x = 2$.
22. $x^4 + 5x^3 + 4x^2 - 7x - 3 = 0$; $x = -3$.
23. $2x^4 + 10x^3 + 11x^2 - 2x + 5 = 0$; $x = -2$.
24. $3x^5 - x^4 + 2x^3 - 4x^2 + 3x - 10 = 0$; $x = 1$.
25. $5x^6 + 3x^5 - 2x^3 - 7x^2 + 1 = 0$; $x = 1$.

En cada uno de los ejercicios 26-30 utilizar el teorema del factor y la división sintética para obtener el resultado que se pide.

26. Demostrar que $x - 3$ es un factor de $x^3 - 2x^2 - 23x + 60$, y hallar los factores restantes.

27. Demostrar que $x - 1$ y $x + 2$ son factores de $x^4 + 2x^3 - 7x^2 - 8x + 12$, y hallar los factores restantes.

28. Hallar, por tanteo, todos los factores reales de $x^4 - x^3 - 4x^2 - 5x - 3$.

29. Comprobar que dos de las raíces de $x^4 + x^3 - 16x^2 - 4x + 48 = 0$ son 2 y $-4$, y hallar las raíces restantes.

30. Hallar, por tanteo, todas las raíces de la ecuación

$$x^4 - x^3 - 2x^2 - 2x + 4 = 0.$$

31. Usar la división sintética para hallar el cociente y el residuo de $2x^4 - 5x^3 + 3x^2 - x + 3$ dividido entre $2x + 1$. *Sugerencia:* Efectuar la división sintética entre $x + \frac{1}{2}$ y luego dividir el cociente entre 2.

32. Usar la división sintética para hallar el cociente y el residuo de $3x^4 + 2x^3 + 5x^2 - 5x - 3$ dividido entre $3x - 1$.

33. Usar el teorema del residuo para hallar el valor de $k$ que haga que el polinomio $3x^3 - 2x^2 + kx - 8$ sea divisible exactamente entre $x - 2$.

34. Hallar el valor que debe tener $k$ para que el polinomio $2x^3 + kx^2 - 3x - 4$ sea divisible exactamente entre $x + 1$.

35. Hallar el valor que debe tener $k$ para que al dividir $x^4 + 2x^3 - 3x^2 + kx - 7$ entre $x - 2$, el residuo sea 3.

36. Hallar el valor que debe tener $k$ para que al dividir $4x^3 + kx^2 - 2x + 5$ entre $x - 1$, el residuo sea 5.

37. Hallar los valores de $a$ y $b$ que hagan que $x - 1$ y $x + 2$ sean factores del polinomio $x^4 + ax^3 + bx - 2$.

38. Hallar los valores de $a$ y $b$ que hagan que 2 y $-3$ sean raíces de la ecuación $x^4 + x^3 + ax^2 + bx + 30 = 0$.

39. Demostrar que la ecuación entera $f(x) = 0$ tiene la raíz $x = 1$ si la suma de sus coeficientes es igual a cero.

40. Demostrar por inducción matemática que la regla para la división sintética (Art. 11.4) tiene validez general.

## 11.5. GRAFICA DE UN POLINOMIO

Hemos considerado anteriormente la representación gráfica de funciones algebraicas (Arts. 3.9 y 9.4) y hemos apreciado sus múltiples ventajas. Por este motivo ahora estudiaremos el problema general de la construcción e interpretación de la gráfica del polinomio $f(x)$. Podemos recordar que se mencionó (Art. 3.9) que por métodos de cálculo diferencial se demuestra que la gráfica es una curva uniforme y continua. Pronto veremos que este hecho es de gran valor en la localización de los ceros reales de $f(x)$ y por tanto de las raíces reales de la ecuación $f(x) = 0$ (Art. 4.2).

**Ejemplo 1.** Construir la gráfica del polinomio

$$f(x) = x^4 - x^3 - 12x^2 + 8x + 24, \tag{1}$$

y localizar las raíces reales de la ecuación $f(x) = 0$.

SOLUCION. Primeramente obtendremos las coordenadas de un número adecuado de puntos de la gráfica. Anteriormente las ordenadas se calcularon por sustitución en $f(x)$ de los valores asignados a $x$. Sin embargo, en muchos casos pueden obtenerse con menos esfuerzo utilizando la división sintética.

En este ejemplo, y en otros que se darán más adelante, se apreciarán algunas ventajas adicionales de la división sintética. La primera pregunta que se presenta es acerca de los valores que deben asignarse a $x$. Generalmente conviene empezar con los valores de $x$ 0, $\pm 1$, $\pm 2$, etc., continuando mientras nos dé información útil acerca de las raíces reales. Por ejemplo, para la función (1), obtenemos los siguientes pares de valores correspondientes:

| $x$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | $-1$ | $-2$ | $-3$ | $-4$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 24 | 20 | 0 | $-6$ | 56 | 6 | $-16$ | 0 | 120 |

La razón para no continuar más allá de $x = \pm 4$ resulta clara de las divisiones sintéticas para $x = 4$ y $x = -4$, como se muestra a continuación.

$$\begin{array}{rrrrrl} 1 & -1 & -12 & +8 & +24 & \underline{|4} \\ & +4 & +12 & +0 & +32 & \\ \hline 1 & +3 & +0 & +8 & \underline{|+56} & \end{array} \qquad \begin{array}{rrrrrl} 1 & -1 & -12 & +8 & +24 & \underline{|-4} \\ & -4 & +20 & -32 & +96 & \\ \hline 1 & -5 & +8 & -24 & \underline{|+120} & \end{array}$$

Para $x = 4$ todos los números en la tercera línea de la división sintética son positivos o cero. Por tanto, para un valor de $x > 4$ el residuo será positivo y mayor que 56; en consecuencia no existe un cero real mayor que 4.

Análogamente, para $x = -4$ todos los números en la tercera línea de la división sintética son alternativamente positivos y negativos. Por tanto, para un valor de $x < -4$ el residuo será positivo y mayor que 120; en consecuencia no existe un cero real menor que $-4$.

De la tabla de valores resulta que 2 y $-3$ son ceros de $f(x)$ y, por tanto, son raíces de $f(x) = 0$.

Además observamos que $f(x)$ cambia de un valor negativo ($-6$) a un valor positivo (56) cuando $x$ cambia de 3 a 4. Ya que $f(x)$ tiene una gráfica continua, esto significa que $f(x)$ pasa por un valor nulo y que, por tanto, corta al eje $X$ una vez por lo menos entre $x = 3$ y $x = 4$. Esto es, la ecuación $f(x) = 0$ posee por lo menos una raíz real entre 3 y 4. Con un razonamiento análogo, vemos que $f(x) = 0$ posee por lo menos una raíz real entre $-1$ y $-2$.

Localizando los puntos cuyas coordenadas aparecen en la tabla, y trazando una curva continua que pase por ellos, obtenemos la gráfica mostrada en la figura 37. Y como en el artículo siguiente veremos que una ecuación de cuarto grado tiene exactamente cuatro raíces, resulta que hemos hallado todas las raíces de $f(x) = 0$.

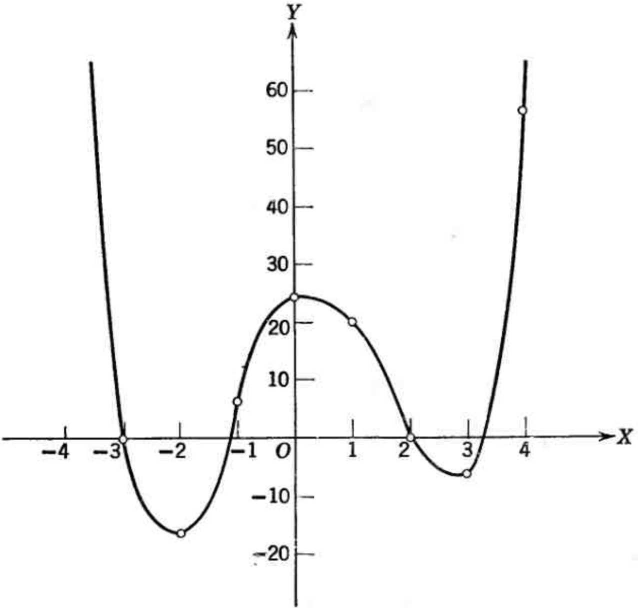


FIG. 37.

En el ejemplo anterior estudiamos una ecuación cuyas raíces son todas reales y diferentes. En seguida consideraremos una ecuación cuyas raíces no son todas reales y no son todas diferentes.

Si dos de las raíces de una ecuación son iguales, decimos que existe una *raíz doble,* si tres de las raíces son iguales se habla de una *raíz triple,* etcétera. En general se dice que las raíces mencionadas están *repetidas* o que son raíces *múltiples.* Si una ecuación tiene $m$ raíces iguales a $r$, entonces se dice que $r$ es una *raíz de multiplicidad* $m$. En el siguiente ejemplo consideraremos una ecuación que tiene raíces múltiples y raíces complejas.

**Ejemplo 2.** Construir la gráfica del polinomio

$$f(x) = (x+1)^2(x-2)^3(x^2+x+1), \tag{2}$$

y analizar las raíces de $f(x) = 0$.

SOLUCION. Generalmente el polinomio no está dado en forma factorizada como en (2), pero frecuentemente es posible obtener dicha forma por tanteos, usando el teorema del factor y la división sintética. Por los métodos estudiados en el Capítulo 5 podemos demostrar que el factor cuadrático $x^2 + x + 1$ es irreducible en el campo de los números reales y que tiene como ceros a los números complejos conjugados $\frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$. La ecuación $f(x) = 0$ tiene pues la raíz doble $-1$, la raíz triple 2, y las raíces complejas conjugadas $\frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$.

Construyamos la gráfica de $f(x)$ para ver lo que ocurre con las raíces múltiples. Para mayor precisión tomemos valores de $x$ en intervalos de 0.5, como se muestra en la tabla que acompaña a la gráfica en la figura 38.

| $x$ | $f(x)$ |
|---|---|
| 0 | —8 |
| 0.5 | —13.1 |
| 1 | —12 |
| 1.5 | —3.7 |
| 2 | 0 |
| 2.5 | 14.9 |
| 3 | 20.8 |
| —0.5 | —0.98 |
| —1 | 0 |
| —1.5 | —18.8 |
| —2 | —64 |

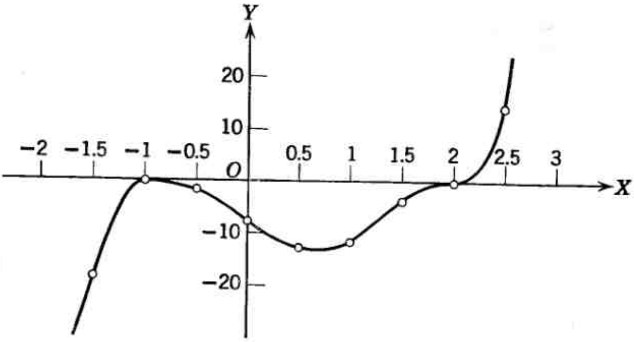


Fig. 38.

Observamos que en el punto correspondiente a la raíz doble $-1$, la gráfica es tangente al eje $X$, y no lo corta; esto es característico de una raíz múltiple de multiplicidad par. También podemos demostrar esto usando el método de desigualdades (Capítulo 6) aplicando al polinomio $f(x)$ en la vecindad del valor crítico $x = -1$. Para $x$ ligeramente mayor o menor que $-1$, el factor $(x + 1)^2$ es positivo, el factor $(x - 2)^3$ es negativo y el factor cuadrático $x^2 + x + 1$ es positivo. Por tanto, $f(x)$ es negativo y no corta al eje $X$ en $x = -1$.

También observamos que en el punto correspondiente a la raíz triple 2, la gráfica es tangente al eje $X$ y lo corta en ese punto; esto es característico de una raíz múltiple de multiplicidad impar. Esto puede comprobarse aplicando el método de desigualdades al polinomio $f(x)$ en la vecindad del valor crítico $x = 2$. Para $x$ ligeramente menor que 2, $(x + 1)^2$ es positivo, $(x - 2)^3$ es negativo y $x^2 + x + 1$ es positivo; por tanto, $f(x)$ es negativo. Para $x$ ligeramente mayor que 2, $(x + 1)^2$ es positivo, $(x - 2)^3$ es positivo y $x^2 + x + 1$ es positivo; por tanto $f(x)$ es positivo. Ya que $f(x)$ cambia de signo al pasar de la izquierda a la derecha de $x = 2$, se concluye, por la continuidad de la función, que la gráfica debe cortar al eje $X$ en $x = 2$.

Para el factor cuadrático $x^2 + x + 1$, que es siempre positivo y que no posee ceros reales, no corresponden puntos sobre el eje $X$.

Del análisis de estos dos ejemplos, hemos obtenido algunas conclusiones importantes en relación a la gráfica de un polinomio y de la ecuación entera racional correspondiente. Para fácil referencia proporcionamos un resumen de las propiedades mencionadas. La demostración rigurosa de varios de estos enunciados podrá encontrarse en tratados más superiores.

## Características del polinomio $f(x)$ con coeficientes reales y de la ecuación entera $f(x) = 0$

Si en la división sintética de $f(x)$ entre $x - r$, siendo $r$ positivo, todos los números en la tercera línea son positivos o nulos, entonces $f(x) = 0$ no posee raíces reales mayores que $r$.

Si en la división sintética de $f(x)$ entre $x - r$, donde $r$ es negativo, los números en la tercera línea alternan en signo, entonces $f(x) = 0$ no posee raíces reales menores que $r$.

Si $a$ y $b$ son dos números reales tales que $f(a)$ y $f(b)$ tienen signos opuestos, entonces la gráfica de $f(x)$ corta el eje $X$ por lo menos una vez entre $x = a$ y $x = b$, y la ecuación $f(x) = 0$ tiene por lo menos una raíz real entre $a$ y $b$.

Si $r$ es una raíz real no repetida de $f(x) = 0$, entonces la gráfica de $f(x)$ corta el eje $X$ en $x = r$ pero no es tangente a él en ese punto.

Sea $r$ una raíz real repetida de multiplicidad $m$ de $f(x) = 0$. Si $m$ es par, la gráfica de $f(x)$ es tangente al eje $X$ en $x = r$ pero no corta el eje $X$ en ese punto. Si $m$ es impar, la gráfica de $f(x)$ es tangente al eje $X$ en $x = r$ y corta el eje $X$ en ese punto.

### EJERCICIOS. GRUPO 37

En cada uno de los ejercicios 1-14, construir la gráfica del polinomio dado y hallar las raíces reales de la ecuación $f(x) = 0$.

1. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$.
2. $f(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6$.
3. $f(x) = x^3 - 2x^2 - 8x$.
4 $f(x) = x^3 - x^2 - x - 2$.
5. $f(x) = x^4 - 5x^2 + 4$.
6. $f(x) = x^4 - 13x^2 - 12x$.
7. $f(x) = x^4 - 3x^3 - 11x^2 + 25x + 12$.
8. $f(x) = x^4 - 2x^3 - 12x^2 + 2x + 11$.

9. $f(x) = x^4 - 3x^3 - 17x^2 + 21x + 34$.
10. $f(x) = x^3 - 4x^2 + 7x - 4$.
11. $f(x) = x^4 + 4x^3 + x^2 - 16x - 20$.
12. $f(x) = x^4 - 2x^3 - 4x^2 - 16x$.
13. $f(x) = x^5 + x^4 - 5x^3 - x^2 + 8x - 4$.
14. $f(x) = x^5 - x^4 - 8x^3 + 8x^2 + 16x - 16$.

En cada uno de los ejercicios 15-18 trazar la gráfica de $f(x)$ sin efectuar los productos indicados.

15. $f(x) = (x-1)^2(x+2)^3$.
16. $f(x) = x(x+3)^3(x-4)^2$.
17. $f(x) = (x+2)^2(x-1)^3(x^2+1)$.
18. $f(x) = (x+2)(x-2)^2(x-4)^4$.

En cada uno de los ejercicios 19-23, resolver la inecuación dada.

19. $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 > 0$.
20. $x^4 - 10x^2 + 9 > 0$.
21. $x^4 + 2x^3 - x - 2 > 0$.
22. $x^4 + x^3 - x^2 - 7x - 6 < 0$.
23. $x^5 - 2x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 5x + 6 > 0$.

24. Tomando como base la continuidad de la función polinomial $f(x)$, demostrar que si $a$ y $b$ son dos números reales tales que $f(a)$ y $f(b)$ tienen el mismo signo, entonces la ecuación $f(x) = 0$ o bien no tiene raíces reales entre $a$ y $b$ o tiene un número par de raíces reales entre $a$ y $b$.

25. Tomando como base la continuidad de la función polinomial $f(x)$, demostrar que si $a$ y $b$ son dos números reales tales que $f(a)$ y $f(b)$ tienen signos contrarios, entonces la ecuación $f(x) = 0$ tiene un número impar de raíces reales entre $a$ y $b$.

## 11.6. NUMERO DE RAICES

Ya hemos visto que la ecuación lineal tiene una sola raíz y que la ecuación cuadrática tiene exactamente dos. Estos son casos particulares del teorema general que dice que toda ecuación entera de grado $n$ tiene exactamente $n$ raíces. Para demostrar esto primeramente necesitamos demostrar el teorema fundamental del álgebra.

**Teorema 3.** *(Teorema fundamental del álgebra). Una ecuación entera* $f(x) = 0$ *tiene por lo menos una raíz, ya sea real o compleja.*

La demostración de este teorema, conocido como el *teorema fundamental del álgebra,* requiere métodos que están fuera del alcance de este libro. Por tanto *supondremos* su validez y lo usaremos para establecer el teorema siguiente:

**Teorema 4.** *Una ecuación entera* $f(x) = 0$, *de grado n, tiene exactamente n raíces.*

DEMOSTRACION. Representemos la ecuación entera de grado $n$ en la forma

$$(1)\quad f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0, \qquad a_0 \neq 0.$$

Por el teorema 3, la ecuación (1) tiene por lo menos una raíz, digamos $r_1$. Por tanto, por el teorema del factor (Art. 11.3, Teorema 2), $x - r_1$ es un factor de $f(x)$, y podemos escribir

$$f(x) \equiv (x - r_1)Q_1(x),$$

en donde $Q_1(x)$ es un polinomio de grado $n - 1$ con coeficiente principal $a_0$.

Por el Teorema 3, $Q_1(x) = 0$ posee por lo menos una raíz, digamos $r_2$. Por tanto, por el teorema del factor, $x - r_2$ es un factor de $Q_1(x)$, y podemos escribir

$$f(x) \equiv (x - r_1)(x - r_2)Q_2(x),$$

en donde $Q_2(x)$ es un polinomio de grado $n - 2$ con coeficiente principal $a_0$.

Continuando con este proceso $n$ veces, obtenemos $n$ factores lineales y un último cociente que será simplemente el coeficiente principal $a_0$. Por tanto, podemos escribir (1) en la forma

$$(2)\qquad f(x) \equiv a_0(x - r_1)(x - r_2) \ldots (x - r_n) = 0$$

en donde $r_1, r_2, \ldots, r_n$ son $n$ raíces de la ecuación (1).

Ahora demostraremos que estas son las únicas raíces de (1). Supongamos que $r$, que representa un número diferente de cualquiera de las raíces mencionadas, es también una raíz de la ecuación (1). Sustituyendo este valor en (2), obtenemos

$$f(x) \equiv a_0(r - r_1)(r - r_2) \ldots (r - r_n) = 0.$$

Pero esto es imposible porque todos los factores $a_0$, $r - r_1$, $r - r_2, \ldots,$ $r - r_n$ son distintos de cero. Por tanto, la ecuación (1) tiene exactamente $n$ raíces, como se quería demostrar.

NOTA. Cualquiera de las raíces de la ecuación (1) puede ser real o compleja, y cualquiera de ellas puede estar repetida. Una raíz repetida de multiplicidad $m$ se cuenta como $m$ raíces.

La forma factorizada de la ecuación entera, dada por la ecuación (2), sugiere un método directo para construir una ecuación de raíces dadas.

**Ejemplo 1.** Construir la ecuación entera que tiene las raíces diferentes 1 y —3 y la raíz doble 2.

SOLUCION. El primer miembro de la ecuación buscada tiene los factores $x-1$, $x+3$, y $(x-2)^2$. Por tanto, la ecuación es

$$(x-1)(x+3)(x-2)^2 = 0$$

o sea

$$x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 20x - 12 = 0.$$

En relación con la demostración del Teorema 4, para la primera raíz $r_1$ de $f(x) = 0$, se escribió

$$f(x) \equiv (x - r_1) Q_1(x),$$

en donde $Q_1(x)$, es un polinomio de grado $n-1$ que corresponde al cociente de dividir $f(x)$ entre $x - r_1$. La ecuación $Q_1(x) = 0$ recibe el nombre de *ecuación reducida* con respecto a $f(x) = 0$. Cuando se conoce una raíz de una ecuación dada, es generalmente aconsejable separar esta raíz y obtener la ecuación reducida. Las raíces restantes se deben calcular utilizando la ecuación reducida en lugar de la ecuación original ya que, en general, mientras más pequeño sea el grado de una ecuación, más fácil es resolverla.

**Ejemplo 2.** Comprobar que 2 y $-1$ son raíces de la ecuación $x^4 + x^3 - 2x^2 - 6x - 4 = 0$, y hallar las raíces restantes.

SOLUCION. Primeramente comprobamos que 2 es una raíz usando la división sintética:

$$\begin{array}{rrrrr|l} 1 & +1 & -2 & -6 & -4 & \underline{2} \\ & +2 & +6 & +8 & +4 & \\ \hline 1 & +3 & +4 & +2 & \underline{|+0} & \end{array}$$

La ecuación reducida es $x^3 + 3x^2 + 4x + 2 = 0$. Ahora utilizaremos esta ecuación, en lugar de la original, para comprobar que $-1$ es una raíz. Así obtenemos, por división sintética,

$$\begin{array}{rrrr|l} 1 & +3 & +4 & +2 & \underline{-1} \\ & -1 & -2 & -2 & \\ \hline 1 & +2 & +2 & \underline{|+0} & \end{array}$$

La ecuación reducida es ahora la ecuación cuadrática $x^2 + 2x + 2 = 0$, cuyas raíces pueden determinarse fácilmente por la fórmula correspondiente, obteniéndose los números complejos conjugados $-1 \pm i$.

Del Teorema 4 se deduce el siguiente importante teorema:

**Teorema 5.** *Si dos polinomios, cada uno de ellos de grado no mayor que n, son idénticamente iguales, los coeficientes de potencias análogas de la variable son iguales.*

DEMOSTRACION. Sean los dos polinomios:

$$P_1(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n,$$
$$P_2(x) = b_0x^n + b_1x^{n-1} + \ldots + b_{n-1}x + b_n.$$

Ya que $P_1(x) \equiv P_2(x)$, se concluye que

$$P_1(x) - P_2(x) \equiv 0,$$

o sea,

$$(a_0 - b_0)x^n + (a_1 - b_1)x^{n-1} + \ldots + (a_{n-1} - b_{n-1})x + a_n - b_n = 0. \quad (3)$$

Ahora bien, por el Teorema 4, existen exactamente $n$ valores de $x$ para los cuales la relación (3) se cumple. Por tanto, para que la relación (3) sea una identidad, es decir, para que se cumpla para *todos* los valores de $x$, que naturalmente son más de $n$ valores, los coeficientes de la relación (3) deben ser todos nulos. En otras palabras, debemos tener

$$a_0 - b_0 = 0, \quad a_1 - b_1 = 0, \ldots, \quad a_n - b_n = 0,$$

de donde

$$a_0 = b_0, \quad a_1 = b_1, \ldots, \quad a_n = b_n,$$

como se quería demostrar.

**Corolario.** *Si dos polinomios, cada uno de ellos de grado no mayor que n, son iguales para más de n valores diferentes de la variable, los coeficientes de las potencias análogas son iguales y la igualdad es una identidad.*

**Ejemplo 3.** Hallar los valores de $A$, $B$, y $C$ para que se verifique la siguiente identidad:

$$2x^2 - 3x - 11 \equiv A(x^2 - 1) + B(x^2 + 3x + 2) + C(x^2 + x - 2).$$

SOLUCION. Escribiendo el segundo miembro como un polinomio en potencia de $x$, tenemos

$$2x^2 - 3x - 11 \equiv (A + B + C)x^2 + (3B + C)x - A + 2B - 2C.$$

De acuerdo con el Teorema 5, para que esta identidad se cumpla, los coeficientes de las potencias análogas deben ser iguales. Por tanto, debemos tener

$$A + B + C = 2, \quad 3B + C = -3, \quad -A + 2B - 2C = -11.$$

La solución de este sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas es $A = 1$, $B = -2$ y $C = 3$, que son los valores buscados.

## EJERCICIOS. GRUPO 38

En cada uno de los ejercicios 1-12, construir la ecuación entera que tenga las raíces que se indican.

1. $1, -1, 2.$
2. $\frac{1}{2}, 2, -3.$
3. $2, -2, 4, -3.$
4. $5, 1 \pm \sqrt{2}.$
5. $1, 1 \pm \sqrt{3}.$
6. $4, \dfrac{1 \pm 2\sqrt{2}}{2}.$
7. $1 \pm \sqrt{2}, 2 \pm \sqrt{3}.$
8. $1, 1, -2, -2.$
9. $2, -3, 1, 1, 1.$
10. $1, 4, 1 \pm i.$
11. $2, -5, 1 \pm 2i.$
12. $\dfrac{1 \pm i}{2}, 3 \pm 2i.$

En cada uno de los ejercicios 13-20, comprobar que la ecuación dada tiene como raíces los valores indicados de $r$, y hallar las raíces restantes.

13. $x^3 - 7x - 6 = 0, r = 3.$
14. $3x^3 - x^2 - 3x + 1 = 0, r = \frac{1}{3}.$
15. $x^3 - 6x^2 + 13x - 10 = 0, r = 2.$
16. $6x^4 - 41x^3 + 64x^2 + 19x - 12 = 0, r = 4, -\frac{1}{2}.$
17. $x^4 - x^3 - 9x^2 + 3x + 18 = 0, r = 3, -2.$
18. $2x^4 - 3x^3 - 14x^2 + 2x + 4 = 0, r = -2, -\frac{1}{2}.$
19. $x^4 + 4x^3 - x^2 + 16x - 20 = 0, r = 1, -5.$
20. $3x^4 + 11x^3 - 34x^2 + 46x - 12 = 0, r = \frac{1}{3}, -6.$
21. Comprobar que la ecuación $x^4 - 11x^2 - 12x + 4 = 0$ tiene la raíz doble $-2$, y hallar las raíces restantes.
22. Comprobar que la ecuación $8x^5 - 44x^4 + 94x^3 - 85x^2 + 34x - 5 = 0$ tiene la raíz triple $\frac{1}{2}$, y hallar las raíces restantes.

En cada uno de los ejercicios 23-25, hallar los valores de $A$, $B$ y $C$ para que se cumpla la identidad dada.

23. $5x + 1 \equiv A(x + 2) + B(x - 1).$
24. $7x^2 + 5x - 8 \equiv A(x^2 + x - 6) + B(x^2 + 4x + 3) + C(x^2 - x - 2).$
25. $-x - 2 \equiv A(x^2 + x + 1) + (Bx + C)(x + 1).$

## 11.7. NATURALEZA DE LAS RAICES

En este artículo continuaremos tratando de reducir el trabajo asociado con la determinación de las raíces de una ecuación entera $f(x) = 0$. En particular, consideraremos varios teoremas con los que es posible obtener alguna información acerca de la naturaleza de las raíces antes de emprender la resolución propiamente dicha. Por ejemplo, el teorema siguiente trata de las raíces complejas.

**Teorema 6.** *Si un número complejo* $a + bi$ *es raíz de la ecuación entera* $f(x) = 0$ *con coeficientes reales, entonces su conjugado* $a - bi$ *también es raíz de la ecuación.*

DEMOSTRACION. Si se sustituye $x$ por $a + bi$ en la ecuación dada:

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0, \tag{1}$$

resulta que al calcular el primer miembro las potencias pares de $bi$ producirán números reales, mientras que las potencias impares de $bi$ producirán diversos múltiplos de la unidad imaginaria $i$. Representemos por $A$ la suma algebraica de todos los números reales que resultan de esta sustitución, y por $Bi$ la suma algebraica de todos los números imaginarios resultantes, en donde $B$ es un número real. Entonces, ya que $a + bi$ es una raíz de (1), tenemos

$$A + Bi = 0, \tag{2}$$

en donde, por la definición de número complejo nulo (Art. 8.2), debe ser

$$A = 0 \quad \text{y} \quad B = 0. \tag{3}$$

Si ahora sustituimos $x$ por $a - bi$ en el primer miembro de (1), las potencias pares de $-bi$ serán las mismas que las potencias pares de $bi$, mientras que las potencias impares de $-bi$ sólo diferirán en el signo de las potencias impares de $bi$. Por tanto, dando a $A$ y $B$ el mismo significado de antes, el resultado de esta sustitución será $A - Bi$, y según (3), podemos escribir

$$A - Bi = 0.$$

Por tanto, $a - bi$ es una raíz de la ecuación (1), como se quería demostrar.

Como una consecuencia inmediata de este teorema, tenemos los corolarios siguientes:

**Corolario 1.** *Una ecuación entera con coeficientes reales y de grado impar debe tener por lo menos una raíz real.*

También podemos obtener del Teorema 6 otro resultado muy importante. Representemos por $a \pm bi$ un par de raíces complejas conjugadas de la ecuación (1). Entonces, por el teorema del factor (Art. 11.3), $x - (a + bi)$ y $x - (a - bi)$ serán factores del polinomio $f(x)$. Por tanto, su producto $(x - a - bi)(x - a + bi) = x^2 - 2ax + a^2 + b^2$ será también un factor de $f(x)$. Además, para cada raíz real (racional o irracional) de la ecuación (1), corresponde un factor lineal $x - r$ de $f(x)$. Combinando estos resultados, resulta:

**Corolario 2.** *Todo polinomio de una sola variable $x$ y con coeficientes reales puede expresarse como el producto de factores lineales y cuadráticos con coeficientes reales, correspondiendo cada factor lineal a un cero real y cada factor cuadrático a un par de ceros complejos conjugados.*

**Ejemplo.** Si $1 + 2i$ es una raíz de la ecuación

$$x^4 - 5x^3 + 7x^2 - 7x - 0 = 0, \tag{4}$$

hallar las raíces restantes.

SOLUCION. Por el Teorema 6, el complejo conjugado $1 - 2i$ es también una raíz de (4). Por tanto $(x - 1 - 2i)(x - 1 + 2i) = x^2 - 2x + 5$ es un factor del primer miembro de (4). Por división se encuentra que el otro factor es $x^2 - 3x - 4$. Esto nos da la ecuación reducida $x^2 - 3x - 4 = 0$ cuyas raíces son $-1$ y 4. Por tanto, las raíces buscadas son $1 - 2i$, $-1$ y 4.

Existe un teorema sobre raíces irracionales análogo al Teorema 6. Sean $a$ y $b$ dos números racionales y sea $\sqrt{b}$ un número irracional. Entonces $a + \sqrt{b}$ se llama *binomio irracional cuadrático* y $a - \sqrt{b}$ se llama *binomio irracional cuadrático conjugado.* (Véase nota, Art. 5.5). Por un método análogo al empleado en la demostración del Teorema 6, puede establecerse el teorema siguiente:

**Teorema 7.** *Si un binomio irracional cuadrático $a + \sqrt{b}$ es raíz de la ecuación entera $f(x) = 0$ con coeficientes racionales, entonces el binomio irracional cuadrático $a - \sqrt{b}$ también es raíz de la ecuación.*

NOTA. Al final del Art. 2.8 sobre campos de números se afirmó que una propiedad o teorema que se cumple en un campo puede no cumplirse en otro campo. Los Teoremas 6 y 7 son ejemplos de esto. Así, en relación con el Teorema 6, si $a + bi$ es una raíz de una ecuación entera cuyos coeficientes no son todos números reales, entonces no necesariamente se sigue que el conjugado $a - bi$ también es raíz de la ecuación.

## EJERCICIOS. GRUPO 39

En cada uno de los ejercicios 1-12, se dan unas raíces de la ecuación. Hallar las raíces restantes.

1. $x^3 + x^2 - 4x + 6 = 0;\ 1 - i.$
2. $x^3 - 4x^2 + 14x - 20 = 0;\ 1 + 3i.$
3. $x^4 - 6x^3 + 14x^2 - 14x + 5 = 0;\ 2 - i.$
4. $x^4 + x^3 + x^2 + 11x + 10 = 0;\ 1 + 2i.$
5. $x^3 + x^2 - 5x - 5 = 0;\ \sqrt{5}.$
6. $x^3 - 6x^2 + 7x + 4 = 0;\ 1 - \sqrt{2}.$
7. $x^4 - 9x^3 + 27x^2 - 33x + 14 = 0;\ 3 + \sqrt{2}.$
8. $x^4 - 3x^3 - 6x^2 + 14x + 12 = 0;\ 1 - \sqrt{3}.$
9. $x^5 - 7x^4 + 16x^3 - 32x^2 + 15x - 25 = 0;\ i,\ 1 - 2i.$
10. $x^5 - x^4 - 5x^3 + x^2 + 6x + 2 = 0;\ \sqrt{2},\ 1 + \sqrt{2}.$
11. $x^5 - 8x^4 + 26x^3 - 40x^2 + 16x = 0;\ 2 + \sqrt{2},\ 2 + 2i.$
12. $x^6 - 2x^5 - 4x^4 - 8x^3 - 77x^2 + 90x + 360 = 0;\ \sqrt{5},\ 3i.$

En cada uno de los ejercicios 13-15, construir la ecuación de menor grado con coeficientes reales, que tenga las raíces indicadas.

13. $-2,\ 3 + i.$
14. $1,\ 3,\ 1 + 2i.$
15. $2 + 4i,\ 2i.$

En cada uno de los ejercicios 16-18, hallar la ecuación de menor grado, con coeficientes racionales, que tenga las raíces indicadas.

16. $1,\ 1 + \sqrt{5}$. 17. $2,\ -3,\ 2 - \sqrt{3}$. 18. $\sqrt{7},\ 1 - \sqrt{2}$.

En cada uno de los ejercicios 19-21, expresar el polinomio dado como producto de factores lineales y cuadráticos con coeficientes reales.

19. $x^3 + 3x^2 - 3x - 14$. 20. $x^4 + 2x^3 + x^2 + 8x - 12$.

21. $x^4 - 2x^3 - 6x^2 - 7x - 4$.

En cada uno de los ejercicios 22 y 23, expresar el polinomio dado como producto de factores lineales y cuadráticos con coeficientes racionales.

22. $x^4 - x^3 - 9x^2 + 3x + 18$. 23. $2x^4 - 9x^3 + 10x^2 + x - 2$.

24. Demostrar el corolario 1 del Teorema 6 (Art. 11.6).

25. Demostrar el Teorema 7 (Art. 11.6).

## 11.8. REGLA DE LOS SIGNOS DE DESCARTES

Continuando nuestro estudio sobre la naturaleza de las raíces de una ecuación entera, consideraremos un teorema muy importante conocido como la *regla de los signos de Descartes*. Por medio de esta regla es posible determinar el número máximo de raíces positivas y negativas de una ecuación entera con coeficientes reales. Sin embargo, antes de estudiar este teorema será necesario establecer ciertos resultados preliminares.

Primeramente consideraremos la determinación de las posibles raíces nulas de una ecuación entera, ya que tales raíces no son ni positivas ni negativas. Es claro que si una ecuación carece del término independiente, pero no del término de primer grado, entonces posee una sola raíz nula; si carece de los términos independiente y de primer grado, pero no del término de segundo grado, entonces posee dos raíces nulas, y así sucesivamente. En general, si la ecuación tiene la forma

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-r}x^r = 0, \qquad a_0 \neq 0,$$

en donde el término de menor grado es $a_{n-r}x^r$, entonces la ecuación tiene exactamente $r$ raíces nulas. En tal caso separamos estas $r$ raíces nulas sacando como factor a $x^r$ y continuando el análisis con la ecuación reducida de grado $n - r$. De aquí en adelante quedará sobrentendido que el primer paso en la resolución de una ecuación entera es la separación de las raíces nulas. Conviene agregar que una ecuación que contenga todas las potencias de $x$ y el término independiente, recibe el nombre de *ecuación completa*, si no es así se le llama *incompleta*.

Sea $f(x) = 0$ una ecuación entera. Si sustituimos $x$ por $-x$, obtenemos otra ecuación $f(-x) = 0$ cuyas raíces son las raíces de $f(x) = 0$ con signos cambiados. Ya que si $x = r$ es una raíz de $f(x) = 0$, entonces

$-x = r$, o sea, $x = -r$ es una raíz de $f(-x) = 0$. Ademas si se sustituye $x$ por $-x$ en el polinomio $f(x)$, el nuevo polinomio $f(-x)$ difiere de $f(x)$ solamente en los signos de los términos de grado impar, considerándose el término independiente si es que aparece, como término de grado par (grado cero). Por ejemplo, consideremos la ecuación

$$x^4 + 2x^3 - 13x^2 - 14x + 24 = 0. \tag{1}$$

La ecuación cuyas raíces tienen igual valor absoluto que las de la ecuación (1) pero son signos contrarios es

$$x^4 - 2x^3 - 13x^2 + 14x + 24 = 0. \tag{2}$$

Se comprueba fácilmente que mientras las raíces de (1) son $1, 3, -2, -4$; las raíces de (2) son $-1, -3, 2, 4$.

Resumiendo, podemos decir que para transformar una ecuación dada en otra cuyas raíces tengan signos opuestos, sólo es necesario cambiar los signos de los términos de grado impar. Más tarde estudiaremos que este es un paso especial de una transformación más general (Art. 11.11).

Sea $f(x)$ un polinomio en $x$ con coeficientes reales y ordenados según las potencias descendentes de $x$. Si dos términos, sucesivos difieren en signo, se dice que hay una *variación en signo* o simplemente una variación. Por ejemplo, en el primer miembro de la ecuación (1), hay dos variaciones, una de $2x^3$ a $-13x^2$ y la otra de $-14x$ a 24. Conviene notar que se dice que hay una variación entre dos términos consecutivos aun cuando falten algunas potencias intermedias. Por ejemplo, en el polinomio $x^7 - 2x^4 + 3x^3 - 2$, hay una variación de $x^7$ a $-2x^4$, otra de $-2x^4$ a $3x^3$, y otra de $3x^3$ a $-2$. El propósito de la introducción del concepto de variación es que constituye el fundamento de la regla de los signos de Descartes la cual enunciamos en seguida en forma completa en el Teorema 8. La demostración se omite pues cae fuera del campo de este libro.

**Teorema 8.** *(Regla de los signos de Descartes). Si $f(x) = 0$ es una ecuación entera con coeficientes reales y sin raíces nulas:*

1. *El número de raíces positivas de $f(x) = 0$ es igual al número de variaciones de $f(x)$ o es menor que este número en un número par.*

2. *El número de raíces negativas de $f(x) = 0$ es igual al número de variaciones de $f(-x)$ o es menor que este número en un número par.*

NOTAS

1. La parte 2 de este teorema, que se refiere a las raíces negativas, es una consecuencia inmediata de la parte 1 ya que las raíces positivas de $f(-x) = 0$ son las raíces negativas de $f(x) = 0$.

2. Este teorema también proporciona información acerca del núme-

ro de raíces complejas. Si $f(x) = 0$ es de grado $n$ entonces tiene exactamente $n$ raíces (Teorema 4, Art. 11.6). Por tanto, el número de raíces complejas es igual a $n$ menos el número de raíces positivas y raíces negativas.

Como primer ejemplo de este teorema, consideremos la ecuación (1), en la cual, como ya se observó, hay dos variaciones y, por tanto, esta ecuación o bien tiene dos raíces positivas o no tiene ninguna. Además, ya que en la ecuación (2), cuyas raíces tienen signos contrarios a los de las raíces de la ecuación (1), hay dos variaciones, la ecuación (1) o bien tiene dos raíces negativas o no tiene ninguna. Ya que la ecuación (1) es de grado 4, puede tener cuatro, dos o cero raíces complejas. Entonces existen cuatro posibles combinaciones para las raíces de la ecuación (1), como se muestra en la siguiente tabla:

| Positivas | Negativas | Complejas |
|---|---|---|
| 2 | 2 | 0 |
| 2 | 0 | 2 |
| 0 | 2 | 2 |
| 0 | 0 | 4 |

En este caso particular sabemos, por una comprobación anterior, que hay exactamente 2 raíces positivas y 2 raíces negativas.

Bajo ciertas condiciones la regla de los signos de Descartes proporciona una información precisa. Por ejemplo, si $f(x)$ tiene solamente 1 variación, entonces $f(x) = 0$ tiene exactamente 1 raíz positiva, ya que no podemos restar a 1 un número par dentro de los enteros positivos. Similarmente, si $f(x) = 0$ tiene un número impar de variaciones entonces $f(x) = 0$ tiene por lo menos 1 raíz positiva. Observaciones análogas son aplicables a las raíces negativas.

Observamos en la tabla anterior que en cada caso o no hay raíces complejas o hay un número par de ellas. Esto se debe a que las raíces complejas aparecen en pares (Teorema 6, Art. 11.7).

**Ejemplo.** Por medio de la regla de los signos de Descartes hallar toda la información posible acerca de la naturaleza de las raíces de cada una de las ecuaciones siguientes:

$$\text{(a)} \quad x^5 + 3x^4 + 2x^3 - x^2 - 3x - 2 = 0.$$
$$\text{(b)} \quad x^6 - 3x^5 + x^4 - x^3 - 6x^2 = 0.$$

SOLUCION. (a) Primeramente escribimos

$$f(x) = x^5 + 3x^4 + 2x^3 - x^2 - 3x - 2$$

de donde $$f(-x) = -x^5 + 3x^4 - 2x^3 - x^2 + 3x - 2.$$

$f(x)$ tiene solamente 1 variación. Por tanto, hay exactamente 1 raíz positiva.

$f(-x)$ tiene 4 variaciones. Por tanto, hay 4, 2 o 0 raíces negativas.

Las posibles combinaciones de raíces positivas, negativas y complejas se muestran en la siguiente tabla en donde el número de raíces complejas se da en la tercera columna bajo "*c*".

| + | — | *c* |
|---|---|---|
| 1 | 4 | 0 |
| 1 | 2 | 2 |
| 1 | 0 | 4 |

(b) Observamos que la ecuación dada posee 2 raíces nulas. Separando el factor $x^2$, tenemos

$$f(x) = x^4 - 3x^3 + x^2 - x - 6$$

de donde

$$f(-x) = x^4 + 3x^3 + x^2 + x - 6.$$

$f(x)$ tiene 3 variaciones. Por tanto, hay 3 raíces positivas ó 1 raíz positiva.

$f(-x)$ tiene 1 variación. Por tanto, hay exactamente 1 raíz negativa.

Las posibles combinaciones de raíces nulas, positivas, negativas y complejas se muestran en la siguiente tabla:

| 0 | + | — | *c* |
|---|---|---|---|
| 2 | 3 | 1 | 0 |
| 2 | 1 | 1 | 2 |

## EJERCICIOS. GRUPO 40

En cada uno de los ejercicios 1-16, hallar toda la información posible acerca de la naturaleza de las raíces de la ecuación dada, por medio de la regla de Descartes.

1. $2x^4 + x^2 + 2x - 3 = 0.$
2. $x^5 - 4x^4 + 3x^3 - 5 = 0.$
3. $3x^3 + 9x^2 - 7x + 4. = 0.$
4. $x^4 + 2x^3 - 3x^2 + 2x + 2 = 0.$
5. $2x^6 + 3x^4 + 2x^2 + 9 = 0.$
6. $x^7 + 5x^4 + 2x^3 + 7x + 1 = 0.$
7. $x^5 + 3x^3 + 5x = 0.$
8. $4x^4 - 3x^3 + 2x^2 - x + 2 = 0.$
9. $x^8 - 1 = 0.$
10. $x^7 - 1 = 0.$
11. $x^8 + 1 = 0.$
12. $x^7 + 1 = 0.$
13. $x^5 - 2x^4 + 5x^3 - 7x^2 = 0.$
14. $x^7 + 2x^5 - 3x^4 + 8x^3 - 9x = 0.$
15. $x^9 + 4x^7 - 6x^6 + 4x^4 - 8 = 0.$
16. $2x^8 - 3x^6 + 9x^3 - x^2 + 5 = 0.$
17. Demostrar que la ecuación $3x^5 - x^4 + 2x - 8 = 0$ tiene por lo menos dos raíces complejas.
18. Demostrar que la ecuación $x^7 + 4x^6 + 2x^3 + 9x^2 + 6 = 0$ tiene por lo menos cuatro raíces complejas.
19. Demostrar que la ecuación $4x^4 - 3x^3 - x - 10 = 0$ tiene exactamente dos raíces complejas.

20. Demostrar que la ecuación $2x^6 + 3x^4 - 2x^2 - 6 = 0$ tiene exactamente cuatro raíces complejas.

21. En la ecuación $x^n - 1 = 0$, demostrar: (a) si $n$ es par, hay exactamente dos raíces reales iguales a $\pm 1$ y $n - 2$ raíces complejas; (b) si $n$ es impar, hay exactamente una raíz real igual a $+1$ y $n - 1$ raíces complejas.

22. En la ecuación $x^n + 1 = 0$, demostrar: (a) si $n$ es par, las $n$ raíces son complejas; (b) si $n$ es impar, hay exactamente una raíz negativa igual a $-1$ y $n - 1$ raíces complejas.

23. Demostrar que una ecuación dada puede transformarse en otra cuyas raíces tengan signos opuestos, cambiando los signos de los términos de grado par, considerando al término independiente como de grado par. En los siguientes ejercicios las ecuaciones mencionadas son enteras con coeficientes reales.

24. Demostrar que una ecuación cuyos términos son todos positivos no tiene raíces positivas.

25. Demostrar que una ecuación cuyos términos de grado par tienen todos el mismo signo y cuyos términos de grado impar tienen todos el signo contrario, no tiene raíces negativas.

26. Demostrar que una ecuación completa cuyos términos son alternativamente positivos y negativos, no tiene raíces negativas.

27. Demostrar que una ecuación que sólo tiene términos de grado impar (sin término independiente) todos con el mismo signo, no tiene raíces reales diferentes de cero.

28. Demostrar que una ecuación que tiene sólo términos de grado par (con término independiente), todos con el mismo signo, no tiene raíces reales.

29. Si todas las raíces de una ecuación completa $f(x) = 0$ son reales, demostrar que el número de raíces positivas es exactamente igual al número de variaciones de $f(x)$, y que el número de raíces negativas es exactamente igual al número de variaciones de $f(-x)$.

30. Si la ecuación $f(x) = 0$ no tiene raíces nulas, demostrar que el número de raíces complejas es por lo menos igual a la diferencia entre el grado de la ecuación y el número total de variaciones de $f(x)$ y $f(-x)$.

## 11.9. RAICES RACIONALES

Consideremos ahora la determinación de las posibles raíces racionales de una ecuación entera. Para este propósito tenemos el siguiente teorema de gran importancia.

**Teorema 9.** *Si la fracción $p/q$, reducida a su mínima expresión, es una raíz de la ecuación entera*

$$(1) \qquad a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

*con coeficientes enteros o nulos pero con $a_0 \neq 0$ y $a_n \neq 0$, entonces $p$ es un divisor exacto de $a_n$ y $q$ es un divisor exacto de $a_0$.*

DEMOSTRACION. Ya que $p/q$ es una raíz de la ecuación (1), tenemos

$$(2) \qquad a_0\left(\frac{p}{q}\right)^n + a_1\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} + \dots + a_{n-1}\left(\frac{p}{q}\right) + a_n = 0.$$

Multiplicando ambos miembros de (2) por $q^n$, tenemos

$$a_0p^n + a_1p^{n-1}q + \dots + a_{n-1}pq^{n-1} + a_nq^n = 0. \tag{3}$$

Transponiendo $a_nq^n$ al segundo miembro de (3) y sacando a $p$ como factor del primer miembro, obtenemos

$$p(a_0p^{n-1} + a_1p^{n-2}q + \dots + a_{n-1}q^{n-1}) = -a_nq^n. \tag{4}$$

Ya que $p, q, a_0, a_1, \dots, a_n$ son todos enteros, se concluye que ambos miembros de (4) representan números enteros. Además, ya que $p$ es un factor común del primer miembro, debe ser también factor común del segundo miembro. Ahora bien, debido a que $p$ y $q$ no tienen factores comunes (excepto $\pm 1$), resulta que $p$ debe ser un divisor exacto de $a_n$.

De la ecuación (3), tenemos

$$q(a_1p^{n-1} + \dots + a_{n-1}pq^{n-2} + a_nq^{n-1}) = -a_0p^n. \tag{5}$$

Si el mismo razonamiento se aplica a la ecuación (5), encontramos que $q$ es un divisor exacto de $a_0$.

Como consecuencia de este teorema obtenemos el corolario siguiente:

**Corolario.** *Si en la ecuación entera* (1), *cuyos coeficientes son enteros, el coeficiente principal es* $a_0 = 1$ *y su término independiente es* $a_n \neq 0$, *entonces toda raíz racional es entera y divisible exactamente a* $a_n$.

NOTA. El Teorema 9 también es válido cuando los coeficientes son racionales en lugar de enteros. En efecto: basta multiplicar la ecuación por el mínimo denominador común de los coeficientes, obteniendo así una ecuación equivalente con coeficientes enteros.

Debe observarse que la importancia del Teorema 9 reside en el hecho de que restringe la búsqueda de las raíces racionales a un número limitado de posibilidades. Esto se ilustra en los siguientes ejemplos.

**Ejemplo 1.** Hallar todas las raíces de la ecuación.

$$2x^4 - x^3 - 4x^2 + 10x - 4 = 0. \tag{6}$$

SOLUCION. Primeramente aplicamos la regla de los signos de Descartes, obteniéndose los resultados que se indican en la siguiente tabla:

| + | — | $c$ |
|---|---|---|
| 3 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 2 |

Después aplicamos el Teorema 9 para determinar las posibles raíces racionales $p/q$, usando como valores de $p$ los factores del término independiente $-4$ y como valores de $q$ los factores del coeficiente principal 2. Esto puede disponerse en la forma siguiente:

$$\frac{p = \pm 1, \ \pm 2, \ \pm 4}{q = \pm 1, \ \pm 2} .$$

Obtenemos así las ocho posibles raíces racionales siguientes: $\pm 1$, $\pm \frac{1}{2}$, $\pm 2$, $\pm 4$. Al probar estos valores encontramos que $\frac{1}{2}$ y $-2$ son raíces. Según los resultados de la regla de los signos de Descartes, habiendo encontrado una raíz negativa no es necesario probar otras posibles raíces negativas. En todos los casos, tan pronto como se encuentre una raíz, debe separársele inmediatamente y continuar las pruebas con la ecuación reducida. Conviene disponer las divisiones sintéticas necesarias para estas operaciones como sigue:

$$\begin{array}{rrrrrl} 2 & -1 & -4 & +10 & -4 & \lfloor \underline{\tfrac{1}{2}} \\ & +1 & +0 & -2 & +4 & \\ \cline{1-5} 2 & +0 & -4 & +8 & & \lfloor \underline{-2} \\ & -4 & +8 & -8 & & \\ \cline{1-4} 2 & -4 & +4 & & & \end{array}$$

La ecuación reducida final es $2x^2 - 4x + 4 = 0$ o bien $x^2 - 2x + 2 = 0$ cuyas raíces pueden encontrarse por la fórmula de la ecuación cuadrática, obteniéndose $1 \pm i$. Por tanto, las raíces de la ecuación dada (6) son: $\frac{1}{2}$, $-2$, $1 \pm i$.

Con esto damos por terminado el estudio de la determinación de raíces racionales. Por tanto, es conveniente hacer un resumen de los diversos pasos que deben darse para obtener las mencionadas raíces.

### Procedimiento para la determinación de las raíces racionales de una ecuación

Para obtener las raíces racionales de una ecuación entera con coeficientes racionales, deben efectuarse los siguientes pasos en el orden indicado:

1. Separar las raíces nulas, y efectuar los siguientes pasos con la ecuación reducida resultante.
2. Aplicar la regla de los signos de Descartes (Teorema 8, Art. 11.8) para determinar la posible naturaleza y distribución de las raíces. Esta información debe usarse como guía en cualquiera de las pruebas de los pasos siguientes.
3. Aplicar el Teorema 9 y su corolario (Art. 11.9) para determinar

Multiplicando ambos miembros de (2) por $q^n$, tenemos

$$(3) \qquad a_0p^n + a_1p^{n-1}q + \ldots + a_{n-1}pq^{n-1} + a_nq^n = 0.$$

Transponiendo $a_nq^n$ al segundo miembro de (3) y sacando a $p$ como factor del primer miembro, obtenemos

$$(4) \qquad p(a_0p^{n-1} + a_1p^{n-2}q + \ldots + a_{n-1}q^{n-1}) = -a_nq^n.$$

Ya que $p$, $q$, $a_0$, $a_1, \ldots, a_n$ son todos enteros, se concluye que ambos miembros de (4) representan números enteros. Además, ya que $p$ es un factor común del primer miembro, debe ser también factor común del segundo miembro. Ahora bien, debido a que $p$ y $q$ no tienen factores comunes (excepto $\pm 1$), resulta que $p$ debe ser un divisor exacto de $a_n$.

De la ecuación (3), tenemos

$$(5) \qquad q(a_1p^{n-1} + \ldots + a_{n-1}pq^{n-2} + a_nq^{n-1}) = -a_0p^n.$$

Si el mismo razonamiento se aplica a la ecuación (5), encontramos que $q$ es un divisor exacto de $a_0$.

Como consecuencia de este teorema obtenemos el corolario siguiente:

**Corolario.** *Si en la ecuación entera* (1), *cuyos coeficientes son enteros, el coeficiente principal es* $a_0 = 1$ *y su término independiente es* $a_n \neq 0$, *entonces toda raíz racional es entera y divisible exactamente a* $a_n$.

NOTA. El Teorema 9 también es válido cuando los coeficientes son racionales en lugar de enteros. En efecto: basta multiplicar la ecuación por el mínimo denominador común de los coeficientes, obteniendo así una ecuación equivalente con coeficientes enteros.

Debe observarse que la importancia del Teorema 9 reside en el hecho de que restringe la búsqueda de las raíces racionales a un número limitado de posibilidades. Esto se ilustra en los siguientes ejemplos.

**Ejemplo 1.** Hallar todas las raíces de la ecuación.

$$(6) \qquad 2x^4 - x^3 - 4x^2 + 10x - 4 = 0.$$

SOLUCION. Primeramente aplicamos la regla de los signos de Descartes, obteniéndose los resultados que se indican en la siguiente tabla:

| + | — | c |
|---|---|---|
| 3 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 2 |

Después aplicamos el Teorema 9 para determinar las posibles raíces racionales $p/q$, usando como valores de $p$ los factores del término independiente —4 y como valores de $q$ los factores del coeficiente principal 2. Esto puede disponerse en la forma siguiente:

$$\frac{p = \pm 1,\ \pm 2,\ \pm 4}{q = \pm 1,\ \pm 2}.$$

Obtenemos así las ocho posibles raíces racionales siguientes: $\pm 1$, $\pm \frac{1}{2}$, $\pm 2$, $\pm 4$. Al probar estos valores encontramos que $\frac{1}{2}$ y $-2$ son raíces. Según los resultados de la regla de los signos de Descartes, habiendo encontrado una raíz negativa no es necesario probar otras posibles raíces negativas. En todos los casos, tan pronto como se encuentre una raíz, debe separársele inmediatamente y continuar las pruebas con la ecuación reducida. Conviene disponer las divisiones sintéticas necesarias para estas operaciones como sigue:

$$\begin{array}{rrrrrl}
2 & -1 & -4 & +10 & -4 & \underline{|\tfrac{1}{2}} \\
 & +1 & +0 & -2 & +4 & \\
\hline
2 & +0 & -4 & +8 & & \underline{|-2} \\
 & -4 & +8 & -8 & & \\
\hline
2 & -4 & +4 & & &
\end{array}$$

La ecuación reducida final es $2x^2 - 4x + 4 = 0$ o bien $x^2 - 2x + 2 = 0$ cuyas raíces pueden encontrarse por la fórmula de la ecuación cuadrática, obteniéndose $1 \pm i$. Por tanto, las raíces de la ecuación dada (6) son: $\frac{1}{2}$, $-2$, $1 \pm i$.

Con esto damos por terminado el estudio de la determinación de raíces racionales. Por tanto, es conveniente hacer un resumen de los diversos pasos que deben darse para obtener las mencionadas raíces.

## Procedimiento para la determinación de las raíces racionales de una ecuación

Para obtener las raíces racionales de una ecuación entera con coeficientes racionales, deben efectuarse los siguientes pasos en el orden indicado:

1. Separar las raíces nulas, y efectuar los siguientes pasos con la ecuación reducida resultante.
2. Aplicar la regla de los signos de Descartes (Teorema 8, Art. 11.8) para determinar la posible naturaleza y distribución de las raíces. Esta información debe usarse como guía en cualquiera de las pruebas de los pasos siguientes.
3. Aplicar el Teorema 9 y su corolario (Art. 11.9) para determinar

las posibles raíces racionales. Probar estas posibles raíces, y cada vez que se encuentre una raíz, separarla y continuar con la ecuación reducida.

4. Después de separar todas las raíces racionales, la última ecuación reducida, si es que existe, posee solamente raíces irracionales y (o) raíces complejas. Si esta ecuación reducida de grado es cuadrática, se resuelve obteniéndose la totalidad de las raíces.

**Ejemplo 2.** Hallar todas las raíces de la ecuación

$$x^6 + 3x^5 - 13x^4 - 25x^3 + 50x^2 + 24x = 0. \tag{7}$$

SOLUCION.

1. Observamos que la ecuación (7) posee una raíz nula. Separando esta raíz obtenemos la ecuación reducida

$$x^5 + 3x^4 - 13x^3 - 25x^2 + 50x + 24 = 0. \tag{8}$$

Aplicando la regla de Descartes a la ecuación (8), obtenemos los resultados indicados en la siguiente tabla

| + | — | *c* |
|---|---|---|
| 2 | 3 | 0 |
| 2 | 1 | 2 |
| 0 | 3 | 2 |
| 0 | 1 | 4 |

3. Ya que el coeficiente principal de la ecuación (8) es la unidad, y que los coeficientes son todos enteros, se concluye, del corolario del Teorema 9 (Art. 11.9), que cualquier raíz racional debe ser entera y debe dividir exactamente al término constante 24. Por tanto, las posibles raíces racionales son: ±1, ±2, ±3, ±4, ±6, ±8, ±12, ±24. Probando estos números encontramos que 2, —3 y —4 son raíces. La separación de estas raíces y la obtención de la ecuación reducida se indica a continuación:

$$\begin{array}{rrrrrrl}
1 & +3 & -13 & -25 & +50 & +24 & \underline{|2} \\
 & +2 & +10 & -6 & -62 & -24 & \\
\hline
1 & +5 & -3 & -31 & -12 & & \underline{|-3} \\
 & -3 & -6 & +27 & +12 & & \\
\hline
1 & +2 & -9 & -4 & & & \underline{|-4} \\
 & -4 & +8 & +4 & & & \\
\hline
1 & -2 & -1 & & & &
\end{array}$$

4. En el paso 3 encontramos 1 raíz positiva y 2 raíces negativas. Ahora bien, debido a los resultados de la regla de Descartes (Paso 2), debe existir otra raíz positiva y otra raíz negativa. Por tanto, estas dos raíces

deben ser irracionales. Comprobamos esta conclusión resolviendo la ecuación reducida $x^2 - 2x - 1 = 0$ cuyas raíces son $1 \pm \sqrt{2}$. Las raíces de la ecuación dada son $0, 2, -3, -4, 1 \pm \sqrt{2}$.

## EJERCICIOS. GRUPO 41

1. Demostrar el corolario del Teorema 9 (Art. 11.9).

En cada uno de los ejercicios 2-17, hallar todas las raíces de la ecuación dada.

2. $2x^3 - 9x^2 + 12x - 4 = 0.$ 3. $3x^3 - 4x^2 - 35x + 12 = 0.$

4. $4x^4 - 39x^3 + 54x^2 + 16x = 0.$ 5. $2x^3 + \frac{29}{3}x^2 - \frac{40}{3}x + 4 = 0.$

6. $2x^4 + 3x^3 - 10x^2 - 12x + 8 = 0.$

7. $9x^4 + 15x^3 - 143x^2 + 41x + 30 = 0.$

8. $4x^4 + 2x^3 - 8x^2 - 3x + 3 = 0.$ 9. $4x^5 - 4x^4 - 5x^3 + x^2 + x = 0.$

10. $3x^5 + 5x^4 + x^3 + 5x^2 - 2x = 0.$

11. $x^6 - x^5 - 2x^3 - 4x^2 = 0.$ 12. $2x^4 - 3x^3 - x^2 - 12x - 36 = 0.$

13. $3x^4 - 4x^3 + 28x^2 - 36x + 9 = 0.$

14. $12x^5 + 4x^4 + 7x^3 + 14x^2 - 34x + 12 = 0.$

15. $6x^4 + 11x^3 - 8x^2 + 37x - 6 = 0.$

16. $8x^4 + 10x^3 + 9x^2 + x - 1 = 0.$

17. $8x^4 - 28x^3 + 34x^2 - 175x - 100 = 0.$

En cada uno de los ejercicios 18-23, hallar las raíces racionales de la ecuación dada.

18. $3x^3 + 11x^2 + 8x - 4 = 0.$

19. $x^5 + 3x^4 + 5x^3 + 8x^2 + 6x + 4 = 0.$

20. $2x^6 + x^5 - 2x^4 - x^3 - 12x^2 - 6x = 0.$

21. $x^7 - 3x^6 + x^5 - 3x^4 + x^3 - 3x^2 + x - 3 = 0.$

22. $12x^6 - 13x^5 - 12x^4 + 26x^3 - 25x^2 + 2 = 0.$

23. $3x^8 + x^7 + x^6 + x^5 + 10x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 4x - 8 = 0.$

En cada uno de los ejercicios 24-27, demostrar que la ecuación dada no tiene raíces racionales.

24. $x^4 + 4x^2 - x + 6 = 0.$ 25. $x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 3 = 0.$

26. $2x^4 - x^3 + 4x^2 + x + 2 = 0.$

27. $x^5 - 4x^4 + x^3 + 2x^2 - 8x + 2 = 0.$

28. Las dimensiones de una caja rectangular son 3 cm, 5 cm, y 7 cm. Si cada una de estas dimensiones se aumenta en la misma cantidad, el volumen se triplica. Calcular esta cantidad.

29. Las dimensiones de una caja rectangular son 6 cm, 8 cm, y 12 cm. Si cada una de estas dimensiones se disminuye en la misma cantidad, el volumen disminuye en 441 cm. Calcular esta cantidad.

30. Se cortan cuadrados iguales en las esquinas de un cartón rectangular de 70 cm de longitud y 60 cm de ancho, doblando los rectángulos laterales y formándose así una caja abierta cuyo volumen es 15000 $\text{cm}^3$. Calcular la longitud del lado de los cuadrados cortados (dos soluciones).

## 11.10. RAICES IRRACIONALES

Si una ecuación entera posee raíces irracionales, éstas pueden determinarse por diversos métodos. En este capítulo consideraremos dos de estos métodos, uno en el presente artículo y el otro en el artículo 11.12.

Dada una ecuación entera con coeficientes racionales, primeramente aplicaremos el procedimiento dado para obtener las raíces racionales indicado en el Art. 11.9. Es decir, separaremos todas las raíces nulas y (o) racionales, y cualquier raíz irracional existente la obtendremos de la ecuación reducida. Si la ecuación reducida es cuadrática las raíces se obtienen fácilmente por medio de la fórmula correspondiente. Por tanto, en el siguiente estudio supondremos que el grado de la ecuación reducida es igual o mayor que 3. En este caso las raíces irracionales vendrán dadas en forma decimal, y el grado de precisión depende del número de cifras decimales obtenidas. Este proceso es, pues, esencialmente, un método de *aproximación*.

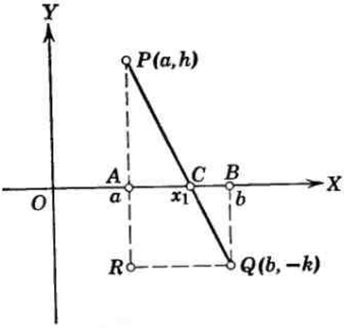


FIG. 39.

El método de aproximación que explicaremos en este artículo se llama *interpolación lineal*. Está fundado en la hipótesis de que un arco pequeño de una curva continua puede sustituirse por un segmento rectilíneo sin introducir un error apreciable. Naturalmente esto es sólo una aproximación, pero tiene la ventaja de que es posible mejorarla disminuyendo la longitud del arco considerado.

Para explicar el método de interpolación lineal vamos a considerar la gráfica de una función polinomial $f(x)$ con coeficientes reales. Sean $a$ y $b$ dos números positivos muy próximos y tales que $b > a$. Supongamos que $f(a) = h > 0$, para $x = a$ y que $f(b) = -k < 0$ para $x = b$. Entonces $f(x)$ tiene un cero entre $a$ y $b$ (Art. 11.5). Esto se representa gráficamente en la figura 39 en donde $P(a, h)$ y $Q(b, -k)$ son dos puntos próximos de la curva. Los puntos $A$ y $B$ son respectivamente los pies de las perpendiculares bajadas de $P$ y $Q$ al eje $X$. Sea $R$ el punto de intersección de la prolongación de $PA$ con la recta que pasa por $Q$ paralela al eje $X$. Supongamos ahora que el arco de la curva de la gráfica de $f(x)$ que une $P$ y $Q$ se sustituye por una línea recta, y sea $C$, entre $A$ y $B$ el punto en que $AB$ corta al eje $X$. Entonces la abscisa $x_1$ del punto $C$ es un valor aproximado del cero de $f(x)$ situado entre $a$ y $b$. Este valor de

$x_1$ puede calcularse fácilmente. En efecto: de los triángulos semejantes $PAC$ y $PRQ$, obtenemos la relación

$$\frac{AC}{RQ}=\frac{AP}{RP}. \tag{1}$$

Y como $RQ = AB = b - a$, $AP = h$, y $RP = h + k$, obtenemos

$$\frac{AC}{b-a}=\frac{h}{h+k}, \quad \text{de donde} \quad AC=\frac{h(b-a)}{h+k}.$$

Ya que $a$, $b$, $h$ y $k$ son cantidades conocidas, $AC$ puede calcularse. Añadiendo este valor a $a$, obtenemos el valor buscado de $x_1$ o sea la *primera* aproximación de la raíz.

Partiendo de esta primera aproximación, podemos repetir el proceso para obtener una segunda aproximación más precisa. El proceso puede repetirse tantas veces como sea necesario hasta obtener el grado de precisión deseado.

Veamos un ejemplo de aplicación del método de la interpolación lineal.

**Ejemplo.** Demostrar que la ecuación

$$f(x) = x^3 - 5x^2 + 2x + 6 = 0 \tag{2}$$

tiene una raíz entre 1 y 2, y calcularla con una cifra decimal.

SOLUCION. Por división sintética encontramos $f(1) = 4$ y $f(2) = -2$, lo que comprueba que la ecuación (2) tiene una raíz entre 1 y 2. En seguida trazamos la gráfica correspondiente como se muestra en la figura 40(a), en la cual se han utilizado las mismas literales que en la figura 39. Entonces, de la relación (1) tenemos

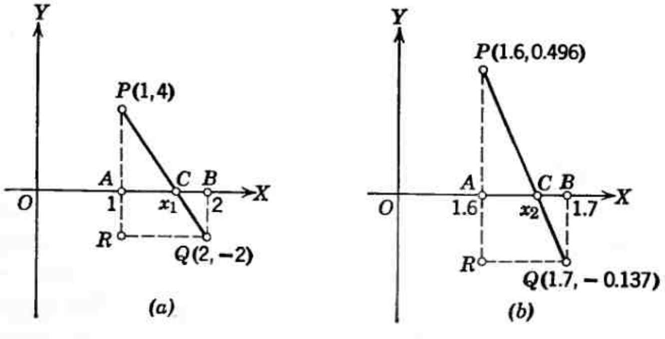


FIG. 40.

$$\frac{AC}{1}=\frac{4}{6}, \quad \text{de donde } AC=\frac{2}{3}=0.6^{+}.$$

Nuestra primera aproximación es, por tanto, $x_1 = 1 + 0.6 = 1.6$.

Para asegurar la precisión de la raíz buscada con una cifra decimal, repetimos el proceso para obtener una segunda decimal. Así encontramos $f(1.6) = 0.496$ y $f(1.7) = -0.137$, de modo que la ecuación (1) tiene una raíz entre 1.6 y 1.7. La gráfica correspondiente aparece en la figura 40(b), en la cual se han utilizado de nuevo las mismas literales. Aquí $RQ = 0.1$, $AP = 0.496$ y $RP = 0.137 + 0.496 = 0.633$. Por tanto, por la relación (1) tenemos

$$\frac{AC}{0.1} = \frac{0.496}{0.633}, \quad \text{de donde AC} = \frac{0.0496}{0.633} = 0.07^{+}.$$

Nuestra segunda aproximación es, pues, $x_2 = 1.6 + 0.07 = 1.67$.

Por tanto, la raíz buscada, correcta con una cifra decimal, es 1.7.

NOTAS.

1. Debe probarse cuidadosamente cada aproximación para asegurarse de que la raíz cae entre dos valores consecutivos. Esto es especialmente importante en la primera aproximación, ya que allí es donde se considera el arco de mayor longitud y donde, por tanto, se obtiene menor precisión. Así, por ejemplo, en un caso particular, la primera aproximación puede indicar que hay una raíz entre 1.6 y 1.7, pero la sustitución directa puede mostrar que la raíz verdadera está comprendida, por ejemplo, entre 1.2 y 1.3.

2. Aunque el método de interpolación lineal nos da cada vez más precisión al tomar aproximaciones sucesivas, es cierto que las operaciones aritméticas necesarias también aumentan considerablemente.

Sin embargo, este método tiene la ventaja muy apreciable de que puede utilizarse también para aproximar las raíces irracionales de ecuaciones no algebraicas, es decir, de ecuaciones trascendentes, tales como las ecuaciones trigonométricas y logarítmicas. El trabajo aritmético puede reducirse en cierta medida utilizando tablas de funciones y máquinas calculadoras.

## 11.11. TRANSFORMACION DE ECUACIONES

Una *transformación* es una operación con la cual se cambia una relación o expresión en otra de acuerdo con una ley dada. En general el propósito de una transformación es cambiar una relación dada en otra que tenga una forma más manejable y útil. En particular, este artículo se dedicará al estudio de dos tipos de transformaciones con las cuales una ecuación entera dada se transforma en otra cuyas raíces guardan una relación específica con las de la ecuación original. Las transformaciones que aquí damos servirán de preparación para el estudio del artículo siguiente.

**Teorema 10.** *Si a partir del segundo término se multiplican sucesivamente los coeficientes de la ecuación entera*

$$(1) \qquad a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^n + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

*por* $m, m^2, m^3, \ldots, m^n$, *la ecuación* (1) *se transforma en otra de la forma*

$$(2) \qquad a_0y^n + ma_1y^{n-1} + m^2a_2y^{n-2} + \ldots + m^{n-1}a_{n-1}y + m^na_n = 0,$$

*cada una de cuyas raíces es igual a m veces la raíz correspondiente de la ecuación* (1).

DEMOSTRACION. Cada raíz $y$ de la ecuación transformada (2) debe estar ligada con cada raíz $x$ de la ecuación dada (1) por medio de la relación $y = mx$ de donde $x = y/m$. Sustituyendo este valor de $x$ en (1) obtenemos

$$a_0\left(\frac{y}{m}\right)^n + a_1\left(\frac{y}{m}\right)^{n-1} + a_2\left(\frac{y}{m}\right)^{n-2} + \ldots + a_{n-1}\left(\frac{y}{m}\right) + a_n = 0.$$

Multiplicando por $m^n$, resulta la ecuación (2).

**Corolario.** *Para el caso particular en que* $m = -1$, *las raíces de la ecuación* (2) *tienen igual valor absoluto que las de la ecuación* (1) *pero con signos opuestos.*

NOTAS.

1. Al utilizar la transformación del Teorema 10, deben tomarse en cuenta las potencias de $x$ que no figuran en la ecuación. Para esto se considera que tales términos tienen coeficientes nulos.
2. El corolario ya ha sido usado en conexión con la regla de los signos de Descartes (Art. 11.8).

**Ejemplo 1.** Transformar la ecuación

$$(3) \qquad x^4 - 5x^3 - x + 5 = 0$$

en otra, cada una de cuyas raíces sea igual al doble de la raíz correspondiente de la ecuación (3).

SOLUCION. Notamos que el término de segundo grado no aparece en la ecuación (3). Por tanto, por el Teorema 10, la ecuación transformada es

$$y^4 - (2)\cdot 5y^3 - (2)^2\cdot 0y^2 - (2)^3y + (2)^4\cdot 5 = 0, \text{ o sea}$$

$$(4) \qquad y^4 - 10y^3 - 8y + 80 = 0.$$

Puede comprobarse este resultado viendo que las raíces de (3) son $1,\ 5,\ \dfrac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$. y que las raíces de (4) son $2,\ 10,\ -1 \pm \sqrt{3}i$.

El Teorema 10 también puede usarse para transformar una ecuación dada, cuyo coeficiente principal sea diferente de la unidad, en otra cuyo coeficiente principal sea la unidad y que los coeficientes restantes sean enteros. Entonces podrá aplicarse a la ecuación transformada el corolario del Teorema 9 (Art. 11.9). Veamos un ejemplo.

**Ejemplo 2.** Transformar la ecuación

$$8x^4 + 10x^3 + 9x^2 + x - 1 = 0 \tag{5}$$

en otra cuyas raíces sean iguales a las de la ecuación (5) multiplicadas por el menor número que haga que el coeficiente principal de la nueva ecuación sea la unidad y que los coeficientes restantes sean enteros.

SOLUCION. Dividiendo (5) entre 8, obtenemos

$$x^4 + \frac{5}{4}x^3 + \frac{9}{8}x^2 + \frac{1}{8}x - \frac{1}{8} = 0.$$

Para obtener la nueva ecuación con coeficiente principal igual a la unidad y con los coeficientes restantes enteros, el menor número por el que se deben multiplicar las raíces de esta ecuación es 4. Por tanto, por el Teorema 10, la ecuación buscada es

$$x^4 + (4)\frac{5}{4}x^3 + (4)^2\frac{9}{8}x^2 + (4)^3\frac{1}{8}x - (4)^4\frac{1}{8} = 0, \text{ o sea,}$$

$$x^4 + 5x^3 + 18x^2 + 8x - 32 = 0. \tag{6}$$

Por medio del corolario del Teorema 9 (Art. 11.9 ), se encuentra que las raíces racionales de (6) son los números enteros 1 y $-2$. Por tanto, las raíces racionales de la ecuación (5) son $\frac{1}{4}$ y $-\frac{1}{2}$.

Ahora consideraremos la transformación que forma la base del método de aproximación que se discutirá en el artículo siguiente.

**Teorema 11.** *La ecuación entera*

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0 \tag{7}$$

*se puede transformar en la ecuación*

$$a_0y^n + R_1y^{n-1} + R_2y^{n-2} + \ldots + R_{n-1}y + R_n = 0 \tag{8}$$

*cada una de cuyas raíces es h unidades menor que la raíz correspondiente de la ecuación* (7), *calculando los coeficientes* $R_1, R_2, \ldots, R_n$ *como sigue:*

*Se divide* $f(x)$ *entre* $x - h$ *llamando* $R_n$ *al residuo. Se divide el cociente entre* $x - h$, *llamando* $R_{n-1}$ *al residuo. Se continúa este proceso hasta completar n divisiones, al último residuo le llamamos* $R_1$.

DEMOSTRACION. Cada una de las raíces $y$ de la ecuación transformada (8) está ligada con cada raíz $x$ de la ecuación dada (7) por medio de la relación $y = x - h$, de donde $x = y + h$. Sustituyendo este valor de $x$ en (7) obtenemos

$$(9) \qquad a_0(y + h)^n + a_1(y + h)^{n-1} + \ldots + a_{n-1}(y + h) + a_n = 0,$$

cada una de cuyas raíces es $h$ unidades menor que la raíz correspondiente de la ecuación (7). Para reducir la ecuación (9) a la forma de una ecuación entera en $y$, podemos desarrollar las potencias de los binomios, reducir los términos semejantes, y escribir el resultado en la forma

$$(10) \qquad a_0y^n + A_1y^{n-1} + A_2y^{n-2} + \ldots + A_{n-1}y + A_n = 0.$$

Pero podemos determinar los coeficientes $A_1, A_2, \ldots, A_n$ de una manera más sencilla. Para esto, sustituimos $y$ por $x - h$ en (10), obteniendo

$$(11) \qquad \begin{aligned} a_0(x - h)^n + A_1(x - h)^{n-1} + A_2(x - h)^{n-2} \\ + \ldots + A_{n-1}(x - h) + A_n = 0. \end{aligned}$$

Si dividimos el primer miembro de (11) entre $x - h$, obtenemos un cociente, y un residuo $A_n$. Si dividimos este cociente entre $x - h$, obtenemos otro cociente, y un residuo $A_{n-1}$. Continuando este proceso hasta completar $n$ divisiones, obtenemos un residuo final $A_1$. Designando los residuos $A_n, A_{n-1}, \ldots, A_1$ por medio de $R_n, R_{n-1}, \ldots, R_n$, y sustituyendo estos valores en la ecuación (10), obtenemos la ecuación buscada (8).

NOTAS.

3. Las divisiones necesarias para aplicar este teorema pueden disponerse como divisiones sintéticas, como puede verse en el ejemplo 3.

4. De este teorema se concluyen que si deseamos transformar una ecuación dada en otra ecuación cuyas raíces sean $h$ *unidades mayores* que las raíces correspondientes de la ecuación dada, basta disminuir las raíces de la ecuación dada en $-h$.

**Ejemplo 3.** Transformar la ecuación

$$(12) \qquad x^3 - 6x^2 + 5x + 12 = 0$$

en otra cada una de cuyas raíces sea dos unidades menor que la raíz correspondiente de la ecuación (12).

SOLUCION. De acuerdo con el Teorema 11, dividiremos sucesivamente entre $x - 2$. Usando división sintética el trabajo se dispone como sigue:

$$\begin{array}{rrrrll}
1 & -6 & +5 & +12 & \underline{2} & \\
 & +2 & -8 & -6 & & \\
\hline
1 & -4 & -3 & +6 & & R_3 = 6 \\
 & +2 & -4 & & & \\
\cline{1-3}
1 & -2 & -7 & & & R_2 = -7 \\
 & +2 & & & & \\
\cline{1-2}
1 & +0 & & & & R_1 = 0.
\end{array}$$

Por tanto la ecuación buscada es

$$x^3 - 7x + 6 = 0. \tag{13}$$

Puede comprobarse este resultado viendo que las raíces de (12) son 3, 4, $-1$ y que las raíces de (13) son 1, 2, $-3$.

## EJERCICIOS. GRUPO 42

En cada uno de los ejercicios 1-7, hallar la raíz indicada de la ecuación dada correcta con una cifra decimal, usando el método de interpolación lineal.

1. $x^3 - 3x^2 + 3x - 5 = 0;\ 2 < x < 3.$
2. $x^3 - 6x^2 + 12x - 10 = 0;\ 3 < x < 4.$
3. $x^3 + 3x^2 + 2x - 7 = 0;\ 1 < x < 2.$
4. $x^3 + 3x^2 - 2x - 1 = 0;\ 0 < x < 1.$
5. $x^3 - 3x^2 - 26x + 69 = 0;\ 2 < x < 3.$
6. $x^4 - 2x^3 + 21x - 23 = 0;\ 1 < x < 2.$
7. $x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 7x - 12 = 0;\ 3 < x < 4.$
8. Por interpolación lineal, hallar la raíz positiva de $x^4 - 2x^3 - 3x^2 - 2x - 4 = 0$ correcta con dos decimales.
9. Por interpolación lineal, hallar la raíz negativa de $x^4 - 2x^3 - 3x^2 - 2x - 4 = 0$ correcta con dos decimales.

*Sugerencia:* Cambiar los signos de las raíces y hallar la raíz positiva correspondiente.

10. Por interpolación lineal, hallar la raíz positiva de $4x^4 - 4x^3 + 7x^2 - 8x - 2 = 0$ correcta con tres decimales.
11. Comprobar el resultado del ejemplo 1 (Art. 11.11).

En cada uno de los ejercicios 12-15, transformar la ecuación dada en otra cuyas raíces sean $m$ veces las de la ecuación dada.

12. $x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0;\ m = 3.$ 13. $2x^3 + x^2 - 13x + 6 = 0;\ m = 2.$
14. $x^4 - x^2 + x - 1 = 0;\ m = 3.$
15. $x^3 + 3x^2 - 3x - 14 = 0;\ m = -2.$
16. Comprobar el resultado del ejercicio 12 calculando las raíces directamente.
17. Demostrar el corolario del Teorema 10 (Art. 11.11).

En cada uno de los ejercicios 18-21, transformar la ecuación dada en otra cuyas raíces tengan signos opuestos con respecto a las de la ecuación dada.

18. $x^3 - 4x^2 + 14x - 20 = 0.$ 19. $2x^4 + 6x^3 - 7x^2 + 12 = 0.$
20. $3x^3 + 2x^2 - 9x + 2 = 0.$ 21. $x^4 - 3x^3 + 2x^2 - x + 1 = 0.$

22. Comprobar el resultado del ejercicio 18 calculando las raíces directamente.

En cada uno de los ejercicios 23-26 transformar la ecuación dada en otra cuyas raíces sean iguales a las de la ecuación dada multiplicadas por el menor número que haga que el coeficiente principal sea la unidad y que los coeficientes restantes sean enteros.

23. $4x^3 - 20x^2 + 9x + 28 = 0$. 24. $2x^4 - 3x^3 - 14x^2 + 2x + 4 = 0$.
25. $3x^3 - x^2 - 3x + 1 = 0$. 26. $2x^4 - 9x^3 + 10x^2 + x - 2 = 0$.
27. Comprobar el resultado del ejercicio 23 calculando las raíces directamente.
28. Comprobar el resultado del ejemplo 3 (Art. 11.11).

En cada uno de los ejercicios 29-33, transformar la ecuación dada en otra cuyas raíces estén disminuidas en el número indicado.

29. $3x^3 - 4x^2 - 35x + 12 = 0$; 1.
30. $2x^3 - 9x^2 + 12x - 4 = 0$; 3.
31. $x^4 - 2x^3 - x^2 + 6x - 7 = 0$; 2.
32. $2x^4 + 6x^3 + 7x^2 + 2x - 2 = 0$; 0.3.
33. $2x^3 + 3x^2 + x - 1 = 0$; 0.01.
34. Comprobar el resultado del ejercicio 29 calculando las raíces directamente.
35. Transformar la ecuación del ejercicio 29 en otra cuyas raíces sean las de la ecuación dada aumentadas en 1.

## 11.12. METODO DE HORNER

Ahora vamos a calcular las raíces irracionales por medio de un proceso conocido con el nombre de *método de aproximación de Horner.* Este método sólo es aplicable a las ecuaciones enteras, pero tiene la ventaja de que los cálculos necesarios son más sencillos que los usados en el método de la interpolación lineal (Art. 11.10). La facilidad de cálculo es debida a que cada cifra de la raíz se determina individualmente.

El razonamiento fundamental del método de Horner es muy sencillo. Supongamos que una ecuación entera dada $f(x) = 0$ tiene una raíz irracional que, correcta con 3 cifras decimales, es 2.124. Para determinar esta raíz primeramente veremos que la ecuación dada tiene una raíz entre 2 y 3 (Art. 11.5). Después disminuiremos las raíces de $f(x) = 0$ en 2 unidades, obteniendo la nueva ecuación $f_1(x_1) = 0$ que tiene la raíz 0.124 (Art. 11.11). Entonces hacemos ver que $f_1(x_1) = 0$ tiene una raíz entre 0.1 y 0.2 y disminuimos sus raíces en 0.1, obteniendo una nueva ecuación $f_2(x_2) = 0$ que tiene la raíz 0.024. Repitiendo el paso anterior, mostramos que $f_2(x_2) = 0$ tiene una raíz entre 0.02 y 0.03 y disminuimos sus raíces en 0.02, obteniendo una nueva ecuación $f_3(x_3) = 0$ que tiene la raíz 0.004. Continuando este proceso, es posible obtener la raíz con el número de cifras decimales correctas que se desee. Los detalles del método los vamos a explicar en el ejemplo que sigue.

**Ejemplo.** Demostrar que la ecuación

$$(1) \qquad f(x) = x^3 + 5x^2 - x - 9 = 0$$

tiene una raíz entre 1 y 2, y calcularla con 3 cifras decimales por medio del método de Horner.

SOLUCION. Por división sintética encontramos $f(1) = -4$ y $f(2) = 17$ lo que significa que la ecuación (1) tiene una raíz entre 1 y 2.

Ahora disminuimos las raíces de la ecuación (1) en 1.

$$\begin{array}{rrrrl}
1 & +5 & -1 & -9 & \underline{|1} \\
 & +1 & +6 & +5 & \\ \hline
1 & +6 & +5 & |-4 & \\
 & +1 & +7| & & \\ \hline
1 & +7 & |+12 & & \\
 & +1| & & & \\ \hline
1 & |\underline{+8} & & &
\end{array}$$

La ecuación transformada

$$(2) \qquad f_1(x_1) = x_1^3 + 8x_1^2 + 12x_1 - 4 = 0$$

tiene una raíz entre 0 y 1 que procederemos a determinar entre dos décimas sucesivas. Ya que la raíz de (2) es pequeña, su cubo y cuadrado son aún más pequeños, por lo que, para una primera aproximación, podemos despreciar los términos en $x_1^3$ y $x_1^2$, obteniendo así la *ecuación modificada* $12x_1 - 4 = 0$ que tiene la solución $x_1 = 0.3^+$. Ya que esto es sólo una aproximación, debemos probarla en la ecuación (2). Por división sintética encontramos $f_1(0.3) = 0.347$ y $f_1(0.2) = -1.272$. Por tanto, la ecuación (2) tiene una raíz entre 0.2 y 0.3.

A continuación disminuimos las raíces de la ecuación (2) en 0.2. Al efectuar esta operación conviene dejar espacio suficiente para las decimales necesarias, como se indica:

$$\begin{array}{rrrrl}
1 & +8.0 & +12.00 & -4.000 & \underline{|0.2} \\
 & +0.2 & +1.64 & +2.728 & \\ \hline
1 & +8.2 & +13.64 & |-1.272 & \\
 & +0.2 & +1.68| & & \\ \hline
1 & +8.4 & |+15.32 & & \\
 & +0.2| & & & \\ \hline
1 & |\underline{+8.6} & & &
\end{array}$$

La ecuación transformada

$$(3) \qquad f_2(x_2) = x_2^3 + 8.6x_2^2 + 15.32x_2 - 1.272 = 0$$

tiene una raíz entre 0 y 0.1 que procederemos a localizar entre dos centésimas sucesivas. De los últimos dos términos de (3), obtenemos la ecuación modificada $15.32x_2 - 1.272 = 0$ que tiene la solución $x_2 = 0.08^+$. Por división sintética encontramos $f_2(0.08) = 0.009152$ y $f_2(0.07) = -0.157117$. Por tanto, la ecuación (3) tiene una raíz entre 0.07 y 0.08.

Ahora disminuimos las raíces de (3) en 0.07:

$$\begin{array}{rrrr|l}
1 & +\ 8.60 & +\ 15.3200 & -\ 1.272000 & \underline{0.07} \\
 & +\ 0.07 & +\ \ 0.6069 & +\ 1.114883 & \\
\cline{1-4}
1 & +\ 8.67 & +\ 15.9269 & \multicolumn{1}{|r}{-0.157117} & \\
 & +\ 0.07 & +\ \ 0.6118 & & \\
\cline{1-3}
1 & +\ 8.74 & \multicolumn{1}{|r}{+16.5387} & & \\
 & +\ 0.07 & & & \\
\cline{1-2}
1 & \multicolumn{1}{|r}{+8.81} & & & \\
\end{array}$$

La ecuación transformada

$$f_3(x_3) = x_3^3 + 8.81x_3^2 + 16.5387x_3 - 0.157117 = 0 \tag{4}$$

tiene una raíz entre 0. y 0.01 la cual debemos localizar entre dos milésimas sucesivas. De los últimos dos términos de (4), tenemos la ecuación modificada $16.5387x_3 - 0.157117 = 0$, con la solución $x_3 = 0.009^+$. Por división sintética encontramos $f_3(0.009) = -0.007554361$ y $f_3(0.01) = 0.009152$. Por tanto, la ecuación (4) tiene una raíz entre 0.009 y 0.01.

Ahora disminuimos las raíces de la ecuación (4) en 0.009. Se deja como un ejercicio mostrar que la ecuación transformada es

$$f_4(x_4) = x_4^3 + 8.837x_4^2 + 16.697523x_4 - 0.007554361 = 0. \tag{5}$$

De la ecuación modificada $16.697523x_4 - 0.007554361 = 0$, obtenemos la solución $x_4 = 0.0004^+$. En este punto, ya que la raíz de (5) es muy pequeña, la solución de la ecuación modificada es suficientemente precisa. Por tanto, la raíz buscada es

$$x = 1 + 0.2 + 0.07 + 0.009 + 0.0004 = 1.2794$$

y, con precisión de 3 decimales, es 1.279.

NOTAS.

1. Por motivos de exposición, la resolución del ejemplo anterior se ha descrito en forma más extensa de lo necesario. En la práctica se puede hallar la solución en forma más breve, mostrando solamente las operaciones de disminución de las raíces y omitiendo las ecuaciones transformadas de cuyos coeficientes ya se dispone.

2. Es muy importante probar cada cifra sucesiva de la raíz buscada para asegurarse de que la raíz de cada ecuación transformada está entre dos valores sucesivos.

3. Conforme se avanza en la determinación de aproximaciones por

el método de Horner, las raíces de las ecuaciones transformadas se hacen más y más pequeñas por lo que las ecuaciones modificadas se hacen más y más precisas y a menudo pueden usarse para obtener cifras decimales adicionales.

4. Para hallar una raíz negativa de $f(x) = 0$ por el método de Horner, se calcula la raíz positiva correspondiente de $f(-x) = 0$ y se le cambia el signo.

## EJERCICIOS. GRUPO 43

En cada uno de los ejercicios 1-6, hallar la raíz indicada de la ecuación dada, correcta con dos decimales, usando el método de Horner.

1. $x^3 - 6x^2 + 13x - 13 = 0$; $3 < x < 4$.
2. $x^3 - 3x^2 + 13x - 24 = 0$; $2 < x < 3$.
3. $x^3 + 10x^2 + 34x - 60 = 0$; $1 < x < 2$.
4. $x^3 - 10x^2 + 35x + 50 = 0$; $-1 > x > -2$.
5. $x^3 + 3x^2 - 5x - 47 = 0$; $3 < x < 4$.
6. $x^3 - 9x^2 + 24x - 19 = 0$; $2 < x < 3$.

En cada uno de los ejercicios 7-11, hallar la raíz indicada de la ecuación dada, correcta con tres decimales, usando el método de Horner.

7. $x^3 + 3x^2 + x - 6 = 0$; $1 < x < 2$.
8. $x^3 - 4x^2 - 5x + 20 = 0$; $-2 > x > -3$.
9. $x^3 + 4x^2 + 6x - 97 = 0$; $3 < x < 4$.
10. $x^4 + 4x^3 + 7x^2 - 2x - 21 = 0$; $1 < x < 2$.
11. $x^4 - 6x^3 + 12x^2 + 11x - 41 = 0$; $2 < x < 3$.
12. Por el método de Horner, resolver el ejercicio 7 del grupo 42 (Art. 11.11).
13. Por el método de Horner, resolver el ejercicio 8 del grupo 42 (Art. 11.11).
14. Por el método de Horner, resolver el ejercicio 9 del grupo 42 (Art. 11.11).
15. Por el metodo de Horner, resolver el ejercicio 10 del grupo 42 (Art. 11.11).
16. Demostrar que el uso de decimales puede evitarse en el método de Horner multiplicando por 10 las raíces de cada ecuación transformada.
17. Al determinar por el método de Horner la raíz de la primera ecuación transformada, puede obtenerse un resultado más preciso usando los tres últimos términos de la ecuación como ecuación modificada. Aplicar ésto a la ecuación (2) del Art. 11.12, calculando la raíz positiva de la ecuación cuadrática $8x_1^2 + 12x_1 - 4 = 0$.
18. Comprobar la ecuación transformada (5) del ejemplo del Art. 11.12.
19. Hallar la raíz positiva de $x^4 - 2x^3 - 9x^2 - 4x - 22 = 0$, correcta con tres decimales, usando el método de Horner.
20. Hallar la raíz negativa de $x^4 - 2x^3 - 9x^2 - 4x - 22 = 0$, correcta con 3 decimales, usando el método de Horner.
21. Hallar la raíz positiva de $4x^4 - 19x^2 - 23x - 19 = 0$, correcta con 3 decimales, usando el método de Horner.
22. Hallar la raíz negativa de $4x^4 - 19x^2 - 23x - 19 = 0$, correcta con 3 decimales, usando el método de Horner.
23. Por el método de Horner, calcular la raíz cúbica principal de 7, correcta con 3 decimales. *Sugerencia:* Calcular la raíz positiva de $x^3 - 7 = 0$.

En cada uno de los ejercicios 24-27, calcular la raíz principal indicada, correcta con 3 decimales, usando el método de Horner.

24. $\sqrt[3]{15}$. 25. $\sqrt[3]{-35}$. 26. $\sqrt[4]{11}$. 27. $\sqrt[5]{27}$.

28. Las dimensiones de una caja rectangular son 5 cm, 8 cm y 9 cm. Calcular por el método de Horner la cantidad, la misma para todas, en que debe aumentarse cada dimensión para que el volumen aumente en 440 $\text{cm}^3$.

29. Se cortan cuadrados iguales en las esquinas de un cartón rectangular de 1.4 m de largo por 1 m de ancho, doblando los rectángulos laterales y formándose así una caja abierta cuyo volumen es 0.1 $\text{m}^3$. Calcular usando el método de Horner la longitud del lado de los cuadrados cortados. (Dos soluciones.)

30. Por el método de Horner, encontrar las soluciones del sistema $x^2 + y = 7$, $y^2 + x = 11$, correctas con 2 cifras decimales. Comprobar gráficamente los resultados.

## 11.13. RELACIONES ENTRE LAS RAICES Y LOS COEFICIENTES

Hemos visto anteriormente que la naturaleza y valor de las raíces de una ecuación entera dependen de sus coeficientes. Ahora obtendremos ciertas relaciones entre las raíces y los coeficientes del tipo mencionado de ecuaciones, relaciones que frecuentemente son útiles al tratar de hallar sus soluciones.

Primeramente obtendremos varias igualdades a partir de sus raíces. Así, por ejemplo, según el Art. 11.6, la ecuación cuyas raíces son $r_1$ y $r_2$ es

$$(x - r_1)(x - r_2) = 0$$

o sea

$$x^2 - (r_1 + r_2)x + r_1r_2 = 0.$$

Análogamente, la ecuación cuyas raíces son $r_1$, $r_2$, y $r_3$ es

$$(x - r_1)(x - r_2)(x - r_3) = 0$$

o sea

$$x^3 - (r_1 + r_2 + r_3)x^2 + (r_1r_2 + r_1r_3 + r_2r_3)x - r_1r_2r_3 = 0.$$

De la misma manera, la ecuación cuyas raíces son $r_1$, $r_2$, $r_3$ y $r_4$ puede escribirse en la forma

$$x^4 - (r_1+r_2+r_3+r_4)x^3 + (r_1r_2+r_1r_3+r_1r_4+r_2r_3+r_2r_4+r_3r_4)x^2 \\ - (r_1r_2r_3+r_1r_2r_4+r_1r_3r_4+r_2r_3r_4)x + r_1r_2r_3r_4 = 0.$$

La observación de estas igualdades descubre los siguientes hechos:

1. El coeficiente principal es la unidad.

2. El coeficiente del segundo término es igual al número negativo de la suma de todas las raíces.

3. El coeficiente del tercer término es igual a la suma de los productos de las raíces tomadas a pares.

4. El coeficiente del cuarto término es igual al negativo de la suma de los productos de las raíces tomadas de tres en tres.

5. El último término es igual al producto de todas las raíces, tomado con signo positivo o negativo según que el número de raíces sea par o impar.

De estos hechos deducimos resultados análogos para la ecuación general entera de grado $n$. Por inducción matemática puede demostrarse que esta deducción es correcta; enunciamos el resultado general en el teorema siguiente:

**Teorema 12.** *Si* $r_1, r_2, \ldots, r_n$ *son las* $n$ *raíces de la ecuación entera*

$$x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

*cuyo coeficiente principal es igual a la unidad, entonces las raíces y los coeficientes están relacionados por las siguientes igualdades:*

$$\begin{aligned} a_1 &= -(r_1 + r_2 + \ldots + r_n), \\ a_2 &= r_1r_2 + r_1r_3 + \ldots + r_{n-1}r_n, \\ a_3 &= -(r_1r_2r_3 + r_1r_2r_4 + \ldots + r_{n-2}r_{n-1}r_n), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_n &= (-1)^n r_1r_2r_3 \ldots r_n. \end{aligned}$$

NOTAS.

1. Es importante observar que las relaciones del Teorema 12 sólo son válidas cuando el coeficiente principal es la unidad.

2. Ahora se puede observar que el Teorema 3 (Art. 5.5) es un caso especial del Teorema 12 correspondiente a $n = 2$.

**Ejemplo 1.** Resolver la ecuación $3x^3 - 2x^2 - 27x + 18 = 0$ sabiendo que una de las raíces es el número negativo de otra.

SOLUCION. Representemos las tres raíces por $r_1$, $-r_1$ y $r_2$; su suma es igual a $r_2$.

Antes de aplicar el Teorema 12, dividiremos la ecuación dada entre 3, para reducir a la unidad el coeficiente principal. Entonces la ecuación toma la forma

$$x^3 - \tfrac{2}{3}x^2 - 9x + 6 = 0,$$

y la suma de las raíces es igual a $\frac{2}{3}$. Por tanto $r_2 = \frac{2}{3}$.

Ahora, por medio de la división sintética reducimos la ecuación dada separando la raíz $\frac{2}{3}$:

$$\begin{array}{r|l} 3 - 2 - 27 + 18 & \underline{\tfrac{2}{3}} \\ +2 + \ \ 0 - 18 & \\ \hline 3 + 0 - 27 + \ \ 0 & \end{array}$$

La ecuación reducida es $3x^2 - 27 = 0$, con las soluciones $x = \pm 3$. Por tanto, las raíces buscadas son $\frac{2}{3}$, 3, —3.

**Ejemplo 2.** Las raíces de la ecuación $x^3 - 3x^2 + kx + 8 = 0$, tomadas en determinado orden, están en progresión aritmética. Hallar las raíces y el valor del coeficiente $k$.

SOLUCION. Podemos representar a las tres raíces por $a - d, a, a + d$; su suma es igual a 3. Por tanto, $3a = 3$ y $a = 1$, que es una de las raíces.

Haciendo $x = 1$ en la ecuación dada, podemos obtener el valor de $k$ y luego proceder a calcular las dos raíces restantes como en el ejemplo 1. Sin embargo, es posible obtener estas raíces sin hallar previamente $k$. Ya que $a = 1$, las tres raíces son $1 - d$, 1, $1 + d$, siendo su producto $1 - d^2$. Por otra parte, según la ecuación dada, el producto de las raíces es igual a —8. Por tanto, $1 - d^2 = -8$ y $d = \pm 3$. Para $d = 3$ las raíces son —2, 1, 4; para $d = -3$ las raíces son 4, 1, —2.

Puede comprobarse fácilmente que $k = -6$.

## EJERCICIOS. GRUPO 44

1. Resolver la ecuación $4x^3 - 12x^2 + 3x + 5 = 0$ sabiendo que las raíces, en un determinado orden, están en progresión aritmética.

2. Resolver la ecuación $x^3 + 3x^2 - 6x - 8 = 0$ sabiendo que las raíces, en un determinado orden, están en progresión geométrica. *Sugerencia:* Representar las raíces por $a/r, a, ar$.

3. Resolver la ecuación $x^3 - 9x^2 + kx - 24 = 0$ y hallar el valor de $k$ si las raíces, en cierto orden, están en progresión aritmética.

4. Resolver la ecuación $3x^3 + kx^2 - 7x + 3 = 0$ y hallar el valor de $k$ si las raíces, en cierto orden, están en progresión geométrica.

5. Resolver la ecuación $4x^3 - x^2 - 16x + 4 = 0$ si una raíz es el negativo de la otra.

6. Resolver la ecuación $x^3 - 10x^2 + 11x + 70 = 0$ si la suma de dos de las raíces es 3.

7. Resolver la ecuación $x^3 + 2x^2 - 15x - 36 = 0$ sabiendo que tiene una raíz doble.

8. Resolver la ecuación $9x^3 - 45x^2 - 52x - 12 = 0$ si una raíz es el doble de otra.

9. Resolver la ecuación $3x^3 + 17x^2 - 87x + 27 = 0$ si una raíz es el recíproco de otra.

10. Resolver la ecuación $x^3 + 2x^2 - 5x - 6 = 0$ si una raíz excede a otra en 2 unidades.

11. Resolver la ecuación $2x^3 + 9x^2 + 10x + 3 = 0$ si las raíces están en la proporción 1:2:6.

12. Resolver la ecuación $2x^3 - 11x^2 - 7x + 6 = 0$ si el producto de dos de sus raíces es 3.

13. Resolver la ecuación $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$ si el cociente de dos de sus raíces es 3.

14. Resolver la ecuación $x^4 - 5x^3 + 6x^2 + 4x - 8 = 0$ sabiendo que tiene una raíz triple.

15. Resolver la ecuación $4x^4 + 28x^3 + 33x^2 - 56x + 16 = 0$ sabiendo que tiene dos raíces dobles.

16. Resolver la ecuación $x^4 - 8x^3 + 14x^2 + 8x - 15 = 0$ si las raíces, en cierto orden, están en progresión aritmética. *Sugerencia:* Representar las raíces por $a - 3d$, $a - d$, $a + d$, $a + 3d$.

17. Resolver la ecuación $9x^4 - 63x^3 + 53x^2 + 7x - 6 = 0$ si una raíz es el número negativo de otra.

18. Escribir las relaciones del Teorema 12 (Art. 11.13) cuando el coeficiente principal $a_0 \neq 1$.

19. Demostrar que si en una ecuación entera falta el segundo término, entonces la suma de las raíces es cero, y que si falta el término independiente una por lo menos de las raíces es igual a cero.

20. Considerando la ecuación $x^n - 1 = 0$, demostrar que (a) la suma de las $n$ raíces enésimas de la unidad es igual a cero; (b) el producto de las $n$ raíces enésimas de la unidad es igual a $-1$ si $n$ es par y es igual a 1 si $n$ es impar. (Véase ejercicio 17 del grupo 29, Art. 8.9.)

21. Si $r_1$, $r_2$ y $r_3$ son las raíces de la ecuación $6x^3 - 11x^2 - 3x + 2 = 0$, calcular $\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3}$ sin hallar directamente las raíces.

22. En el ejercicio 21, calcular $r_1^2 + r_2^2 + r_3^2$ sin hallar directamente las raíces.

23. Hallar la relación que debe existir entre los coeficientes de la ecuación $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ si una de sus raíces es el número negativo de otra. Comprobar este resultado para el Ejemplo 1 del Art. 11.13.

24. Hallar la relación que debe existir entre los coeficientes de la ecuación $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ si sus raíces, en cierto orden, forman una progresión geométrica. Comprobar el resultado para el Ejercicio 2.

25. Demostrar el Teorema 12 (Art. 11.13) usando el método de la inducción matemática.

# 12

# Fracciones parciales

## 12.1. INTRODUCCION

En el Art. 2.11 consideramos el problema de encontrar la suma de dos o más fracciones algebraicas simples. Esta suma resultó ser una sola fracción cuyo denominador era el mínimo común múltiplo de los denominadores de las fracciones dadas. Por ejemplo, podemos comprobar fácilmente la siguiente suma:

$$(1) \qquad \frac{1}{x+1}+\frac{2}{x-1}+\frac{2x-1}{x^2+1}=\frac{5x^3+x+2}{(x^2-1)(x^2+1)}$$

En este capítulo vamos a considerar el problema inverso, es decir, el de descomponer una fracción dada en la suma de fracciones más sencillas que se denominan sus *fracciones parciales.* Por ejemplo, en la igualdad (1), las tres fracciones del primer miembro son las fracciones parciales correspondientes a la fracción del segundo miembro. El problema de la descomposición de una fracción en fracciones parciales se presenta en otras ramas de las matemáticas como, por ejemplo, en cálculo integral.

Hemos observado previamente (Art. 2.11) que una fracción impropia puede expresarse como la suma de un polinomio y una fracción propia. En lo que sigue se sobrentenderá que solamente trataremos de descomponer las fracciones propias simplificadas. Además, sólo consideraremos fracciones en las que el numerador y denominador sean polinomios con coeficientes reales. Ya que los denominadores de las fracciones parciales que se van a determinar son factores del denominador de la fracción dada, se concluye que tal denominador debe tener factores lineales o cuadráticos irreducibles con coeficientes reales, de acuerdo con el corolario 2 del Teorema 6 (Art. 11.7).

## 12.2. TEOREMA FUNDAMENTAL EN LA DESCOMPOSICION DE UNA FRACCION EN FRACCIONES PARCIALES

El método para descomponer una fracción propia en suma de fracciones parciales se funda en el siguiente teorema, cuya demostración se omite por caer fuera del campo de este libro.

**Teorema.** *Cualquier fracción propia, reducida a su mínima expresión, puede expresarse como una suma de fracciones parciales de los siguientes tipos:*

1. *A cada factor lineal $ax + b$ que aparezca una sola vez como factor del denominador, corresponde una fracción parcial de la forma $\dfrac{A}{ax+b}$, en donde $A \neq 0$ es una constante.*

2. *A cada factor lineal $ax + b$ que aparezca $k$ veces como factor del denominador, corresponde la suma de $k$ fracciones parciales de la forma*

$$\frac{A_1}{ax+b} + \frac{A_2}{(ax+b)^2} + \dots + \frac{A_k}{(ax+b)^k},$$

*en donde $A_1, A_2, \dots, A_k$ son constantes y $A_k \neq 0$.*

3. *A cada factor cuadrático $ax^2 + bx + c$ (irreducible en el campo de los números reales) que aparezca una sola vez como factor del denominador, corresponde una fracción parcial de la forma $\dfrac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$, en donde $A$ y $B$ son constantes no simultáneamente nulas.*

4. *A cada factor cuadrático $ax^2 + bx + c$ (irreducible en el campo de los números reales) que aparezca $k$ veces como factor del denominador, corresponde la suma de $k$ fracciones parciales de la forma*

$$\frac{A_1x+B_1}{ax^2+bx+c} + \frac{A_2x+B_2}{(ax^2+bx+c)^2} + \dots + \frac{A_kx+B_k}{(ax^2+bx+c)^k},$$

*en donde $A_1, B_1, A_2, B_2, \dots, A_k, B_k$ son constantes y $A_k$ y $B_k$ no son simultáneamente nulas.*

NOTAS.

1. Si una fracción dada es impropia, primeramente debe expresarse como la suma de un polinomio y una fracción propia, aplicándose luego el teorema a la fracción propia.

2. Los tipos de fracciones mencionados en el teorema se llaman *fracciones parciales simples.*

3. El estudiante podría preguntar si existen fracciones parciales de la forma $\dfrac{Ax^2+Bx+C}{ax^3+bx^2+cx+d}$. La respuesta es afirmativa, pero ya no se

trata de las fracciones parciales simples. Ya que estamos trabajando con coeficientes reales, se concluye, del Corolario 2 del Teorema 6 (Art. 11.7), que el denominador cúbico puede expresarse ya sea como producto de tres factores lineales o como producto de un factor lineal por un factor cuadrático. Por tanto, la fracción mencionada puede expresarse como la suma de dos o tres fracciones simples.

El teorema enunciado nos da la *forma* de las fracciones parciales; nos queda el problema de determinar los valores de las diversas constantes que aparecen en esas fracciones. En el resto de este capítulo explicaremos como se efectúa esta determinación por medio de ejemplos que comprenden los cuatro tipos.

## 12.3. FACTORES LINEALES DISTINTOS

Aquí consideramos el problema correspondiente al tipo 1 del Teorema del Art. 12.2.

**Ejemplo.** Descomponer $\frac{5x+1}{(x-1)(x+1)(x+2)}$ en fracciones parciales simples.

SOLUCION. Ya que los factores del denominador son todos lineales y diferentes, según el teorema anterior podemos escribir la identidad

$$(1) \qquad \frac{5x+1}{(x-1)(x+1)(x+2)} \equiv \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x+2},$$

siendo $A$, $B$ y $C$ constantes que deben determinarse. La identidad (1) es válida para todos los valores de $x$ exceptuando 1, $-1$ y $-2$, pues para cada uno de estos valores el denominador se anula. Quitando denominadores de (1), tenemos la identidad

$$(2) \qquad 5x+1 \equiv A(x+1)(x+2) + B(x-1)(x+2) + C(x-1)(x+1)$$

que, en vista de la relación (1), es válida para todos los valores de $x$ excepto, posiblemente, para 1, $-1$ y $-2$. Por tanto, por el Corolario del Teorema 5 (Art. 11.6), la relación (2) es válida para *todos* los valores de $x$ incluyendo 1, $-1$ y $-2$.

Existen dos métodos para determinar las constantes $A$, $B$ y $C$.

METODO 1. Para determinar las tres constantes $A$, $B$ y $C$, necesitamos tres ecuaciones independientes que las relacionen. Estas tres ecuaciones pueden obtenerse sustituyendo a $x$ por tres números distintos cualesquiera en la identidad (2). Sin embargo, este caso se simplifica si sustituimos los valores de $x$ que fueron excluidos de la relación (1), es decir, 1, $-1$ y $-2$, pues con cada una de estas sustituciones eliminamos todas las constantes con excepción de una. Así, para $x = 1$, la identidad (2) nos da

$$5 + 1 = A(1 + 1)(1 + 2), \text{ de donde } A = 1.$$

Similarmente, para $x = -1$, la identidad (2) nos da

$$-5 + 1 = A(1 - 1)(-1 + 2), \text{ de donde } B = 2.$$

Finalmente, para $x = -2$, la identidad (2) nos da

$$-10 + 1 = C(-2 - 1)(-2 + 1), \text{ de donde } C = -3.$$

Según esto la solución buscada es:

$$\frac{5x + 1}{(x - 1)(x + 1)(x + 2)} = \frac{1}{x - 1} + \frac{2}{x + 1} - \frac{3}{x + 2}. \tag{3}$$

Una comprobación completa de este resultado se obtiene sumando las tres fracciones parciales del segundo miembro de (3), como se estudió en el Art. 2.11.

METODO 2. En este método efectuamos operaciones en el segundo miembro de (2) y escribimos el resultado como un polinomio en $x$. Esto es,

$$5x + 1 \equiv A(x^2 + 3x + 2) + B(x^2 + x - 2) + C(x^2 - 1), \text{ o sea,}$$
$$5x + 1 \equiv (A + B + C)x^2 + (3A + B)x + 2A - 2B - C. \tag{4}$$

Ya que (4) es una identidad, se sigue, del teorema 5 (Art. 11.6), que los coeficientes de las potencias correspondientes de $x$ deben ser iguales, así obtenemos

$$\begin{aligned} A + B + C &= 0, \\ 3A + B &= 5, \\ 2A - 2B - C &= 1. \end{aligned}$$

La solución de este sistema de ecuaciones (Art. 4.7) puede efectuarse fácilmente, obteniéndose $A = 1$, $B = 2$, $C = -3$, que concuerda con el resultado obtenido por el Método 1.

## 12.4. FACTORES LINEALES REPETIDOS

Veamos ahora un ejemplo que comprende al tipo 2 del teorema del Art. 12.2.

**Ejemplo.** Descomponer $\dfrac{5x^2 + 4x + 2}{(x - 4)(x + 3)^2}$ en sus fracciones parciales simples.

SOLUCION. Este problema comprende los tipos 1 y 2 del teorema del Art. 12.2, por lo cual escribimos la identidad

$$(1)\qquad \frac{5x^2+4x+2}{(x-4)(x+3)^2} \equiv \frac{A}{x-4} + \frac{B}{x+3} + \frac{C}{(x+3)^2}.$$

Eliminando las fracciones de (1), tenemos la identidad

$$(2)\qquad 5x^2+4x+2 \equiv A(x+3)^2 + B(x-4)(x+3) + C(x-4),$$

la cual, por el mismo argumento usado en el ejemplo del Art. 12.3, es válida para todos los valores de $x$.

También existen dos métodos para la determinación de las constantes $A, B$ y $C$.

METODO 1. En este caso, debido a que un factor lineal está repetido, no es posible obtener inmediatamente las tres constantes por sustitución de ciertos valores como se hizo en el ejemplo del Art. 12.3. Sin embargo, podemos determinar de esta manera dos de las constantes. Así, para $x = 4$ la identidad (2) nos da

$$80 + 16 + 2 = A(4+3)^2, \text{ de donde } A = 2.$$

Para $x = -3$ la identidad (2) nos da

$$45 - 12 + 2 = C(-3-4), \text{ de donde } C = -5.$$

No existe un valor de $x$ que puede sustituirse para eliminar simultáneamente $A$ y $C$ y obtener de inmediato $B$. Sin embargo, si usamos los valores de $A$ y $C$ ya obtenidos y algún valor sencillo de $x$, digamos 0, podemos obtener fácilmente $B$. Así, si sustituimos $A = 2$, $C = -5$ y $x = 0$ en la identidad (2), tenemos

$$2 = 2(3)^2 + B(-4)(3) + (-5)(-4),$$

de donde $\quad 2 = 18 - 12B + 20,\ 12B = 36,\ B = 3.$

Por tanto, la descomposición en fracciones parciales es

$$\frac{5x^2+4x+2}{(x-4)(x+3)^2} \equiv \frac{2}{x-4} + \frac{3}{x+3} - \frac{5}{(x+3)^2}.$$

METODO 2. Aquí procederemos como en el Método 2 del Art. 12.3. Efectuando operaciones en el segundo miembro de (2), tenemos

$$5x^2+4x+2 \equiv A(x^2+6x+9) + B(x^2-x-12) + C(x-4),$$

o sea,

$$5x^2+4x+2 \equiv (A+B)x^2 + (6A-B+C)x + 9A - 12B - 4C.$$

Igualando los coeficientes de potencias correspondientes de $x$, obtenemos el sistema

$$\begin{aligned} A + B &= 5, \\ 6A - B + C &= 4, \\ 9A - 12B - 4C &= 2, \end{aligned}$$

cuya solución es $A = 2$, $B = 3$, $C = -5$, que concuerda con el resultado obtenido por el Método 1.

### EJERCICIOS. GRUPO 45

En cada uno de los ejercicios 1-20, descomponer la fracción dada en sus fracciones parciales simples y comprobar el resultado.

1. $\dfrac{3x + 6}{(x - 2)(x + 4)}$.
2. $\dfrac{7x}{(2x + 1)(x - 3)}$.
3. $\dfrac{x - 9}{x^2 - 9}$.
4. $\dfrac{9x + 7}{x^2 + 2x - 3}$.
5. $\dfrac{3x^2 - 5x - 52}{(x + 2)(x - 3)(x + 5)}$.
6. $\dfrac{16 - 10x^2}{(x^2 - 1)(x^2 - 4)}$.
7. $\dfrac{-2x^2 + 14x + 18}{(x - 3)(2x^2 - x - 1)}$.
8. $\dfrac{2x^2 + x + 9}{x^3 - 2x^2 - 5x + 6}$.
9. $\dfrac{x^3 + 2x^2 - 1}{x^2 + x - 6}$.
10. $\dfrac{x^3 + 11x^2 + 37x + 31}{x^3 + 6x^2 + 5x - 12}$.
11. $\dfrac{3x - 1}{(x + 1)^2}$.
12. $\dfrac{x^2 + 3x - 2}{x^2(2x - 1)}$.
13. $\dfrac{9x^3 + 16x^2 + 3x - 10}{x^3(x + 5)}$.
14. $\dfrac{2x^3 + 7x^2 + 15x + 8}{x(x + 2)^3}$.
15. $\dfrac{3x^3 + 10x^2 - 5x}{(x - 1)^2(x + 1)^2}$.
16. $\dfrac{3x^3 + 4x^2 - 21x - 103}{(x - 3)(x^3 + 5x^2 - 8x - 48)}$.
17. $\dfrac{2x^3 + 3x^2 - 15x - 8}{(x + 2)(x^3 - 3x + 2)}$.
18. $\dfrac{4x^4 - 3x^2 + 6x - 3}{(x - 1)(x^2 - 1)^2}$.
19. $\dfrac{2x^4 - 4x^2 - x + 2}{(x^2 - x)^2}$.
20. $\dfrac{x^5 + 4x^4 - 15x^3 - 14x^2 + x + 24}{(x - 2)^2(x + 1)^3}$.

## 12.5. FACTORES CUADRATICOS DISTINTOS

Como ejemplo del tipo 3 del teorema del Art. 12.2, tenemos el siguiente:

**Ejemplo.** Descomponer $\dfrac{3x^3 - x^2 + 4x}{(x^2 + 1)(x^2 - x + 1)}$ en sus fracciones parciales simples.

SOLUCION. Ya que ambos factores del denominador de la fracción dada son irreducibles en el campo de los números reales, podemos escribir la siguiente identidad, de acuerdo con el teorema del Art. 12.2:

$$\frac{3x^3 - x^2 + 4x}{(x^2+1)(x^2-x+1)} \equiv \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{Cx+D}{x^2-x+1}. \tag{1}$$

Eliminando las fracciones de (1), obtenemos la identidad

$$3x^3 - x^2 + 4x \equiv (Ax+B)(x^2-x+1) + (Cx+D)(x^2+1). \tag{2}$$

Como antes, existen dos métodos para determinar las constantes $A$, $B$, $C$ y $D$.

METODO 1. En este método, en la identidad (2) sustituimos $x$ por cuatro valores sencillos diferentes. Esto nos da cuatro relaciones independientes que contienen las constantes. Así:

Para $x = 0$, $0 = B + D$.

Para $x = 1$, $6 = (A + B)(1) + (C + D)(2)$,

o sea $A + B + 2C + 2D = 6$.

Para $x = -1$, $-8 = (-A + B)(3) + (-C + D)(2)$,

o sea $3A - 3B + 2C - 2D = 8$.

Para $x = 2$, $24 - 4 + 8 = (2A + B)(3) + (2C + D)(5)$,

o sea $6A + 3B + 10C + 5D = 28$.

Se deja como ejercicio resolver este sistema y ver que la solución es $A = 1$, $B = -1$, $C = 2$, $D = 1$. Por tanto, la descomposición en fracciones parciales es

$$\frac{3x^3 - x^2 + 4x}{(x^2+1)(x^2-x+1)} \equiv \frac{x-1}{x^2+1} + \frac{2x+1}{x^2-x+1}.$$

METODO 2. Es el mismo que el Método 2 del artículo anterior. Efectuando operaciones en el segundo miembro de (2), tenemos

$$\begin{aligned} 3x^3 - x^2 + 4x \equiv{} & Ax^3 - (A-B)x^2 + (A-B)x \\ & + B + Cx^3 + Dx^2 + Cx + D, \end{aligned}$$

o sea

$$\begin{aligned} 3x^3 - x^2 + 4x \equiv{} & (A+C)x^3 - (A-B-D)x^2 \\ & + (A-B+C)x + B + D. \end{aligned}$$

Igualando los coeficientes de las potencias correspondientes de $x$, obtenemos el sistema

$$\begin{aligned} A + C &= 3, \\ A - B - D &= 1, \\ A - B + C &= 4, \\ B + D &= 0. \end{aligned}$$

cuya solución es $A = 1$, $B = —1$, $C = 2$, $D = 1$, que está de acuerdo con el resultado obtenido con el Método 1.

## 12.6. FACTORES CUADRATICOS REPETIDOS

Como un ejemplo del tipo 4 del teorema del Art. 12.2, tenemos el siguiente:

**Ejemplo.** Descomponer $\frac{4x^4 + 13x^2 — 4x + 14}{(x — 1)(x^2 + 2)^2}$ en sus fracciones parciales simples.

SOLUCION. De acuerdo con el teorema del Art. 12.2, podemos escribir la identidad

$$(1) \qquad \frac{4x^4 + 13x^2 — 4x + 14}{(x — 1)(x^2 + 2)^2} \equiv \frac{A}{x — 1} + \frac{Bx + C}{x^2 + 2} + \frac{Dx + E}{(x^2 + 2)^2}.$$

Quitando denominadores resulta

$$\begin{aligned}(2) \qquad 4x^4 + 13x^2 — 4x + 14 \equiv {} & A(x^2 + 2)^2 \\ & + (Bx + C)(x — 1)(x^2 + 2) \\ & + (Dx + E)(x — 1).\end{aligned}$$

Existen los mismos métodos del artículo anterior para la determinación de las constantes $A$, $B$, $C$, $D$ y $E$.

METODO 1. Ya hemos observado (Art. 12.3) que cuando aparece un factor lineal, es posible sustituir un valor particular de $x$ y determinar inmediatamente una constante. Así pues, sustituyendo $x = 1$ en la identidad (2), tenemos

$$27 = 9A, \text{ de donde } A = 3.$$

Para las constantes restantes sustituimos a $x$ por valores sencillos en la identidad (2). Así tenemos:

para $x = 0$, $A = 3$, $14 = 3(4) + C(—1)(2) + E(—1)$,

o sea $$2C + E = —2.$$

Para $x = —1$, $A = 3$,

$$35 = 3(3)^2 + (—B + C)(—2)(3) + (—D + E)(—2),$$

o sea $$6B — 6C + 2D — 2E = 8.$$

Para $x = 2$, $A = 3$,

$$64 + 52 — 8 + 14 = 3(6)^2 + (2B + C)(1)(6) + (2D + E)(1),$$

o sea $$12B + 6C + 2D + E = 14.$$

Para $x = -2$, $A = 3$,

$$64+52+8+14 = 3(6)^2+(-2B+C)(-3)(6)+(-2D+E)(-3),$$

o sea

$$36B - 18C + 6D - 3E = 30.$$

La solución de este sistema de cuatro ecuaciones es $B = 1$, $C = 1$, $D = 0$, $E = -4$. Por tanto, la descomposición en fracciones parciales es

$$\frac{4x^4 + 13x^2 - 4x + 14}{(x-1)(x^2+2)^2} \equiv \frac{3}{x-1} + \frac{x+1}{x^2+2} - \frac{4}{(x^2+2)^2}.$$

MÉTODO 2. Efectuando operaciones en el segundo miembro de (2), obtenemos

$$\begin{aligned} 4x^4 + 13x^2 - 4x + 14 \equiv{} & A(x^4 + 4x^2 + 4) + Bx^4 + (C - B)x^3 \\ & + (2B - C)x^2 + 2(C - B)x - 2C + Dx^2 \\ & + (E - D)x - E, \end{aligned}$$

o sea

$$\begin{aligned} 4x^4 + 13x^2 - 4x + 14 \equiv{} & (A + B)x^4 + (C - B)^3 \\ & + (4A + 2B - C + D)x^2 \\ & + (2C - 2B - D + E)x + 4A - 2C - E. \end{aligned}$$

Igualando los coeficientes de las potencias correspondientes de $x$, tenemos el sistema

$$\begin{aligned} A + B &= 4, \\ C - B &= 0, \\ 4A + 2B - C + D &= 13, \\ 2C - 2B - D + E &= -4, \\ 4A - 2C - E &= 14, \end{aligned}$$

cuya solución es $A = 3$, $B = 1$, $C = 1$, $D = 0$,$E = -4$, lo que concuerda con el resultado del Método 1.

## EJERCICIOS. GRUPO 46

En cada uno de los ejercicios 1-20 descomponer la fracción dada en sus fracciones parciales simples, y comprobar el resultado.

1. $\dfrac{3x^2 - 4x + 5}{(x-1)(x^2+1)}$.

2. $\dfrac{5x^2 + 8x + 5}{x^3 + 3x^2 + 3x + 2}$.

3. $\dfrac{2x^3 - 4x^2 + 4x - 4}{(x^2+1)(x^2+2)}$.

4. $\dfrac{3x^3 + x^2 + 2x - 2}{(x+1)(x^3+1)}$.

5. $\dfrac{2x^2 + x + 3}{x^4 + 5x^2 + 6}$.

6. $\dfrac{-10x^2 - 24x - 48}{(x+2)(x-3)(x^2+x+2)}$.

7. $\dfrac{4x^3 + 3x^2 + 18x - 5}{(x+1)(x^3+2x-3)}$.

8. $\dfrac{3x^3 - 9x^2 + 8x - 10}{(x-3)(x^3-2x^2-x-6)}$.

9. $\dfrac{2x^4 + 4x^3 + 4x^2 + x - 6}{x^4 + x^3 + 3x^2}$.

10. $\dfrac{x^5 + 7x^3 - x^2 + 9x - 12}{(x^2+3)(x^2+x+2)}$.

11. $\dfrac{x^3 + 2x^2 + 3x}{(x^2+x+1)^2}$.

12. $\dfrac{2x^5 + 4x^3 - 3x^2 + 3x - 1}{(x^3+1)^3}$.

13. $\dfrac{5x^5 - 13x^4 + 19x^3 - 22x^2 + 11x - 4}{(x^3 - x^2 + x)^2}.$
14. $\dfrac{7x^4 - 11x^3 + 12x^2 - 14x + 27}{(x - 3)^2(x^2 + 2)^2}.$
15. $\dfrac{2x^5 + 9x^3 + 3x^2 + 5x + 4}{x^6 + 2x^3 + 1}.$
16. $\dfrac{-4x^5 + 7x^4 - 4x^3 + 10x^2 + 7}{x^8 - 2x^4 + 1}.$
17. $\dfrac{5x^6 - 5x^5 + 6x^4 - 8x^3 + 5x^2 + 3x + 3}{(x - 1)(x^6 - 2x^3 + 1)}.$
18. $\dfrac{2x^7 - 7x^6 + 10x^5 - 16x^4 + 18x^3 - 16x^2 + 11x - 4}{(x^2 + 1)^2(x^2 - x + 1)^2}.$
19. $\dfrac{2x^9 + x^8 + 13x^7 + 10x^6 + 29x^5 + 24x^4 + 29x^3 + 18x^2 + 15x + 3}{(x^2 + 3)(x^2 + 1)^3}.$
20. $\dfrac{x^6 + 4x^5 + 11x^4 + 16x^3 + 21x^2 + 12x + 8}{(x^2 + 2)(x^2 + x + 2)^2}.$

# 13

# Permutaciones y combinaciones

## 13.1. INTRODUCCION

En este capítulo estudiaremos los diversos arreglos y selecciones que es posible hacer con los elementos de un conjunto dado. Mientras que por una parte esto conducirá a la solución de problemas que son interesantes por sí mismos, también veremos cómo los resultados que se obtengan se aplican para resolver muchos problemas prácticos. Por ejemplo, podremos averiguar cuántos números diferentes de teléfonos o placas diferentes de automóviles, se pueden formar utilizando un conjunto dado de letras y dígitos. Además, por estar relacionado con el estudio de las combinaciones, volveremos a ver los coeficientes del desarrollo del binomio y el triángulo de Pascal (Arts. 7.5 y 7.6). Finalmente, uno de los propósitos más importantes de este capítulo es el de estudiar ciertos temas indispensables para poder comprender y resolver los problemas de probabilidades que daremos en el capítulo siguiente.

## 13.2. TEOREMA FUNDAMENTAL

**Definición.** Cada uno de los diferentes arreglos que pueden hacerse con una parte de los elementos, o con todos los elementos, de un conjunto, se llama una *permutación*.*

Conviene observar que el *orden* es una característica de especial importancia en una permutación. Cuando variamos el orden de los elementos de una permutación, se dice que *permutamos* dichos elementos.

Por ejemplo, los diferentes arreglos o permutaciones que pueden hacerse con las tres letras *a, b, c,* tomándolas de dos en dos, son seis, a saber: *ab, ac, ba, bc, ca, cb.*

---

* Muchos autores distinguen entre permutación y variación. En una permutación entran *todos* los elementos del conjunto, mientras que si solamente entran una parte se les llama variación.

En el artículo siguiente deduciremos una fórmula que permite calcular el número de permutaciones que pueden hacerse con $n$ elementos tomados de $r$ en $r$. La demostración de dicha fórmula se basa en el siguiente teorema, conocido como el *teorema fundamental.*

**Teorema 1.** *(Teorema fundamental). Si una acción puede efectuarse de una de $p$ maneras diferentes, y si después de que esta acción ha sido efectuada de una de esas maneras, una segunda acción puede efectuarse de una de $q$ maneras diferentes, entonces el número total de maneras diferentes en que las dos acciones pueden efectuarse siguiendo el orden mencionado es $pq$.*

DEMOSTRACION. Para cada una de las $p$ maneras diferentes en que puede efectuarse la primera acción, corresponden $q$ maneras diferentes para efectuar la segunda acción, es decir, existen $q$ maneras diferentes de efectuar las dos acciones para *cada* manera de efectuar la primera acción. Por tanto, para las $p$ maneras en que puede efectuarse la primera acción, corresponden $pq$ maneras diferentes para efectuar las dos acciones.

**Corolario 1.** *Si una acción puede efectuarse de $p$ maneras diferentes, y una segunda acción puede efectuarse de $q$ maneras diferentes, y una tercera acción puede efectuarse de $r$ maneras diferentes, y así sucesivamente, entonces el número total de maneras diferentes en que pueden efectuarse todas estas acciones en el orden mencionado es $pqr \ldots$*

**Corolario 2.** *Si $x$ acciones pueden efectuarse sucesivamente de $p$ maneras diferentes cada una, entonces el número total de maneras diferentes en que pueden efectuarse las $x$ acciones sucesivamente es $p^x$.*

Como ejemplo del Teorema 1, consideremos el caso ya mencionado de obtener las seis permutaciones de las tres letras *a, b, c,* tomadas de dos en dos. Podemos considerar este problema como dos acciones sucesivas consistentes en llenar dos lugares o posiciones en orden. El primer lugar puede llenarse en tres formas diferentes usando cada una de las letras *a, b, c.* Después de que se ha llenado el primer lugar, quedan dos letras para el segundo lugar, el cual puede por tanto ser llenado en dos formas diferentes. En consecuencia, por el Teorema 1, ambos lugares pueden llenarse en $3 \times 2 = 6$ formas diferentes.

Como ya hemos dicho, en el siguiente artículo se deducirá una fórmula para calcular el número de permutaciones. Sin embargo, muchos problemas pueden resolverse sin recurrir a esa fórmula simplemente usando el Teorema y sus corolarios por medio de la consideración de las diversas acciones que deben efectuarse como lugares o posiciones que deben llenarse en orden. Veamos como se aplica este procedimiento por medio de algunos ejemplos.

**Ejemplo 1.** Existen cinco carreteras entre las ciudades $A$ y $B$, y cuatro carreteras entre las ciudades $B$ y $C$. Hallar el número de formas diferentes en que una persona puede viajar de $A$ a $C$ pasando por $B$.

SOLUCION. Primeramente trazamos dos líneas horizontales, —, —, para indicar los dos lugares que deben llenarse. El primer lugar puede llenarse de cinco formas distintas ya que la primera acción, que es viajar de $A$ a $B$, puede efectuarse en cinco formas distintas. Análogamente, el segundo lugar puede llenarse de cuatro formas distintas ya que la segunda acción, que es viajar de $B$ a $C$, puede efectuarse en cuatro formas distintas. Nuestros dos lugares aparecen ahora como sigue: $\underline{5}$, $\underline{4}$. Por tanto, por el Teorema 1, el número buscado de formas diferentes es $5 \times 4 = 20$.

**Ejemplo 2.** Hallar el número de enteros diferentes de tres cifras que pueden formarse con los dígitos 2, 3, 5, 7, en los casos siguientes: (a) no se permite la repetición; (b) se permite la repetición.

SOLUCION. (a) Consideremos, como en el Ejemplo 1, que tenemos tres lugares para ser llenados. El primer lugar puede llenarse de cuatro formas diferentes. Habiendo llenado el primer lugar, el segundo lugar puede llenarse de tres formas diferentes usando cada uno de los tres dígitos restantes. Habiendo llenado los dos primeros lugares, el tercer lugar puede llenarse de dos formas diferentes con cada uno de los dos dígitos restantes. Nuestros tres lugares aparecen ahora como sigue: $\underline{4}$, $\underline{3}$, $\underline{2}$. Por tanto, por el Teorema 1, el número pedido es el producto $4 \times 3 \times 2 = 24$.

(b) Si se permite la repetición, los tres lugares aparecen como sigue: $\underline{4}$, $\underline{4}$, $\underline{4}$, y el número pedido es el producto $4 \times 4 \times 4 = 64$.

**Ejemplo 3.** ¿Cuántos enteros son pares en el ejemplo 2(a)?

SOLUCION. Para los números pares, el tercer lugar (las unidades) debe llenarse con el dígito 2, y esto sólo puede hacerse en una sola forma. Considerando los tres dígitos restantes, el primer lugar (las centenas) puede llenarse de tres formas diferentes, y el segundo lugar (las decenas) puede llenarse de dos formas. Por tanto, por el Teorema 1, el número total de enteros pares es $3 \times 2 \times 1 = 6$.

## EJERCICIOS. GRUPO 47

1. Demostrar el Corolario 1 del Teorema 1 (Art. 13.2).
2. Demostrar el Corolario 2 del Teorema 1 (Art. 13.2).

3. Resolver el Ejemplo 3 (Art. 13.2) si se permite la repetición.

4. Un edificio tiene 6 puertas. ¿En cuántas formas diferentes puede una persona entrar al edificio saliendo por una puerta diferente de la que usó al entrar?

5. Hallar el número de arreglos diferentes que pueden formarse con las 4 letras $a$, $b$, $c$, $d$, tomándolas de 3 en 3.

6. Un club tiene 12 miembros y se va a elegir un presidente, un vicepresidente, un secretario y un tesorero. ¿Cuántas candidaturas diferentes pueden formarse si cualquier miembro del club es elegible para cualquier cargo?

7. Resolver el ejercicio 6 si solamente dos miembros determinados son elegibles para presidente pero también son elegibles para los demás cargos.

8. Resolver el ejercicio 6 si solamente dos miembros determinados son elegibles para presidente pero no son elegibles para otros cargos.

9. Hallar cuántos números enteros diferentes de dos cifras se pueden formar con los dígitos 1, 2, 4, 7, 8, si (a) no se permite la repetición; (b) se permite la repetición.

10. En el ejercicio 9 hallar el número de enteros pares e impares que pueden formarse si (a) se permite la repetición; (b) no se permite la repetición.

11. Se forman señales colocando banderas de diferentes colores una sobre otra en un asta. Si se tienen 5 banderas diferentes, hallar el número de señales que pueden formarse (a) 3 de las banderas; (b) 4 de las banderas; (c) todas las banderas.

12. En el ejercicio 11, obtener el número total de señales que pueden formarse usando una o más de las 5 banderas.

13. Al tirar una moneda llamaremos a las dos diferentes formas en que puede caer, cara y sello. Encuentre el número de diferentes formas en que pueden caer los siguientes números de monedas: (a) 2 monedas; (b) 3 monedas; (c) $n$ monedas.

14. Las caras de un dado están numeradas del 1 al 6 y, por tanto, cuando se tira puede obtenerse uno cualquiera de los seis diferentes resultados. Hallar el número de resultados diferentes que pueden obtenerse cuando se tiran los siguientes números de dados: (a) 2 dados; (b) 3 dados; (c) $n$ dados.

15. Si cada uno de $n$ dados tiene $f$ caras numeradas de 1 a $f$, encontrar el número de formas posibles que pueden aparecer al ser tirados.

16. Hallar el número de palabras de cuatro letras (no necesariamente pronunciables) que pueden formarse con diez letras diferentes del alfabeto si (a) no se permite la repetición; (b) se permite la repetición.

17. Obtener el número de palabras de cuatro letras que pueden formarse con 7 consonantes diferentes y 3 vocales diferentes si las consonantes y vocales deben ir alternadas y no se permite la repetición.

18. Resolver el ejercicio 17 si se permite la repetición.

19. En un cierto Estado las placas de automóviles constan de 5 lugares, los 2 primeros se llenan con cualesquiera de las 26 letras del alfabeto y los 3 últimos se llenan con cualesquiera de los 10 dígitos del 0 al 9 inclusive, con la excepción de que el cero no puede usarse en el tercer lugar. Calcular el número total de placas diferentes que pueden formarse si no se permite la repetición ni de letras ni de dígitos.

20. Resolver el ejercicio 19 si se permite la repetición tanto de letras como de dígitos.

21. Se tienen números telefónicos que constan de 7 lugares cada uno. Los pri-

meros, 2 lugares se llenan con dos cualesquiera de 24 de las letras del alfabeto y los últimos 5 lugares se llenan con cualesquiera de los 10 dígitos del 0 al 9 inclusive, con la excepción de que el cero no puede usarse ni en el tercero ni en el cuarto lugar. Calcular el total de números diferentes que pueden formarse si no se permite la repetición ni de letras ni de dígitos.

22. Resolver el ejercicio 21 si solamente se permite la repetición de dígitos.

23. ¿De cuántas maneras diferentes pueden sentarse 5 personas en una fila de 8 sillas?

24. Resolver el ejercicio 23 si las 5 personas deben sentarse en sillas consecutivas.

25. Determinar cuántos números enteros y positivos menores de 5000 pueden formarse con los 8 dígitos, del 0 al 7 inclusive, si no se permite la repetición.

## 13.3. NUMERO DE PERMUTACIONES

Se usan varios símbolos para representar el número de permutaciones de $n$ objetos diferentes tomados de $r$ en $r$. Aquí usaremos el símbolo $P(n,r)$, el cual resulta muy apropiado ya que el número de permutaciones es una función de $n$ y de $r$.

**Teorema 2.** *El número de permutaciones de n objetos diferentes tomados de r en r está dado por la fórmula*

$$(1) \qquad P(n,r) = n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1),\ r \leq n.$$

DEMOSTRACION. El valor de $P(n,r)$ es igual al número total de formas en que pueden llenarse $r$ lugares con $n$ objetos diferentes. El primer lugar puede llenarse de $n$ formas diferentes, ya que en este punto todos los $n$ objetos están disponibles. El segundo lugar puede llenarse de $n-1$ formas diferentes con los $n-1$ objetos restantes. Análogamente, el tercer lugar puede llenarse de $n-2$ formas diferentes, y así sucesivamente. Continuando este proceso, finalmente vemos que el lugar $r$ puede llenarse de $n-(r-1) = n-r+1$ formas diferentes. Entonces, por el teorema fundamental (Teorema 1, Art. 13.2) el número total de formas está dado por la fórmula (1).

**Corolario.** *El número total de permutaciones de n objetos diferentes tomados de n en n está dada por*

$$P(n,n) = n(n-1)(n-2)\ldots 1 = n! \text{ (Art. 7.4)}$$

**Ejemplo 1.** ¿Cuántas diferentes quintas de basket ball pueden formarse si hay 7 jugadores disponibles para jugar cualquier posición?

SOLUCION. Por supuesto este problema puede resolverse aplicando el teorema fundamental dado en el Art. 13.2. Sin embargo, también podemos considerar que el resultado es igual al número de permutaciones de 7 objetos tomados de 5 en 5, el cual, por el Teorema 2, es

$$P(7,5) = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 2520.$$

Consideremos ahora el caso de la determinación del número de permutaciones de $n$ objetos que no son todos diferentes. Por ejemplo, determinemos el número $P$ de permutaciones de las cinco letras $a, a, a, b, c,$ tomadas de 5 en 5. Cada una de estas $P$ permutaciones contiene las tres letras idénticas $a, a, a$. Si estas tres letras fueran diferentes entre sí y diferentes de las letras restantes $b, c,$ entonces podrían permutarse entre ellas mismas en $3!$ formas diferentes por cada una de las $P$ permutaciones, y las cinco letras diferentes podrían entonces permutarse en $5!$ formas. Por tanto $P \cdot 3! = 5!$, de donde $\mathrm{P} = \dfrac{5!}{3!} = 20.$

El caso general está dado por el teorema siguiente:

**Teorema 3.** *Si $P$ representa el número de permutaciones distintas de $n$ elementos tomados de $n$ en $n$, en donde hay un primer tipo de $p$ objetos iguales entre sí, $q$ objetos iguales entre sí de un segundo tipo, $r$ objetos iguales entre sí de un tercer tipo, y así sucesivamente, entonces.*

$$P = \frac{n!}{p!q!r!\ldots}. \tag{2}$$

DEMOSTRACION. Si sustituimos los $p$ primeros objetos iguales por $p$ objetos diferentes entre sí y diferentes de los objetos restantes, entonces de cada una de las $P$ permutaciones obtenidas podemos obtener $p!$ permutaciones diferentes permutando los $p$ nuevos objetos entre ellos mismos. Por tanto, de las $P$ permutaciones originales obtenemos $P \cdot p!$ permutaciones conteniendo cada una $q$ objetos iguales entre sí, $r$ objetos iguales entre sí, etc. Análogamente, sustituyendo los $q$ objetos iguales por $q$ objetos diferentes, obtenemos $P \cdot p!q!$ permutaciones, conteniendo cada una $r$ objetos iguales entre sí, etc. Continuando este proceso finalmente obtenemos $P \cdot p!q!r!\ldots$ permutaciones, cada una de ellas formada con $n$ objetos diferentes. Por otra parte, por el corolario del Teorema 2, el número de tales permutaciones es $n!$. Por tanto, $P \cdot p!q!r!\ldots = n!$, de donde resulta la fórmula (2).

**Ejemplo 2.** Calcular el número de permutaciones diferentes que pueden formarse con las letras de la palabra *acacias*, tomadas todas a la vez.

SOLUCION. La palabra contiene 7 letras, de las cuales 3 son $a$, 2 son $c$, y el resto diferentes. Por tanto, por el Teorema 3 el número de permutaciones diferentes es $\dfrac{7!}{3!2!} = \dfrac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{3 \cdot 2 \cdot 2} = 420.$

Ahora consideraremos el número de arreglos de $n$ objetos diferentes alrededor de un círculo. Cada uno de tales arreglos se llama una *permutación circular o cíclica.* Primeramente consideremos a los $n$ objetos distintos ordenados en línea recta y designemos a uno de ellos con $A$, aquí tenemos arreglos diferentes según que $A$ esté al principio o al final de la línea, conservando en cada caso su posición los $n - 1$ objetos restantes. Sin embargo, esto no es así en una permutación circular, pues entonces la posición de $A$ puede considerarse fija y los $n - 1$ objetos restantes pueden arreglarse en $(n - 1)!$ formas diferentes con respecto a $A$. De aquí el teorema siguiente:

**Teorema 4.** *El número de permutaciones circulares de n objetos diferentes es igual a* $(n - 1)!$

**Ejemplo 3.** Un grupo formado por 3 muchachas y 3 muchachos van a sentarse de modo que ellas queden alternadas con ellos. Calcular de cuántas formas pueden hacerlo si (a) se sientan en línea recta; (b) se sientan alrededor de una mesa circular.

SOLUCION. (a) Podemos considerar que las muchachas se sientan en los lugares con número impar y los muchachos en los lugares con número par; esto puede hacerse en $3!\ 3!$ formas diferentes. Un número igual de arreglos diferentes puede obtenerse sentando a los muchachos en los lugares con número impar y a las muchachas en los lugares con número par. Por tanto el número total de formas diferentes es igual a $2 \cdot 3!3! = 72$.

(b) Podemos sentar primeramente a las muchachas alrededor de la mesa en $2!$ formas de acuerdo con el Teorema 4. Entonces quedan 3 lugares alternados para sentar a los tres muchachos; esto puede hacerse en $3!$ formas. Por tanto, el número total de formas diferentes es igual a $2!3! = 12$.

## EJERCICIOS. GRUPO 48

1. Demostrar el corolario del Teorema 2 (Art. 13.3).
2. Demostrar que $P(n, r) = \dfrac{n!}{(n - r)!}, r \leq n$.
3. Si se permite la repetición, demostrar que el número de permutaciones de $n$ objetos diferentes tomados de $r$ en $r$ es igual a $n^r$.
4. Calcular (a) $P(8, 2)$; (b) $P(9, 3)$.
5. Calcular (a) $P(10, 4)$; (b) $P(7, 4) \div P(5, 4)$.
6. Si $P(n, 4) = 6P(n, 2)$, hallar $n$.
7. Si $P(n, 5) = 42P(n, 3)$, hallar $n$.
8. Si $P(n, 5) = 24P(n, 2)$, hallar $n$.
9. Si $2P(6, r) = 3P(5, r)$, hallar $r$.
10. Si $12P(7, r) = 5P(9, r)$, hallar $r$.

11. Hay ocho jugadores disponibles para formar una quinta de basket ball. Si 2 jugadores determinados pueden solamente jugar como centro y los 6 restantes pueden jugar en cualquier puesto excepto como centro, calcular el número de equipos diferentes que pueden formarse.

12. Resolver el ejercicio 11 si los 2 jugadores mencionados pueden ocupar cualquier puesto.

13. Hallar el número de novenas de beisbol distintas que pueden formarse con 15 jugadores disponibles si 3 de ellos sólo juegan como lanzadores, 2 solo como receptores, 6 juegan solamente en el cuadro y 4 solamente como jardineros.

14. Calcular el número de permutaciones diferentes que pueden formarse con las letras de la palabra *Alaska,* tomadas todas a la vez.

15. Se forman señales con 8 banderas de colores colocadas una sobre otra en un asta. Calcular el número de señales diferentes que pueden formarse con las 8 banderas si 3 son rojas, 2 blancas y el resto azules.

16. Resolver el ejercicio 15 si la bandera superior debe ser roja.

17. Se tienen 6 ejemplares de un libro y 5 de otro libro. Hallar el número total de formas diferentes en que pueden arreglarse todos estos libros en un estante.

18. ¿En cuántas formas diferentes pueden distribuirse entre 12 niños 3 monedas de cinco centavos, 4 de diez y 5 de veinte, si cada uno debe recibir una moneda?

19. Hay $m$ objetos idénticos de una primera clase y $n$ objetos idénticos de una segunda clase. Hallar el número de permutaciones diferentes que pueden formarse de manera que cada una contenga $p$ objetos de la primera clase y $q$ objetos de la segunda clase.

20. Se tienen $m$ ejemplares de cada uno de $n$ libros distintos. Hallar el número de maneras en que pueden arreglarrse en un estante.

21. Calcular cuántos números enteros y positivos pueden formarse con los dígitos 1, 2, 3, 4, 5, si no se permite la repetición, y demostrar que la razón del número de impares al número de pares es 3:2.

22. Hallar cuántos números enteros de tres cifras pueden formarse con los 9 dígitos 1, 2, . . . , 9 si

(a) los tres dígitos usados son diferentes.

(b) los tres dígitos usados no son necesariamente diferentes.

(c) los enteros formados deben ser pares permitiéndose la repetición de dígitos.

23. ¿En cuántas formas pueden ordenarse en un estante 6 libros diferentes si 2 libros determinados deben estar contiguos?

24. Resolver el ejercicio 23 si 3 libros determinados deben estar contiguos.

25. Hallar el número de formas diferentes en que pueden sentarse 4 hombres y 3 mujeres en una fila de 7 sillas si las mujeres deben estar contiguas.

26. Resolver el ejercicio 25 si se usan 8 sillas.

27. ¿En cuántas formas diferentes pueden ordenarse en un estante 5 textos diferentes de álgebra y 4 textos diferentes de cálculo de modo que los libros de cada materia estén contiguos?

28. ¿En cuántas formas diferentes pueden formarse 8 niños alrededor en un círculo?

29. ¿En cuántas formas diferentes pueden disponerse 8 cuentas de colores para formar un collar?

30. Un grupo de 5 niñas y 5 niños se va a sentar alternándose ellas con ellos.

Calcular el número de formas en que esto puede hacerse si (a) las sillas están en línea recta; (b) las sillas están alrededor de una mesa circular.

31. Seis hombres, incluyendo a $A$ y a $B$, van a tomar la palabra en una reunión. ¿En cuántos órdenes diferentes pueden hablar?

32. Resolver el ejercicio 31 si $A$ debe hablar primero que $B$.

33. Siete personas van a sentarse en una fila. Hallar el número de formas diferentes en que esto puede hacerse si

(a) no hay restricciones.
(b) dos personas determinadas deben quedar contiguas.

34. Resolver el ejercicio 33 si 2 personas determinadas no deben quedar contiguas.

35. Resolver el ejercicio 33 si las 7 personas van a sentarse en círculo.

## 13.4. COMBINACIONES

**Definición.** Cada uno de los diferentes grupos que pueden formarse tomando todos o parte de los elementos de un conjunto, sin considerar el orden de los elementos tomados, se llama una *combinación.*

Debe observarse que, a diferencia de las permutaciones, en una combinación no se tiene en cuenta el orden. Así, mientras que *ab* y *ba* son dos permutaciones distintas, representan una sola combinación, a saber, el grupo formado por las dos letras $a$ y $b$.

Como en el caso de las permutaciones, tenemos un símbolo apropiado para representar el número de combinaciones de $n$ elementos tomados de $r$ en $r$. Este símbolo es $C(n, r)$; y, por supuesto, representa una función de $n$ y $r$.

**Teorema 5.** *El número de combinaciones de n objetos diferentes tomados de r en r está dado por la fórmula*

$$(1) \qquad C(n,r) = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)}{r!}, \quad r \leq n.$$

DEMOSTRACION. De cada combinación de $r$ elementos diferentes podemos formar $r!$ permutaciones (Corolario, Teorema 2, Art. 13.3). Por tanto, de todas las combinaciones podemos formar un total de $C(n,r)\cdot r!$ permutaciones que pueden igualarse a $P(n,r)$, o sea, al número de permutaciones de $n$ elementos diferentes tomados de $r$ en $r$. Por tanto

$$C(n,r)\cdot r! = P(n,r),$$

de donde

$$C(n,r) = \frac{P(n,r)}{r!},$$

lo cual, por el Teorema 2 (Art. 13.3), puede escribirse en la forma

$$C(n,r) = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)}{r!},$$

con lo que queda demostrada la fórmula (1).

Es conveniente notar que en esta última relación tanto el numerador como el denominador constan de $r$ factores.

**Corolario 1.** *El número de combinaciones de n elementos diferentes tomados todos a la vez es la unidad, es decir,* $C(n, n) = 1$.

Ahora vamos a obtener otra forma de la relación (1) que a veces resulta más conveniente. Para esto multiplicamos el numerador y el denominador del segundo miembro por $(n - r)!$, obteniendo

$$C(n, r) = \frac{n(n-1)\ .\ \ .\,(n-r+1)\,(n-r)!}{r!(n-r)!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}.$$

Este resultado, de mucha importancia, lo enunciamos así:

**Corolario 2.** *El número de combinaciones de n elementos diferentes tomados de r en r puede también obtenerse por la fórmula*

$$(2) \qquad C(n, r) = \frac{n!}{r!(n-r)!}, \quad r \leq n.$$

Otro resultado importante puede obtenerse si sustituimos $r$ por $n - r$ en la relación (2). Es decir,

$$C(n, n-r) = \frac{n!}{(n-r)!r!},$$

de donde, por la relación (2) obtenemos

$$(3) \qquad C(n, r) = C(n, n-r),$$

resultado que puede enunciarse así:

**Corolario 3.** *El número de combinaciones de n elementos diferentes tomados de r en r es igual al número de combinaciones de n elementos diferentes tomados de n — r en n — r.*

NOTA. El resultado del Corolario 3 podría haberse previsto ya que por cada combinación de $r$ objetos seleccionados entre $n$ objetos diferentes existe un grupo o combinación correspondiente de $n - r$ objetos que no son seleccionados. Tales combinaciones se llaman *complementarias.*

Por ejemplo, si seleccionamos un comité de tres personas entre nueve personas, queda sin seleccionar un conjunto de seis personas (combinación complementaria).

**Ejemplo 1.** Calcular el número de palabras (no necesariamente pronunciables) que pueden formarse seleccionando 6 consonantes y 2 vocales entre 10 consonantes diferentes y 4 vocales diferentes.

SOLUCION. Primeramente seleccionamos 6 consonantes entre 10 consonantes en $C(10, 6)$ formas. Por la relación (2), tenemos

$$C(10,6) = \frac{10!}{6!4!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 210.$$

Análogamente, podemos seleccionar 2 vocales entre 4 vocales de

$$C(4,2) = \frac{4!}{2!2!} = \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} = 6 \text{ formas.}$$

Entonces por cada una de las 210 formas para seleccionar las consonantes, tenemos 6 formas para seleccionar las vocales. Por tanto, por el teorema fundamental (Teorema 1, Art. 13.2), las ocho letras de cada palabra pueden seleccionarse de $210 \times 6 = 1260$ formas. Después de efectuar cada una de estas selecciones, las ocho letras pueden permutarse en $8!$ formas diferentes. Por tanto, el número total de palabras que puede formarse es $1260 \times 8! = 50803200$.

**Ejemplo 2.** Se va a escoger un comité de 5 alumnos entre 7 alumnos de último año y 6 de penúltimo año. Calcular el número de tales comités, si deben contener (a) exactamente 3 alumnos de último año; (b) por lo menos 3 alumnos de último año.

SOLUCION.

(a) En este caso debe haber exactamente 2 alumnos de penúltimo año. Los alumnos de último año pueden seleccionarse de $C(7,3) = \frac{7!}{3!4!} = 35$ formas y los de penúltimo año en $C(6,2) = \frac{6!}{2!4!} = 15$ formas. Por tanto, por el teorema fundamental, el número total de comités de 5 miembros es $35 \times 15 = 525$.

(b) En este caso tenemos tres tipos de comités: (1) tres alumnos de último año y 2 de penúltimo; (2) cuatro de último año y 1 de penúltimo; (3) cinco de último año. El número de comités para cada uno de los tres casos es entonces:

(1) 525.

(2) $C(7,4) \cdot C(6,1) = \frac{7!}{4!3!} \cdot 6 = 210.$

(3) $C(7,5) = \frac{7!}{5!2!} = 21.$

Sumando, el número total de comités es $525 + 210 + 21 = 756$.

**Ejemplo 3.** Se tienen doce puntos coplanares no situados tres de ellos en línea recta. (a) Encontrar el número de triángulos diferentes que pueden formarse usando estos puntos como vértice. (b) Encontrar cuántos de estos triángulos tienen a un punto determinado como vértice.

SOLUCION.

(a) Ya que cada triángulo tiene tres vértices, podemos formar tantos triángulos como número de maneras en que se pueden seleccionar 3 puntos entre 12 puntos. Este número es $C(12, 3) = \frac{12!}{3!9!} = 220$.

(b) Para que un punto determinado sea vértice de cada triángulo, separamos este punto y seleccionamos los otros dos puntos entre los 11 puntos restantes de $C(11,2) = \frac{11!}{2!9!} = 55$ maneras diferentes. Por tanto, hay 55 triángulos que tienen un punto determinado como vértice.

**EJERCICIOS. GRUPO 49**

1. Demostrar el Corolario 1 del Teorema 5 (Art. 13.4).
2. Demostrar que $C(n, n) = C(n, 0) = 1$.
3. Calcular (a) $C(8, 4)$; (b) $C(7, 2)$.
4. Calcular (a) $C(10, 8)$; (b) $C(18, 3)$.
5. Hallar $n$ si $C(n, 2) = 28$.
6. Hallar $n$ si $C(n, 3) = 35$.
7. Hallar $n$ si $2C(n, 5 = 3C(n, 3)$.
8. Hallar $n$ si $C(n, 5) = 2C(n, 2)$.
9. Hallar $r$ si $2C(6, r) = 3C(5, r)$.
10. Hallar $n$ y $r$ si $P(n, r) = 120$ y $C(n, r) = 20$.
11. Comprobar que $C(7, 3) = C(6, 3) + C(6, 2)$.
12. Comprobar que $C(8, 5) — C(7, 5) = C(7, 4)$.
13. Hallar el número de comités de 4 miembros que pueden seleccionarse de un conjunto de 15 personas.
14. En el ejercicio 13, calcular el número de comités que incluyen a una persona determinada.
15. En el ejercicio 13, hallar el número de comités que no incluyen a una persona determinada.
16. Se tienen doce puntos coplanares de manera que tres de ellos no son colineales. Calcular el número de rectas que pueden trazarse por estos puntos.
17. En el ejercicio 16, hallar el número de rectas que pasan por un punto determinado de los doce puntos dados.
18. Calcular el número de diagonales de un polígono convexo de 8 lados.
19. Hallar el número de "palabras", que contienen dos consonantes y dos vocales, que pueden formarse con 5 consonantes y 3 vocales.
20. Resolver el ejercicio 19 si las consonantes y vocales deben ir alternadas.
21. En un estante hay 12 libros diferentes. (a) Calcular el número de selecciones de 8 libros diferentes que pueden hacerse. (b) Determinar el número de estas selecciones que incluyen a un libro determinado. (c) Hallar el número de estas selecciones que incluyen a 2 libros determinados.
22. Se tienen 15 puntos en el espacio de manera que 4 de ellos no están en

un mismo plano. (a) Encontrar el número de planos determinados por estos puntos. (b) Calcular el número de estos planos que contienen a un punto determinado. (c) Hallar el número de estos planos que contienen a dos puntos determinados.

23. Encontrar el número de comités formados por 4 estudiantes de segundo año y 2 de primer año que pueden seleccionarse entre 8 estudiantes de segundo año y 10 de primer año.

24. Se va a seleccionar un comité de 5 miembros entre 6 hombres y 9 mujeres. Calcular el número de tales comités que contengan por lo menos 2 mujeres.

25. Resolver el ejercicio 24 si los comités no deben contener más de 2 mujeres.

26. Una bolsa contiene 3 bolas blancas y 5 bolas negras. Calcular el número de maneras en que se pueden seleccionar 3 bolas de modo que: (a) exactamente dos sean blancas; (b) por lo menos dos sean blancas; (c) no más de dos sean blancas.

27. Una bolsa contiene 4 bolas blancas, 2 negras y 3 rojas. Calcular el número de formas en que se pueden seleccionar 5 bolas de modo que 2 sean blancas, 1 sea negra y 2 sean rojas.

28. Resolver el ejercicio 27 de modo que en cada selección de 5 bolas, por lo menos 3 sean blancas.

29. ¿En cuántas formas puede escogerse un comité de 6 personas entre 12 personas si dos personas determinadas no pueden aparecer en el mismo comité?

30. Una compañía de 25 soldados destaca cada noche una guardia de 3 hombres. Calcular (a) el número de noches en que puede tenerse una guardia diferente y (b) el número de noches que cada hombre estará en servicio.

## 13.5. DIVISION EN SUBCONJUNTOS

Por el Corolario 3 del Teorema 5 (Art. 13.4), el número de combinaciones de $n$ objetos diferentes tomados de $r$ en $r$ es igual al número de combinaciones de $n$ objetos diferentes tomados de $n-r$ en $n-r$. Entonces observamos que para cada combinación de $r$ objetos, existe una combinación complementaria de $n-r$ objetos. Es decir, el número de maneras en que $n$ objetos diferentes pueden dividirse en dos subconjuntos, uno con $r$ elementos y el otro con $n-r$ elementos, está dado por la fórmula (2) del Art. 13.4, a saber:

$$C(n,r)=\frac{n!}{r!(n-r)!}. \tag{1}$$

Ahora extenderemos esta división a cualquier número de subconjuntos. Por comodidad empezaremos por considerar la división de $p+q$ elementos diferentes en dos subconjuntos, uno de $p$ elementos y el otro de $q$ elementos, en donde $p\neq q$. Por la relación (1), el número de maneras distintas, $N_2$, en que esto puede hacerse es

$$N_2=\frac{(p+q)!}{p!q!}. \tag{2}$$

Ahora consideraremos la división de $p + q + r$ elementos diferentes en tres subconjuntos de $p$, $q$ y $r$ elementos respectivamente, en donde $p$, $q$ y $r$ son números enteros y positivos diferentes entre sí. Primeramente dividimos los $p + q + r$ elementos en dos grupos, uno con $p$ elementos y el otro con $q + r$ elementos; por la fórmula (1) esto puede hacerse de $\frac{(p+q+r)!}{p!(q+r)!}$ maneras distintas. Análogamente, cada grupo de $q + r$ elementos puede dividirse en dos subconjuntos, uno de $q$ elementos y el otro de $r$ elementos, en $\frac{(q+r)!}{q!r!}$ maneras diferentes. Entonces, por el teorema fundamental (Art. 13.2), el número total de maneras distintas para dividir en tres subconjuntos es

$$(3) \qquad N_3 = \frac{(p+q+r)!}{p!(q+r)!} \cdot \frac{(q+r)!}{q!r!} = \frac{(p+q+r)!}{p!q!r!}.$$

En una forma análoga los resultados dados por las fórmulas (2) y (3) pueden extenderse a cualquier número de subconjuntos. Enunciamos el resultado general en el teorema siguiente:

**Teorema 6.** *Si $p, q, r, \ldots, t$ son $m$ números enteros y positivos diferentes entre sí, el número de maneras distintas en que se pueden dividir $p + q + r + \ldots + t$ elementos diferentes en $m$ subconjuntos de $p$, $q$, $r, \ldots, t$ elementos respectivamente, es*

$$N_m = \frac{(p+q+r+\ldots+t)!}{p!q!r!\ldots t!}$$

**Ejemplo 1.** Calcular el número de maneras distintas en que 15 libros diferentes pueden dividirse en tres grupos de 9, 4 y 2 libros respectivamente.

SOLUCION. Por el Teorema 6, este número es

$$\frac{15!}{9!4!2!} = 75075.$$

Hasta ahora hemos considerado solamente la división en grupos de subconjuntos *desiguales*. Si la división se hace en grupos *iguales*, es necesario modificar el Teorema 6. Supongamos, por ejemplo, que deseamos dividir cuatro elementos diferentes en dos grupos iguales, cada uno con 2 elementos. Si usamos el Teorema 6, el número de maneras es $\frac{4!}{2!2!} = 6$. Sin embargo, esto incluye los dos grupos permutados entre si en 2! maneras. Consideremos, por ejemplo, el caso de dividir 4 cartas marcadas con 1, 2, 3, 4 en dos grupos de 2 cartas cada uno. Así obtenemos

| Grupo 1 | Grupo 2 | |
|---|---|---|
| 1, 2 | 3, 4 | (1) |
| 1, 3 | 2, 4 | (2) |
| 1, 4 | 2, 3 | (3) |
| 2, 3 | 1, 4 | (3) |
| 2, 4 | 1, 3 | (2) |
| 3, 4 | 1, 2 | (1) |

Nótese que las divisiones idénticas, con diferente orden, aparecen designadas con el mismo número a la derecha. Por tanto, si consideramos el orden en que se forman los grupos, nuestro resultado se obtiene por medio del Teorema 6; pero, si no se toma en cuenta el orden de los grupos, debemos dividir el resultado obtenido aplicando el Teorema 6 entre $2!$, es decir, el número de maneras será $6/2! = 3$.

El razonamiento anterior puede usarse para el caso general de la división en cualquier número de grupos iguales. Por el Teorema 6, si hacemos $p = q = r = \ldots = t = n$, obtenemos el número de maneras para dividir $mn$ objetos diferentes en $m$ grupos de $n$ objetos cada uno, tomando en cuenta el orden en que se forman los grupos. Si el orden en que se forman estos grupos no se toma en cuenta, el resultado debe dividirse entre $m!$. Resumimos estos resultados como el teorema siguiente:

**Teorema 7.** *El número de maneras en que mn objetos diferentes pueden dividirse en m grupos de n objetos cada uno, en donde el orden de los objetos en cada grupo no se toma en consideración, es*

$\dfrac{(mn)!}{(n!)^m}$, *considerando el orden en que se forman los grupos;*

$\dfrac{(mn)!}{(n!)^m m!}$, *sin considerar el orden en que se forman los grupos.*

**Ejemplo 2.** Se tiene una baraja de 52 cartas diferentes. Encontrar (a) el número de maneras en que pueden repartirse las cuatro manos de 13 cartas a cuatro jugadores de bridge; (b) el número de maneras en que las 52 cartas pueden dividirse en cuatro grupos de 13 cartas cada uno.

SOLUCION.

(a) En un juego de bridge cada distribución diferente de las manos entre los jugadores constituye una división diferente. Por tanto, en este caso, los grupos aparecen permutados, y por la primera parte del Teorema 7 el número de maneras es $\dfrac{52!}{(13!)^4}$.

(b) En este caso, no importa el orden de los grupos, y por la segunda parte del Teorema 7 el número de maneras es $\frac{52!}{(13!)^4 4!}$.

## 13.6. NOTACION PARA SUMAS

Como preparación para el artículo siguiente es conveniente introducir ahora una notación con la que es posible representar la suma de una sucesión de términos en una forma muy breve. Por ejemplo, la suma de $n$ términos tales como $u_1 + u_2 + \ldots + u_n$ puede representarse con la notación $\sum_{i=1}^{n} u_i$, en donde el símbolo $\Sigma$ es la letra sigma mayúscula del alfabeto griego que es llamada aquí *signo de suma,* mientras que la letra $i$, llamada *índice de la suma,* toma sucesivamente todos los valores enteros positivos de 1 a $n$ inclusive. El símbolo $\sum_{i=1}^{n} u_i$ se lee "suma de de $u_i$ de $i = n$".

De acuerdo con esta notación, podemos escribir la suma de términos de una progresión aritmética (Art. 10.2) en la forma

$$\sum_{k=1}^{n} [a_1 + (k-1)d] = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \ldots + (a_1 + [n-1]d),$$

en donde cada término del segundo miembro se obtiene sustituyendo $k$ por $1, 2, 3, \ldots, n$ sucesivamente en la expresión $a_1 + (k-1)d$.

Nótese que la literal usada como índice puede cambiarse sin alterar la suma.

Análogamente, un polinomio de grado $n$ puede representarse con esta notación en la forma

$$\sum_{k=0}^{n} a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n.$$

## 13.7. COEFICIENTES DEL DESARROLLO DE LA POTENCIA DE UN BINOMIO

En el Art. 7.6, relación (2), se hizo ver que el término de orden $r + 1$ del desarrollo de $(a + b)^n$ está dado por

$$(1) \qquad \text{Término de orden } (r+1) = \frac{n(n-1)\ldots(n-r+1)}{r!} a^{n-r} b^r.$$

Por otro lado, por el Teorema 5 (Art. 13.4),

$$C(n, r) = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)}{r!}, \quad r \leq n,$$

de modo que (1) puede escribirse en la forma

$$\text{(2)} \qquad \text{Término de orden } r+1 = C(n, r)a^{n-r}b^{r}.$$

Por tanto, usando la notación $\Sigma$ del Art. 13.6, tenemos:

**Teorema 8.** *El desarrollo completo de la potencia de un binomio puede escribirse en la forma*

$$\text{(3)} \qquad (a+b)^n = \sum_{r=0}^{n} C(n, r)a^{n-r}b^r.$$

El Teorema 8 puede comprobarse fácilmente desarrollando los términos del segundo miembro de (3), recordando que $C(n, 0) = C(n, n) = 1$ y que $0! = 1$ (Art. 7.4). Al calcular los coeficientes, obtenemos precisamente el Teorema del binomio tal como aparece en la fórmula (3) del Art. 7.4. Si en la fórmula (3) hacemos $a = b = 1$, y desarrollamos el segundo miembro, obtenemos

$$(1+1)^n = C(n, 0) + C(n, 1) + C(n, 2) + \dots + C(n, n).$$

Transponiendo $C(n, 0) = 1$, resulta

$$\text{(4)} \qquad C(n, 1) + C(n, 2) + \dots + C(n, n) = 2^n - 1.$$

La relación (4) nos dice:

**Teorema 9.** *El número total de combinaciones de n objetos diferentes tomados de* 1 *en* 1, 2 *en* 2, *y así sucesivamente hasta n en n, es igual a* $2^n - 1$.

**Ejemplo 1.** Determinar cuantas sumas de dinero diferentes se pueden formar con 6 monedas, cada una con la siguiente denominación: un centavo, cinco centavos, diez centavos, veinte centavos, cincuenta centavos y un peso. (Una sola moneda puede considerarse como una de las sumas pedidas.)

SOLUCION. Tenemos 6 monedas diferentes. Por tanto, tomando las combinaciones de 1 en 1 hasta de 6 en 6, el número total de sumas de dinero diferentes es, según el Teorema 9, $2^6 - 1 = 63$.

Una vez más, hagamos $a = b = 1$ en la fórmula (3) de modo que el segundo miembro sólo contenga la suma de los coeficientes del desarrollo de la potencia de un binomio, escritos ahora en la forma:

$$\text{(5)} \qquad C(n, 0) + C(n, 1) + C(n, 2) + \dots \\ + C(n, n-2) + C(n, n-1) + C(n, n).$$

Por el Corolario 3 del Teorema 5 (Art. 13.4), $C(n, r) = C(n, n - r)$. Por tanto, para los coeficientes de (5) tenemos $C(n, 0) = C(n, n)$, $C(n, 1) = C(n, n - 1)$, $C(n, 2) = C(n, n - 2), \ldots$, etc.

En otras palabras, se presenta aquí el mismo tipo de simetría que observamos como quinta característica del desarrollo del binomio en el Art. 7.4. Este resultado lo expresamos en el teorema siguiente:

**Teorema 10.** *En el desarrollo de* $(a + b)^n$, *los coeficientes de cualquier par de términos equidistantes de los extremos son iguales.*

Debido a la importancia de los coeficientes del desarrollo de la potencia de un binomio se han construido tablas extensas de sus valores. En la formación de tales tablas se aprovecha, por supuesto, la simetría mencionada en el Teorema 10. Además se hace uso del principio en que se apoya el triángulo de Pascal que fue estudiado en el Art. 7.5. Ahora demostraremos este principio.

**Teorema 11.** *(Principio del triángulo de Pascal). En el desarrollo de* $(a + b)^n$, *el coeficiente del termino de orden* $(r + 1)$ *es igua la la suma de los coeficientes de los términos de orden* $r$ *y* $(r + 1)$ *del desarrollo de* $(a + b)^{n-1}$.

DEMOSTRACION. Según la relación (2), para demostrar este teorema debemos establecer que

$$C(n, r) = C(n - 1, r - 1) + C(n - 1, r).$$

Por el corolario 2 del Teorema 5 (Art. 13.4), tenemos

$$\begin{aligned} C(n-1, r-1) &+ C(n-1, r) \\ &= \frac{(n-1)!}{(r-1)!(n-r)!} + \frac{(n-1)!}{r!(n-r-1)!} \\ &= \frac{r(n-1)!}{r!(n-r)!} + \frac{(n-r)(n-1)!}{r!(n-r)!} = \frac{(r+n-r)(n-1)!}{r!(n-r)!} \\ &= \frac{n(n-1)!}{r!(n-r)!} = \frac{n!}{r!(n-r)!} = C(n, r), \end{aligned}$$

como se quería demostrar.

**Ejemplo 2.** Por medio del Teorema 11, encontrar los coeficientes del desarrollo de $(a + b)^6$ a partir de los coeficientes del desarrollo de $(a + b)^5$.

SOLUCION. Desarrollando $(a + b)^5$ por medio del Teorema 8, encontramos fácilmente que los coeficientes, en el orden acostumbrado, son,

$$1,\ 5,\ 10,\ 10,\ 5,\ 1.$$

Los coeficientes primero y último del desarrollo de $(a + b)^n$, para $n$ entero positivo, son la unidad. Por el Teorema 11, los coeficientes de $(a + b)^6$, del segundo en adelante, son

segundo coeficiente $= 1 + 5 = 6$,
tercer coeficiente $= 5 + 10 = 15$,
cuarto coeficiente $= 10 + 10 = 20$,
quinto coeficiente $= 10 + 5 = 15$,
sexto coeficiente $= 5 + 1 = 6$.

Por supuesto, el último coeficiente (el séptimo) es la unidad. Además, debido a la simetría de los coeficientes, sólo es necesario calcular hasta el cuarto coeficiente.

En los diversos desarrollos de $(a + b)^n$, observamos que los coeficientes aumentan hasta la mitad del desarrollo y luego decrecen en orden inverso. De esto podemos concluir que si $n$ es par, el desarrollo tiene un número impar de términos y el término central es el que tiene mayor coeficiente; y si $n$ es impar, el desarrollo tiene un número par de términos, y los dos términos centrales son los que tienen mayor coeficiente. Esto es consecuencia del teorema siguiente:

**Teorema 12.** *Si $n$ es par, el valor máximo de $C(n, r)$ se obtiene cuando $r = n/2$ y si $n$ es impar se obtiene cuando $r = (n - 1)/2$.* ó $r = (n + 1)/2$.

DEMOSTRACION. Por el teorema 8, $C(n, r)$ es el coeficiente del término de orden $r + 1$ del desarrollo de $(a + b)^n$. Por tanto, $C(n, r - 1)$ es el coeficiente del término de orden $r$, y tenemos la razón:

$$\frac{C(n, r)}{C(n, r - 1)} = \frac{n!}{r!(n - r)!} \cdot \frac{(r - 1)!(n - r + 1)!}{n!} = \frac{n - r + 1}{r}.$$

Ahora bien, el coeficiente $C(n, r)$ es mayor que el que le precede inmediatamente $C(n, r - 1)$ con tal que su razón sea mayor que la unidad, es decir, siempre que

$$\frac{n - r + 1}{r} > 1,$$

de donde $n - r + 1 > r$ y $r < \dfrac{n + 1}{2}$.

Si $n$ es par, $r = n/2$ es el mayor entero menor que $(n + 1)/2 = n/2 + 1/2$.

Si $n$ es impar, $n - 1$ es par, y $r = (n - 1)/2$ es el mayor entero menor que $(n - 1)/2 + 1 = (n + 1)/2$. Pero si $n$ es impar, también tenemos $r = (n+1)/2$ ya que $C\left(n, \frac{n+1}{2}\right) = C\left(n, \frac{n-1}{2}\right)$ por el Corolario 3 del Teorema 5 (Art. 13.4), como se quería demostrar.

## EJERCICIOS. GRUPO 50

1. Demostrar el Teorema 6 (Art. 13.5) por el método usado en el Teorema 3 (Art. 13.3).

2. Demostrar el Teorema 7 (Art. 13.5).

3. Se tienen 6 tarjetas, marcadas del 1 al 6, separadas en 2 grupos de 3 tarjetas cada uno. Comprobar el Teorema 7 (Art. 13.5) mostrando las posibles distribuciones de las tarjetas en los grupos.

4. Hallar el número de maneras en que se pueden dividir 9 objetos diferentes en grupos de 5 y 4 objetos. Comparar este resultado con el número de maneras en que se pueden dividir 10 objetos diferentes en 2 grupos iguales.

5. Demostrar que el número de maneras en que se pueden dividir $2n - 1$ objetos diferentes en grupos de $n$ y $n - 1$ objetos es igual al número de maneras en que se pueden dividir $2n$ objetos diferentes en 2 grupos iguales. Comprobar este resultado en el ejercicio 4.

6. Encontrar el número de maneras en que pueden dividirse 12 objetos diferentes en 3 grupos de 5, 4 y 3 objetos, respectivamente.

7. Hallar el número de maneras en que pueden dividirse 12 objetos diferentes en 3 grupos iguales.

8. Calcular el número de maneras en que pueden repartirse 12 objetos diferentes por partes iguales entre 3 personas.

En cada uno de los ejercicios 9-12, desarrollar las sumas indicadas.

9. $\sum\limits_{i=1}^{n} u_i^3$.

10. $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i x_i$.

11. $\sum\limits_{n=1}^{4} (2n - 1)$.

12. $\sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} x^k$.

13. Demostrar que la suma de una progresión geométrica de $n$ términos, cuyo primer término es $a_1$ y cuya razón es $r$, puede representarse por $\sum\limits_{i=1}^{n} a_1 r^{i-1}$.

14. ¿De cuántas maneras diferentes puede una persona invitar a almorzar a uno a más de 5 amigos?

15. Calcular el número de lecturas diferentes que pueden obtenerse en una balanza utilizando en uno de los brazos una o más de las cuatro siguientes pesas: ¼ Kg, ½Kg, 1 Kg y 2 Kg.

16. De un grupo de 8 personas calcular el número de diferentes comités que pueden formarse conteninendo (a) una o más personas; (b) dos o más personas.

17. Sin hacer el desarrollo directo, obtener la suma de todos los coeficientes del desarrollo de (a) $(a + b)^4$; (b) $(3a - b)^4$.

18. Sin desarrollar directamente, hallar la suma de todos los coeficientes del desarrollo de $(x - 2y + 3z)^3$.

Los coeficientes primero y último del desarrollo de $(a+b)^n$, para $n$ entero positivo, son la unidad. Por el Teorema 11, los coeficientes de $(a+b)^6$, del segundo en adelante, son

segundo coeficiente $= 1 + 5 = 6$,
tercer coeficiente $= 5 + 10 = 15$,
cuarto coeficiente $= 10 + 10 = 20$,
quinto coeficiente $= 10 + 5 = 15$,
sexto coeficiente $= 5 + 1 = 6$.

Por supuesto, el último coeficiente (el séptimo) es la unidad. Además, debido a la simetría de los coeficientes, sólo es necesario calcular hasta el cuarto coeficiente.

En los diversos desarrollos de $(a+b)^n$, observamos que los coeficientes aumentan hasta la mitad del desarrollo y luego decrecen en orden inverso. De esto podemos concluir que si $n$ es par, el desarrollo tiene un número impar de términos y el término central es el que tiene mayor coeficiente; y si $n$ es impar, el desarrollo tiene un número par de términos, y los dos términos centrales son los que tienen mayor coeficiente. Esto es consecuencia del teorema siguiente:

**Teorema 12.** *Si $n$ es par, el valor máximo de $C(n, r)$ se obtiene cuando $r = n/2$ y si $n$ es impar se obtiene cuando $r = (n-1)/2$.*
ó $r = (n+1)/2$.

DEMOSTRACION. Por el teorema 8, $C(n, r)$ es el coeficiente del término de orden $r+1$ del desarrollo de $(a+b)^n$. Por tanto, $C(n, r-1)$ es el coeficiente del término de orden $r$, y tenemos la razón:

$$\frac{C(n, r)}{C(n, r-1)} = \frac{n!}{r!(n-r)!} \cdot \frac{(r-1)!(n-r+1)!}{n!} = \frac{n-r+1}{r}.$$

Ahora bien, el coeficiente $C(n, r)$ es mayor que el que le precede inmediatamente $C(n, r-1)$ con tal que su razón sea mayor que la unidad, es decir, siempre que

$$\frac{n-r+1}{r} > 1,$$

de donde $n - r + 1 > r$ y $r < \dfrac{n+1}{2}$.

Si $n$ es par, $r = n/2$ es el mayor entero menor que $(n+1)/2 = n/2 + 1/2$.

Si $n$ es impar, $n-1$ es par, y $r = (n-1)/2$ es el mayor entero menor que $(n-1)/2 + 1 = (n+1)/2$. Pero si $n$ es impar, también tenemos $r = (n + 1)/2$ ya que $C\left(n, \dfrac{n+1}{2}\right) = C\left(n, \dfrac{n-1}{2}\right)$ por el Corolario 3 del Teorema 5 (Art. 13.4), como se quería demostrar.

## EJERCICIOS. GRUPO 50

1. Demostrar el Teorema 6 (Art. 13.5) por el método usado en el Teorema 3 (Art. 13.3).

2. Demostrar el Teorema 7 (Art. 13.5).

3. Se tienen 6 tarjetas, marcadas del 1 al 6, separadas en 2 grupos de 3 tarjetas cada uno. Comprobar el Teorema 7 (Art. 13.5) mostrando las posibles distribuciones de las tarjetas en los grupos.

4. Hallar el número de maneras en que se pueden dividir 9 objetos diferentes en grupos de 5 y 4 objetos. Comparar este resultado con el número de maneras en que se pueden dividir 10 objetos diferentes en 2 grupos iguales.

5. Demostrar que el número de maneras en que se pueden dividir $2n - 1$ objetos diferentes en grupos de $n$ y $n - 1$ objetos es igual al número de maneras en que se pueden dividir $2n$ objetos diferentes en 2 grupos iguales. Comprobar este resultado en el ejercicio 4.

6. Encontrar el número de maneras en que pueden dividirse 12 objetos diferentes en 3 grupos de 5, 4 y 3 objetos, respectivamente.

7. Hallar el número de maneras en que pueden dividirse 12 objetos diferentes en 3 grupos iguales.

8. Calcular el número de maneras en que pueden repartirse 12 objetos diferentes por partes iguales entre 3 personas.

En cada uno de los ejercicios 9-12, desarrollar las sumas indicadas.

9. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} u_i^3.$

10. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i x_i.$

11. $\displaystyle\sum_{n=1}^{4} (2n - 1).$

12. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} x^k.$

13. Demostrar que la suma de una progresión geométrica de $n$ términos, cuyo primer término es $a_1$ y cuya razón es $r$, puede representarse por $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_1 r^{i-1}.$

14. ¿De cuántas maneras diferentes puede una persona invitar a almorzar a uno a más de 5 amigos?

15. Calcular el número de lecturas diferentes que pueden obtenerse en una balanza utilizando en uno de los brazos una o más de las cuatro siguientes pesas: ¼ Kg, ½Kg, 1 Kg y 2 Kg.

16. De un grupo de 8 personas calcular el número de diferentes comités que pueden formarse conteninendo (a) una o más personas; (b) dos o más personas.

17. Sin hacer el desarrollo directo, obtener la suma de todos los coeficientes del desarrollo de (a) $(a + b)^4$; (b) $(3a - b)^4$.

18. Sin desarrollar directamente, hallar la suma de todos los coeficientes del desarrollo de $(x - 2y + 3z)^3$.

19. Se tira una moneda 6 veces. Hallar el número de maneras diferentes en que se pueden obtener (a) exactamente 3 caras; (b) por lo menos 3 caras; (c) por lo menos 1 cara.

20. Se tiran ocho monedas simultáneamente. Calcular el número de maneras diferentes en que se pueden obtener (a) exactamente 7 sellos; (b) por lo menos 7 caras; (c) por lo menos 1 sello.

21. Sin desarrollar directamente, obtener el mayor coeficiente del desarrollo de $(a + b)^8$.

22. Sin desarrollar directamente, calcular los mayores coeficientes del desarrollo de $(a + b)^9$.

23. Demostrar que la suma de los coeficientes de los términos de orden impar en el desarrollo de la potencia de un binomio es igual a la suma de los coeficientes de los términos de orden par.

24. En el desarrollo de $(a + b)^n$, demostrar que el coeficiente del término central es par si $n$ es par.

25. Demostrar que $C(n, 1) + 2C(n, 2) + 3C(n, 3) + \ldots + nC(n, n) = n2^{n-1}$.

26. Comprobar el ejercicio 25 para $n = 4$.

27. Demostrar que el término general del desarrollo de $(a + b + c)^n$ es $\dfrac{n!}{p!q!r!} a^p b^q c^r$, siendo $p + q + r = n$.

28. Utilizando el resultado del ejercicio 27, obtener el coeficiente de $ab^2c^3$ en el desarrollo de $(a + b + c)^6$.

29. Demostrar que el número de maneras en que puede obtenerse la suma de 7 puntos al tirar 2 dados es igual al coeficiente de $x^7$ en el desarrollo de $(x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)^2$.

30. Utilizando el método del ejercicio 29, calcular el número de maneras en que pueden obtenerse las sumas de puntos de 2 a 12 inclusive al tirar 2 dados. Comprobar el resultado demostrando que la suma total es 36.

# 14

# Probabilidad

## 14.1. INTRODUCCION

En este capítulo daremos una introducción elemental al cálculo de probabilidades. Esta materia es tan extensa y sus aplicaciones han adquirido tal importancia que existen tratados muy amplios dedicados exclusivamente a ella.

La teoría matemática de la probabilidad fue iniciada hace aproximadamente tres siglos, estando en ese entonces relacionada únicamente con los juegos de azar. Posteriormente, el cálculo de probabilidades ha encontrado aplicaciones en una amplia variedad de campos, algunos de los cuales se mencionarán aquí para dar al estudiante una idea de la importancia del tema.

Una de las primeras aplicaciones de la probabilidad fue en las ciencias actuariales, que comprenden el estudio de seguros de vida, fondos de pensiones y problemas relacionados. Otro uso importante de la probabilidad está en la estadística la cual penetra en una multitud de campos, tales como finanzas, economía, biología, psicología y las ciencias sociales en general. El cálculo de probabilidades también se emplea en la física y química modernas. Finalmente se mencionará que la probabilidad tiene muchos usos en la ingeniería, como por ejemplo en la teoría de ajuste por mínimos cuadrados, en el estudio de problemas de aglomeración (problemas de tráfico), en la teoría de muestreo y en el control de calidad de productos manufacturados.

Naturalmente no es posible estudiar las aplicaciones que se acaban de mencionar dentro de los límites de este capítulo, pero sí consideraremos algunos de los conceptos básicos del cálculo de probabilidades y un buen número de ejemplos sencillos. Más adelante, cuando el estudiante haya adquirido más conocimientos matemáticos, especialmente sobre cálculo, estará en posición de hacer un estudio detallado de una o varias de las fascinantes aplicaciones de la probabilidad.

## 14.2. DEFINICIONES

Todos estamos familiarizados con las palabras "probabilidad" y "azar" usadas en el lenguaje diario. Así, por ejemplo, decimos que probablemente lloverá a la noche o que un determinado avión probablemente llegará tarde a un aeropuerto designado. Observamos que estas proposiciones representan predicciones del futuro y que, como tales, adolecen de una falta de seguridad. Además se les puede calificar como vagas en el sentido de que no proporcionan una medida de la probabilidad de ocurrencia del suceso a que se refieren. Para nuestros propósitos será necesario establecer una definición que nos permita determinar un valor numérico o medida de la probabilidad de ocurrencia o no ocurrencia de un suceso particular. Hay en uso dos definiciones de probabilidad que consideraremos por separado.

Sabemos (Art. 13.2) que al tirar un dado cúbico puede caer en una cualquiera de 6 posiciones diferentes, todas igualmente probables. La posición correspondiente a 5 puntos hacia arriba es una de las 6 diferentes, y decimos que hay un caso favorable para que salga el 5 entre 6 casos posibles. También decimos que la probabilidad de obtener un 5 en un tiro de un dado es $\frac{1}{6}$. Similarmente, si tiramos una moneda, puede caer en una cualquiera de 2 formas igualmente probables, cara o sello, resultando, por un argumento similar, que la probabilidad de obtener cara en un tiro de una moneda es $\frac{1}{2}$. Obsérvese el uso del calificativo "igualmente probables" en ambos ejemplos. En el caso del dado esto significa que cualquiera de las caras tiene igual oportunidad de quedar hacia arriba; en el caso de la moneda tanto es de esperarse que sea la cara la que quede hacia arriba como que sea el sello. Basándonos en este razonamiento estructuramos nuestra primera definición:

**Definición 1.** Si un suceso puede ocurrir en $a$ formas y fallar en $b$ formas, entonces el número total de formas posibles en que puede ocurrir o no ocurrir es $a + b$. Si estas $a + b$ formas son *igualmente probables*, la probabilidad $p$ de que el suceso ocurra se *define* como el cociente

$$p = \frac{a}{a+b}, \tag{1}$$

y la probabilidad $q$ de que el suceso no ocurra se *define* como el cociente

$$q = \frac{b}{a+b}. \tag{2}$$

En otras palabras, la probabilidad de que ocurra un suceso se define como el cociente del número de casos favorables entre el número de casos posibles, siendo todos estos casos igualmente probables. En forma análoga, la probabilidad de que un suceso no ocurra se define como el cociente del número de casos favorables entre el número de casos posibles, siendo todos estos casos igualmente probables.

Así, por ejemplo, en el caso mencionado anteriormente acerca de la probabilidad de que salga 5 en un tiro de un dado, tenemos $a = 1$, $b = 5$, de modo que de (1) y (2) se sigue que la probabilidad de acertar es $p = 1/(1 + 5) = 1/6$ y la probabilidad de fallar es $q = 5/(1 + 5) = 5/6$.

La Definición 1 es llamada a veces la *definición clásica* de probabilidad. Ya que conocemos de *antemano*, o *suponemos* que conocemos de antemano, el número de casos favorables y desfavorables, la Definición 1 es también llamada *definición de probabilidad a priori.*

De la Definición 1 es posible obtener una medida cuantitativa de la probabilidad. En una prueba, un determinado suceso forzosamente debe de ocurrir o no ocurrir. Esto se llama *certeza* y se encuentra fácilmente que queda representada por la unidad. Así, sumando $p$ y $q$ dadas por (1) y (2), tenemos

$$p + q = \frac{a}{a + b} + \frac{b}{a + b} = 1. \tag{3}$$

De (3) obtenemos las siguientes propiedades:

Si la probabilidad de que ocurra un suceso es $p$, entonces la probabilidad de que no ocurra es $1 - p$. O sea, que de (3) obtenemos

$$q = 1 - p. \tag{4}$$

Si la probabilidad de que un suceso no ocurra es $q$, entonces la probabilidad de que ocurra es $1 - q$. O sea, que de (3) tenemos

$$p = 1 - q. \tag{5}$$

Si hay la *certeza* de que un suceso *ocurra,* entonces su probabilidad es 1 y la probabilidad de que no ocurra es 0. Pues en (4) cuando $p = 1$, $q = 0$.

Si se tiene la *certeza* de que un suceso *no ocurra,* entonces la probabilidad de que no ocurra es 1, y la probabilidad de que ocurra es 0. Pues en (5) cuando $q = 1$, $p = 0$.

Por tanto, es evidente que los valores de las probabilidades estén entre 0 y 1, y podemos escribir

$$0 \leq p \leq 1, \quad 0 \leq q \leq 1, \quad p + q = 1.$$

Ahora introduciremos otras definiciones. Como antes, sean $a$ y $b$ los números de casos favorables y desfavorables para la ocurrencia de un suceso particular. Si $a > b$, decimos que *la probabilidad está a favor del* *suceso como $a$ es a $b$;* si $a < b$ decimos que *la probabilidad es desfavorable al suceso como $b$ es a $a$;* y si $a = b$ decimos que *hay igual oportunidad* de acertar o fallar.

Así, por ejemplo, al tirar un dado hay cuatro formas de obtener 3 o más puntos; por tanto la oportunidad de obtener 3 ó más es favorable como 4 es a 2 ó como 2 es a 1. Análogamente, la oportunidad de obtener 6 en un tiro de un dado es desfavorable como 5 es a 1.

Volvamos ahora a la Definición 1. Si los valores de $a$ y $b$ son desconocidos, la definición no puede aplicarse. Esto ocurre en ciertos casos. Supongamos, por ejemplo, que una compañía va a producir 2 000 artículos para surtir una orden y que desea saber cuántos pueden resultar defectuosos. Si no se tiene información previa acerca de este tipo de operación de producción, no se puede predecir el número de piezas defectuosas dentro de un determinado grado de confianza. Sin embargo, supongamos que se han llevado registros de la producción anterior de 100 000 artículos del mismo tipo y bajo las *mismas condiciones esenciales,* y que según esos registros se observa que 1 000 artículos resultaron defectuosos. Entonces se dice que en la producción futura de los mismos artículos, bajo las *mismas condiciones esenciales,* la probabilidad de obtener un artículo defectuoso al producir cada unidad es $\frac{1\,000}{100\,000} = 0.01$. Es decir, se puede esperar que uno de cada 100 artículos producidos sea defectuoso. Por tanto, para la orden de 2 000 artículos se pueden esperar $2\,000 \times 0.01 = 20$ defectuosos. Este razonamiento conduce a la definición siguiente:

**Definición 2.** Consideremos un suceso que puede verificarse o fallar al efectuar una prueba. Si se observa que este suceso se verifica $m$ veces en un total de $n$ pruebas bajo las *mismas condiciones esenciales,* entonces la razón $m/n$ se *define* como la probabilidad $p$ de que el suceso se verifique en una cualquiera de las pruebas, y escribimos

$$p = \frac{m}{n}. \tag{6}$$

Observamos que la expresión "mismas condiciones esenciales" aparece en esta definición y también en el ejemplo que la precede. Esto significa que cada prueba se lleva a cabo (dentro de lo posible) precisamente bajo las mismas condiciones. Así, por ejemplo, en el caso de los artículos manufacturados significa que la operación se efectúa utilizando iguales máquinas, equipo y operarios y reproduciendo también cualesquiera otras condiciones. Por supuesto, es dudoso que esto pueda ser realizado en la práctica.

En la Definición 2, llamada la *definición de frecuencia,* la probabilidad es en realidad un número estimado y la confianza en esta estimación aumenta con $n$, o sea cuando el número de pruebas u observaciones crece. Por esta razón, si el cociente $n/m$ tiende a un límite cuando $n$ tiende a infinito (Art. 10.5), este límite se *define* también como la probabilidad de que el suceso se verifique en una cualquiera de las pruebas. Se dice que este es un resultado obtenido en *promedio.*

Ya que la probabilidad dada por la Definición 2 se obtiene basándose en un gran número de experimentos y observaciones se le llama a menudo probabilidad *empírica* o *estadística.* Además, para distinguirla de la Definición 1, se le llama también *probabilidad a posteriori.*

De la relación (6) tenemos $m = np$. Por tanto, si $p$ es la probabilidad de que ocurra un suceso en una sola prueba, entonces decimos que la *frecuencia* o *valor esperado de número de ocurrencias* en $n$ pruebas es igual a $np$. Por ejemplo, si la probabilidad de obtener cara en un tiro de una moneda es $\frac{1}{2}$, entonces en 100 tiros podemos esperar $100 \cdot \frac{1}{2} = 50$ caras. Si $np$ no es un entero, tomamos el entero más próximo como valor esperado.

Si $p$ es la probabilidad de que una persona gane una cantidad de dinero $s$, entonces la *esperanza matemática* de esa persona *se define* como $ps$. Por ejemplo, en una rifa de 10 boletos con un solo premio de \$ 50, la probabilidad de que un boleto gane el premio es $\frac{1}{10}$ y la esperanza matemática para un boleto es por tanto $\frac{1}{10} \cdot \$\,50$, o sea, \$ 5.

## 14.3. SUCESOS SIMPLES

En este artículo consideraremos algunos de los tipos más sencillos de problemas de probabilidad. Tales casos corresponden a los sucesos apropiadamente llamados *simples.*

**Definición.** Un *suceso simple* es aquel cuya ocurrencia o no ocurrencia no está relacionada con ningún otro suceso.

Por ejemplo, un suceso simple es la obtención de un as en un tiro de un dado.

NOTA. Muchos problemas de probabilidad están relacionados con monedas, dados y cartas. Aunque el estudiante seguramente está familiarizado con el significado de estos términos, los describiremos brevemente para que sean entendidos con claridad al usarlos en los problemas.

Una moneda tiene dos caras distintas, designadas como cara y sello. Al tirar una moneda siempre debe resultar hacia arriba una sola de dichas caras que se consideran igualmente probables.

Un dado es un pequeño cubo en cuyas seis caras aparecen uno o más puntos, el número de puntos corresponde a los enteros de 1 a 6 inclusive. Al tirar un dado siempre resulta con una, y sólo una, cara hacia arriba, siendo dichas caras igualmente probables. El número uno recibe también el nombre de *as*.

Una baraja ordinaria consiste de 52 cartas divididas en cuatro palos con 13 cartas cada uno. Los nombres de los palos y sus colores, indicados entre paréntesis, son como sigue: bastos (negros), diamantes (rojos), corazones (rojos) y espadas (negras). Cada palo consiste de 9 cartas numeradas del 2 al 10 inclusive más 4 cartas llamadas as, rey, reina y sota (ordenadas por valor descendente). La expresión de que una carta se saca "al azar" significa que la carta se toma de una baraja bien mezclada de modo que todas las cartas tengan igual oportunidad de ser escogidas.

Ahora presentamos varios ejemplos típicos.

**Ejemplo 1.** Una moneda se tira 10 veces. Calcular la probabilidad de que aparezcan exactamente 7 caras.

SOLUCION. Ya que la moneda puede aparecer en 2 formas diferentes en cada tiro, en 10 tiros puede aparecer en $2^{10}$ formas (Corolario 2, Teorema 1, Art. 13.2). Entre 10 caras se pueden seleccionar 7 caras en $C(10, 7) = 120$ formas diferentes (Teorema 5, Art. 13.4). Por tanto, por la Definición 1 (Art. 14.2), la probabilidad buscada es

$$p = \frac{120}{2^{10}} = \frac{15}{128}.$$

**Ejemplo 2.** Calcular la probabilidad de obtener una suma de por lo menos 10 puntos en un tiro de 2 dados, y determinar si la probabilidad está a favor o en contra de que se verifique este suceso.

SOLUCION. Un dado puede aparecer en 6 formas diferentes; por tanto, 2 dados pueden aparecer en $6 \cdot 6 = 36$ formas diferentes. La suma 10 puede obtenerse de 3 maneras: $5 + 5$, $6 + 4$, $4 + 6$; la suma 11 de 2 maneras: $6 + 5$, $5 + 6$; y la suma 12 de una manera. Por tanto, el número total de casos favorables es $3 + 2 + 1 = 6$, y por la Definición 1, la probabilidad buscada es $p = 6/36 = 1/6$.

En este caso $a = 6$ y $a + b = 36$; por tanto, $b = 30$. Ya que $a < b$, la probabilidad está como 30 es a 6 ó como 5 es a 1 en contra del suceso.

**Ejemplo 3.** Si se sacan 3 cartas al azar de una baraja de 52 cartas, calcular la probabilidad de que sean as, rey y reina.

SOLUCION. Se pueden seleccionar 3 cartas entre 52 cartas en $C(52, 3)$ formas diferentes(Art. 13.4). Ya que hay 4 palos y en cada palo hay un as, un rey y una reina, resulta que estas 3 cartas pueden obtenerse en $4 \cdot 4 \cdot 4$ formas diferentes (Art. 13.2). Por tanto, por la Definición 1, la probabilidad buscada es

$$p = \frac{4 \cdot 4 \cdot 4}{C(52, 3)} = \frac{4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 3}{52 \cdot 51 \cdot 50} = \frac{16}{5525}$$

**Ejemplo 4.** De una bolsa que contiene 4 bolas blancas, 2 negras y 3 rojas, se sacan 5 al azar. Calcular la probabilidad de que 2 sean blancas 1 negra y 2 rojas.

SOLUCION. Del total de $4 + 2 + 3 = 9$ bolas se pueden seleccionar 5 bolas en $C(9, 5)$ formas diferentes (Art. 13.4). Entre las 4 bolas blancas 2 de ellas pueden seleccionarse en $C(4, 2)$ formas, entre las 2 bolas negras 1 puede seleccionarse en $C(2, 1)$ formas y entre las 3 bolas rojas 2 pueden seleccionarse en $C(3, 2)$ formas. Por tanto, el total de casos favorables es $C(4, 2) \cdot C(2, 1) \cdot C(3, 2)$ y por la Definición 1, la probabilidad buscada es

$$p = \frac{C(4, 2) \cdot C(2, 1) \cdot C(3, 2)}{C(9, 5)} = \frac{6 \cdot 2 \cdot 3}{126} = \frac{2}{7}.$$

Consideremos ahora un ejemplo de aplicación de la Definición 2 (Art. 14.2). Las compañías de seguros utilizan para calcular sus primas una tabla muy amplia de observaciones llamada tabla de mortalidad. Dicha tabla es un registro completo de la mortalidad que se presenta en un número grande de personas, empezando las observaciones cuando todas las personas del grupo son muy jóvenes. Cada año se registra en la tabla el número de dichas personas que aún viven en ese año. Por ejemplo, una de estas tablas puede registrar que de 1 000 000 de personas que originalmente tenían un año de edad, 941 806 aún viven a la edad de 24 años y que 906 554 aún viven a la edad de 35 años. De acuerdo con la Definición 2, decimos que la probabilidad de que una persona de 1 año llegue a los 35 años es $\frac{906\,554}{1\,000\,000}$, o sea, aproximadamente 0.91 y que la probabilidad de que una persona de 24 años llegue a los 35 años es $\frac{906\,554}{941\,806}$, o sea, aproximadamente 0.96.

**Ejemplo 5.** Una tabla de mortalidad muestra que de 949 171 personas de 21 años, 577 882 aún viven a la edad de 65 años. (a) Calcular la probabilidad de que un hombre que actualmente tiene 21 años viva lo necesario para retirarse a los 65 años. (b) De un grupo de 2 000 hombres que actualmente tienen 21 años, calcular el número que puede esperarse que vivan para retirarse a la edad de 65 años.

SOLUCION. (a) Por la Definición 2, la probabilidad de llegar a los 65 años es $p = \frac{577\,882}{949\,171} = 0.609$.

(b) Para $n = 2\,000$ y $p = 0.609$, el valor esperado de número de ocurrencias (Art. 14.2) es $= np = 2\,000(0.609) = 1\,218$, siendo éste el número de hombres que puede esperarse que vivan para retirarse a los 65 años.

## EJERCICIOS. GRUPO 51

En los siguientes ejercicios $p$ y $q$ representan, respectivamente, la probabilidad de ocurrencia y no ocurrencia de un suceso.

1. Si la probabilidad de ocurrencia de un suceso está en su favor, demostrar que $p > 1/2$. Si está en su contra, demostrar que $p < 1/2$. Si un suceso lo mismo puede ocurrir que no ocurrir, demostrar que $p = q = 1/2$.

2. Demostrar que la probabilidad en favor de que ocurra un suceso es igual a la razón $p/q$ y que la probabilidad en contra de un suceso es igual a la razón $q/p$.

3. La probabilidad de que un suceso ocurra es $3/5$. Calcular la probabilidad en favor del suceso.

4. La probabilidad de que un evento no ocurra es $6/11$. Calcular la probabilidad en contra del suceso.

5. La probabilidad en favor de un suceso es como 7 es a 3. Calcular la probabilidad de que el suceso no ocurra.

6. La probabilidad en contra de un suceso es como 5 es a 4. Calcular la probabilidad de que el suceso ocurra.

7. Calcular la probabilidad de obtener una suma de 7 puntos en un tiro de 2 dados y hallar la probabilidad en contra del suceso.

8. Calcular la probabilidad de obtener una suma de 7 ó menos en un tiro de 2 dados, y determinar la probabilidad en favor de este suceso.

9. Una moneda se tira 4 veces. Calcular la probabilidad de obtener exactamente 3 caras.

10. En un tiro de 4 monedas calcular la probabilidad de que (a) de obtener exactamente 3 caras; (b) de obtener por lo menos 3 caras.

11. De una baraja de 52 cartas se saca una carta al azar. Calcular la probabilidad de que (a) sea de bastos; (b) sea de diamantes o de corazones; (c) no sea de espadas.

12. Se sacan 4 cartas al azar de una baraja de 52 cartas. Calcular la probabilidad de qué sean as, rey, reina y sota.

13. Un bolsa contiene 7 bolas blancas y 5 bolas negras y se sacan de ella 6 bolas al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que 4 sean blancas y 2 sean negras?

14. En el ejercicio 13 calcular la probabilidad de que de las 6 bolas por lo menos 4 sean blancas.

15. De un grupo de 8 muchachos y 6 muchachas se escoge un comité de 4 por medio de una rifa ¿Cuál es la probabilidad de que el comité consista de 2 muchachos y 2 muchachas?

16. En el ejercicio 15 calcular la probabilidad de que el comité no comprenda más de 2 muchachos.

17. Una tabla de mortalidad muestra que de 557 882 personas de 65 años, aún viven 181 765 a la edad de 80 años. De 1 000 hombres que se retiran a la edad de 65 ¿Cuántos puede esperarse que aún vivan 15 años más tarde?

18. Una persona recibe un premio de \$ 90 si obtiene 9 ó más puntos en un tiro de 2 dados. Calcular el valor de su esperanza matemática.

19. Una persona recibe un premio de $ 51 si obtiene una carta de espadas y una de diamantes al sacar 2 cartas al azar de una baraja de 52 cartas. Calcular el valor de su esperanza matemática.

20. Una persona tiene en su bolsa 2 monedas de 10 centavos y 2 de cinco centavos y saca 2 monedas al azar para pagar 15 centavos. Calcular la probabilidad de que saque la cantidad exacta.

21. Nueve libros diferentes están colocados al azar en un estante. ¿Cuál es la probabilidad de que 3 libros determinados estén contiguos?

22. Nueve personas se sientan al azar en círculo. ¿Cuál es la probabilidad de que 2 personas determinadas queden contiguas?

23. De una bolsa que contiene 6 bolas blancas, 4 negras y 2 rojas, se sacan 6 bolas al azar. Calcular la probabilidad de que 3 sean blancas, 2 negras y 1 roja.

24. De una bolsa que contiene 5 bolas blancas, 3 negras y 1 roja, se sacan 3 bolas al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que ninguna de las bolas sacadas sea blanca?

25. Calcular la probabilidad de obtener una suma de 15 en un tiro de 3 dados.

26. ¿Cuál es la probabilidad de obtener una suma de por lo menos 15 en un tiro de 3 dados?

27. En un tiro de 3 dados hallar la probabilidad de que aparezca el mismo número en 2, y sólo 2, de los dados.

28. Se sacan 2 tarjetas al azar de un conjunto de 10 tarjetas numeradas del 1 al 10. Calcular la probabilidad de que la suma de los números en las tarjetas sea (a) par; (b) impar.

29. Una persona saca una tarjeta al azar de un conjunto de 10 tarjetas numeradas del 1 al 10, en donde el número de cada tarjeta representa la cantidad en pesos que se obtiene como premio. Calcular el valor de la esperanza matemática de esta persona.

30. Al tirar un dado, una persona recibe una cantidad en pesos igual al número de puntos obtenido. ¿Cuál es el valor de su esperanza matemática?

31. Una persona saca 3 monedas al azar de una bolsa que contiene 8 monedas de 10 centavos, 4 de 25 centavos y 3 de 50 centavos. Calcular el valor de su esperanza matemática.

32. Una moneda ha sido tirada 6 veces y han aparecido sucesivamente 6 caras. ¿Cuál es la probabilidad de que se obtenga cara en el próximo tiro?

33. De una baraja de 52 cartas se sacan 3 cartas al azar. Calcular la probabilidad de que (a) todas sean de corazones; (b) todas sean del mismo palo.

34. De una baraja de 52 cartas se sacan 3 cartas al azar. Calcular la probabilidad de que una sea de corazones y 2 sean de diamantes.

35. 5 mujeres y 4 hombres se sientan al azar en una fila. ¿Cuál es la probabilidad de que hombres y mujeres ocupen lugares alternados?

36. 4 mujeres y sus esposos se sientan al azar en una fila de 8 sillas. ¿Cuál es la probabilidad de que cada mujer quede junto a su esposo?

37. De una baraja de 52 cartas se sacan 4 cartas al azar. Calcular la probabilidad de que sea una de cada palo.

38. De una baraja de 52 cartas se sacan 5 cartas al azar. Calcular la probabilidad de que haya exactamente 3 reyes entre ellas.

39. De una baraja de 52 cartas se sacan 5 cartas al azar. Calcular la probabilidad de que aparezcan entre ellas exactamente 3 cartas de la misma denominación.

40. Un *yarborough* es una mano de bridge de 13 cartas ninguna de las cuales es de denominación mayor que 9. Demostrar que la probabilidad en contra de este suceso es como 1 827 es a uno.

## 14.4. SUCESOS COMPUESTOS

Aquí consideraremos problemas que, en general, son algo más complejos que los del artículo anterior. Esto es debido a que ahora estudiaremos la probabilidad de *sucesos compuestos,* es decir, de la ocurrencia de dos o más sucesos simples. Los sucesos compuestos pueden clasificarse en tres tipos: sucesos independientes, sucesos dependientes y sucesos mutuamente excluyentes. Definiremos y analizaremos cada uno de estos tipos de sucesos por separado.

**Definición.** Se dice que dos o más sucesos son *independientes* si la ocurrencia de uno cualquiera de ellos *no afecta* la probabilidad de la ocurrencia de ninguno de los otros sucesos.

Así por ejemplo, el suceso de obtener *simultáneamente* un as al tirar un dado *y* cara al tirar una moneda, está compuesto de dos sucesos independientes, pues la ocurrencia de un as en el dado no afecta la probabilidad de la aparición de cara en la moneda y viceversa.

En seguida estableceremos un teorema muy importante.

**Teorema 1.** *(Teorema de multiplicación para sucesos independientes). Si $p_1$ y $p_2$ son las probabilidades respectivas de que se verifiquen dos sucesos independientes $E_1$ y $E_2$, entonces $P = p_1p_2$ es la probabilidad de que $E_1$ y $E_2$ ocurran simultáneamente o sucesivamente.*

DEMOSTRACION. Como en la Definición 1 (Art. 14.2), sea $p_1 = a_1/(a_1 + b_1)$, en donde $a_1$ es el número de formas en que $E_1$ puede ocurrir y $b_1$ es el número de formas en que puede no ocurrir, siendo todas estas formas igualmente probables. Análogamente, sea $p_2 = a_2/(a_2 + b_2)$, en donde $a_2$ es el número de formas en que $E_2$ puede ocurrir y $b_2$ es el número de formas en que puede no ocurrir. Entonces por el Teorema 1 (Art. 13.2), el número total de formas en que tanto $E_1$ y $E_2$ pueden ocurrir es $a_1a_2$, y el número total de casos posibles es $(a_1 + b_1)(a_2 + b_2)$. Entonces por la Definición 1 (Art. 14.2), la probabilidad $P$ de que *tanto* $E_1$ *como* $E_2$ ocurran simultáneamente o sucesivamente es

$$P = \frac{a_1a_2}{(a_1 + b_1)(a_2 + b_2)} = \frac{a_1}{a_1 + b_2} \cdot \frac{a_2}{a_2 + b_2} = p_1p_2,$$

como se quería demostrar.

**Corolario 1.** *Si $p_1, p_2, \ldots, p_n$ son las probabilidades respectivas de ocurrencia de n sucesos independientes, entonces $P = p_1p_2 \ldots p_n$ es la* *probabilidad de que todos estos sucesos ocurran simultáneamente o sucesivamente.*

**Corolario 2.** *Si $p$ es la probabilidad de que un suceso ocurra en una prueba aislada, entonces la probabilidad de que este suceso ocurra $r$ veces en sucesión, o en $r$ pruebas determinadas, es $p^r$.*

NOTAS.

1. Obsérvese que tanto en el enunciado como en la demostración del Teorema 1 (apropiadamente llamado *Teorema de multiplicación*), se utilizó la palabra "y". Así, por ejemplo, se habla de la ocurrencia de los sucesos $E_1$ y $E_2$. El uso de esta palabra es característico de los problemas de sucesos independientes.
2. Cuando se habla de sucesos independientes que ocurren en sucesión se entiende que pueden ocurrir en *cualquier orden*.

**Ejemplo 1.** Calcular la probabilidad de obtener un dos en un tiro de un dado *y* sello en un tiro de una moneda.

SOLUCION. La probabilidad del dos es $1/6$; la probabilidad del sello es $1/2$. Ya que son sucesos independientes se sigue del Teorema 1 que la probabilidad de obtener un dos *y* un sello es $1/6 \cdot 1/2 = 1/12$.

**Ejemplo 2.** Las probabilidades de que $A$ y $B$ resuelvan un determinado problema son $2/3$ y $3/4$ respectivamente. Hallar la probabilidad de que el problema sea resuelto cuando menos por uno de los dos.

SOLUCION. Existen varias formas de resolver este problema. Usaremos el método más corto y sencillo.

El problema quedará resuelto si *A y B no* fallan simultáneamente en la solución.

La probabilidad de que $A$ falle es $1 - 2/3 = 1/3$; la probabilidad de que $B$ falle es $1 - 3/4 = 1/4$. Por tanto, por el Teorema 1, la probabilidad de que $A$ y $B$ fallen es $1/3 \cdot 1/4 = 1/12$. Por tanto, la probabilidad de que $A$ y $B$ *no* fallen es $1 - 1/12 = 11/12$, y esta es la probabilidad de que el problema sea resuelto.

**Definición.** Se dice que dos o más sucesos son *dependientes* si la ocurrencia de uno cualquiera de ellos afecta la probabilidad de la ocurrencia de alguno de los otros sucesos.

Así, por ejemplo, consideremos la probabilidad de obtener 2 cartas de bastos al sacar sucesivamente 2 cartas de una baraja de 52 cartas. La probabilidad de bastos en la primera extracción es $13/52 = 1/4$. Si volvemos a poner la primera carta sacada, la probabilidad de bastos en la segunda extracción es de nuevo $13/52 = 1/4$. Estos dos sucesos son independientes y, por tanto, de acuerdo con el Teorema 1, la probabilidad de obtener 2 cartas de bastos es $1/4 \cdot 1/4 = 1/16$.

Sin embargo, si la primera carta es de bastos y *no* se vuelve a poner, entonces quedan 12 cartas de bastos entre 51 cartas, de modo que la probabilidad de obtener bastos en la segunda extracción es $^{12}/_{51} = {}^4/_{17}$. En este caso la probabilidad de la segunda extracción depende de la primera extracción. Por el mismo razonamiento utilizado en el Teorema 1 sobre sucesos independientes, se puede demostrar que la probabilidad de ocurrencia de estos dos sucesos dependientes es igual a la probabilidad de bastos en la primera extracción multiplicada por la probabilidad de bastos en la segunda extracción. Por tanto, la probabilidad de obtener 2 cartas de bastos es $^1/_4 \cdot {}^4/_{17} = {}^1/_{17}$.

A continuación enunciamos el Teorema de sucesos dependientes. Ya que la demostración es similar a la del Teorema 1, dejamos los detalles al lector como un ejercicio.

**Teorema 2.** *(Teorema de multiplicación para sucesos dependientes). Sea $p_1$ la probabilidad de un suceso $E_1$ cuya ocurrencia afecta la probabilidad $p_2$ de la ocurrencia de un segundo suceso $E_2$. Entonces $\mathbf{P} = p_1p_2$ es la probabilidad de que $E_1$ y $E_2$ ocurran en el orden mencionado.*

NOTA 3. En este Teorema 2, $p_2$ representa la probabilidad de que $E_2$ suceda *después* de que $E_1$ ha sucedido.

**Ejemplo 3.** Se sacan sucesivamente 2 bolas de una bolsa que contiene 4 bolas blancas y 3 negras. ¿Cuál es la probabilidad $p$ de que la primera bola sea blanca y la segunda sea negra si (a) la primera bola se vuelve a poner en la bolsa después de haberse extraído; (b) la primera bola no se vuelve a poner?

SOLUCION. (a) La probabilidad de una bola blanca en la primera extracción es $^4/_7$. Si esta bola se vuelve a poner, entonces la probabilidad de una bola negra es la segunda extracción es $^3/_7$. Por tanto, por el Teorema 1, $p = {}^4/_7 \cdot {}^3/_7 = {}^{12}/_{49}$.

(b) Como antes, la probabilidad de una bola blanca en la primera extracción es $^4/_7$. Si esta bola no se vuelve a poner, entonces la probabilidad de una bola negra en la segunda extracción es $^3/_6 = {}^1/_2$. Por tanto, por el Teorema 2, $p = {}^4/_7 \cdot {}^1/_2 = {}^2/_7$.

**Definición.** Se dice que dos o más sucesos son *mutuamente excluyentes* cuando la ocurrencia de uno cualquiera de ellos imposibilita la ocurrencia de cualquier otro.

Así, por ejemplo, el suceso compuesto consiste en obtener *ya sea* un as *o* un 3 en un tiro de un dado está formado por dos sucesos mutuamente excluyentes, porque si el as aparece, el 3 no puede aparecer, y viceversa. Podemos calcular fácilmente la probabilidad de este suceso por los métodos del Art. 14.3. Así resulta que un as y un 3 pueden aparecer cada uno en solo una forma, teniéndose así dos casos favorables. Ya que hay una totalidad de 6 casos posibles, la probabilidad buscada es $2/6 = 1/3$, por la Definición 1 (Art. 14.2). Se observará que este resultado es la suma de las probabilidades individuales (con valor de $1/6$ cada uno) de obtener un as y un 3, es decir, $1/6 + 1/6 = 1/3$. Esto es un caso particular del teorema siguiente:

**Teorema 3.** *(Teorema de adición para sucesos mutuamente excluyentes). La probabilidad P de que ocurra uno u otro de un cierto número de sucesos mutuamente excluyentes, es la suma de las probabilidades de la ocurrencia de los sucesos separados.*

DEMOSTRACION. Sean $r$ sucesos mutuamente excluyentes con probabilidades $p_1, p_2, \ldots, p_r$, respectivamente. Entonces debemos demostrar que

$$P = p_1 + p_2 + \ldots + p_r.$$

Supongamos que de un total de $n$ formas, en las que un suceso puede ocurrir o no ocurrir, el primer suceso puede ocurrir en $a$ formas, el segundo suceso en $b$ formas, . . . , y el suceso de orden $r$ en $k$ formas, siendo todas estas formas igualmente probables. Ya que los sucesos son mutuamente excluyentes, todas estas formas de ocurrencia son diferentes y, por tanto, tenemos un total de $a + b + \ldots + k$ formas en que *uno* u *otro* de los sucesos puede ocurrir. Por tanto, por la Definición 1 (Art. 14.2) tenemos

$$p_1 = \frac{a}{n},\ p_2 = \frac{b}{n}, \ldots, p_r = \frac{k}{n}, \tag{1}$$

y además

$$P = \frac{a + b + \ldots + k}{n}. \tag{2}$$

La igualdad (2) puede escribirse en la forma

$$\begin{aligned} P &= \frac{a}{n} + \frac{b}{n} + \ldots + \frac{k}{n} \\ &= p_1 + p_2 + \ldots + p_r, \text{ [según (1)]} \end{aligned}$$

como se quería demostrar.

NOTA 4. Obsérvese que tanto en el enunciado como en la demostración del Teorema 3 se utilizaron las palabras *ya sea-o*. Estas palabras son características de los problemas de sucesos mutuamente excluyentes.

**Ejemplo 4.** Una bolsa contiene 4 bolas blancas y 2 negras; una segunda bolsa contiene 2 bolas blancas y 5 negras. Se selecciona al azar una de las bolsas y se extrae una bola. ¿Cuál es la probabilidad de que sea blanca?

SOLUCION. La probabilidad de seleccionar la primera bolsa es $1/2$, y la probabilidad de extraer de ella una bola blanca es $4/6$ o sea $2/3$. Por tanto, por el Teorema 2, la probabilidad de seleccionar la primera bolsa y extraer de ella una bola blanca es $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$. Análogamente, la probabilidad de seleccionar la segunda bolsa y extraer de ella una bola blanca es $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{7} = \frac{1}{7}$. Ya que la bola blanca debe extraerse ya sea de la primera bolsa o de la segunda, se sigue del Teorema 3 que la probabilidad buscada es $\frac{1}{3} + \frac{1}{7} = \frac{10}{21}$.

Muchos problemas de probabilidad pueden resolverse por más de un método. En el siguiente grupo de ejercicios resulta conveniente resolver un determinado problema por un método y luego, si es posible, comprobar el resultado utilizando otro método. Algunos problemas pueden resolverse usando los métodos del Art. 14.3 o bien los del Art. 14.4. Por ejemplo, al estudiar los sucesos dependientes, encontramos que la probabilidad $P$ de obtener 2 cartas de bastos en dos extracciones sucesivas en una baraja de 52 cartas es igual a $\frac{1}{17}$, si la primera carta *no* se vuelve a poner. Este resultado también puede obtenerse aplicando lo dicho en el Art. 14.3, es decir, como

$$P = \frac{C(13, 2)}{C(52, 2)} = \frac{1}{17}.$$

## EJERCICIOS. GRUPO 52

1. Si las probabilidades de que ocurran $r$ sucesos independientes son $p_1$, $p_2, \ldots, p_r$, respectivamente, demostrar que la probabilidad de que ninguno de ellos ocurra es

$$(1 - p_1)(1 - p_2) \ldots (1 - p_r).$$

2. Demostrar el Teorema 1 (Art. 14.4) usando la definición de frecuencia para probabilidad (Definición 2, Art. 14.2). *Sugerencia:* Utilizar el hecho de que si $p$ es la probabilidad de ocurrencia de un suceso en una prueba aislada, entonces el número esperado de ocurrencias en $n$ pruebas es igual a $np$.

3. Establecer el Corolario 1 del Teorema 1 (Art. 14.4).

4. Establecer el Corolario 2 del Teorema 1 (Art. 14.4).

5. Establecer el Teorema 2 (Art. 14.4).

6. Enunciar y demostrar un corolario del Teorema 2 que sea análogo al Corolario 1 del Teorema 1 (Art. 14.4).

7. Demostrar el Teorema 3 (Art. 14.4) usando la definición de frecuencia para probabilidad (Definición 2, Art. 14.2).

8. Un dado se tira dos voces. Calcular la probabilidad de obtener un as en el segundo tiro pero no en el primero.

9. Un dado se tira tres veces. ¿Cuál es la probabilidad de obtener un as únicamente en el segundo tiro?

10. Una moneda se tira 4 veces. Calcular la probabilidad de obtener cara en el tercer tiro únicamente.

11. ¿Cuál es la probabilidad de obtener exactamente 3 cartas en 4 tiros de una moneda y una suma igual a 11 en un tiro de 2 dados?

12. Las probabilidades de que *A* y *B* resuelvan un cierto problema son $\frac{1}{3}$ y $\frac{3}{5}$, respectivamente. Calcular la probabilidad de que el problema sea resuelto por lo menos por uno de los dos.

13. Las probabilidades de que *A, B* y *C* resuelvan un cierto problema son $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{5}$ y $\frac{2}{3}$, respectivamente. ¿Cuál es la probabilidad de que el problema sea resuelto por lo menos por uno de los tres?

14. Si *A, B* y *C* tiran a un blanco con probabilidades de acertar de $\frac{2}{7}$, $\frac{2}{5}$ y $\frac{2}{3}$, respectivamente, ¿cuál es la probabilidad de que alguno acierte al hacer un tiro cada uno?

15. Resolver el Ejemplo 2 (Art. 14.4) considerando los siguientes sucesos mutuamente excluyentes: Tanto *A* como *B* aciertan; *A* acierta y *B* falla; *B* acierta y *A* falla.

16. Resolver el Ejemplo 2 (Art. 14.4), utilizando el siguiente razonamiento: Si *A* prueba primero, la probabilidad de que resuelva el problema es $\frac{2}{3}$; llamemos a esto el suceso 1. Si *A* falla, la probabilidad de que *B* trate de resolver el problema es $1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$, y, por tanto, la probabilidad de que *B* resuelva el problema es $\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$; llamemos a esto el suceso 2. Para terminar, considérense los sucesos 1 y 2 como mutuamente excluyentes.

17. Resolver el Ejemplo 2 (Art. 14.4) por el método del ejercicio 16, pero permitiendo que *B* pruebe primero.

18. Resolver el ejercicio 12 por cada uno de los métodos de los ejercicios 15, 16 y 17.

19. Dos bolas se extraen en sucesión de una bolsa que contiene 2 bolas blancas y 4 bolas negras. Calcular la probabilidad de que la primera bola sea blanca y la segunda sea negra si (a) la primera bola se vuelve a poner; (b) la primera bola no se vuelve a poner.

20. Si en el ejercicio 19 se extraen 2 bolas al azar, ¿cuál es la probabilidad de que las 2 sean del mismo color?

21. Si en el ejercicio 19 se extraen 2 bolas al azar, ¿cuál es la probabilidad de que una sea blanca y la otra negra? Sumar las probabilidades obtenidas en los ejercicios 20 y 21 e interpretar el resultado.

22. Una bolsa contiene 2 bolas blancas y 6 bolas negras; una segunda bolsa contiene 5 bolas blancas y 3 bolas negras. Si se saca una bola de cada bolsa, ¿cuál es la probabilidad de que ambas bolas sean del mismo color?

23. En el ejercicio 22 calcular la probabilidad de que las 2 bolas sean de diferente color.

24. Si en el ejercicio 22 se selecciona al azar una de las bolsas y se extrae de ella una bola, ¿cuál es la probabilidad de que sea blanca?

25. En el ejercicio 24 calcular la probabilidad de que la bola extraída sea negra.

26. En el ejercicio 22 se extrae una bola de la primera bolsa y se coloca en la segunda bolsa. Luego se extrae al azar una bola entre el nuevo contenido de la segunda bolsa. ¿Cuál es la probabilidad de que la bola extraída sea blanca?

27. En el ejercicio 26 calcular la probabilidad de que la bola extraída de la segunda bolsa sea negra.

28. En el ejercicio 22 se extrae una bola de la segunda bolsa y se coloca en la primera bolsa. Luego se extrae al azar una bola del nuevo contenido de la primera bolsa. Calcular la probabilidad de que esta última bola sea (a) blanca; (b) negra.

29. De una baraja de 52 cartas se extraen al azar 3 cartas. Calcular la probabilidad de que las 3 sean del mismo color.

30. Se extraen sucesivamente 3 cartas de una baraja de 52 cartas, volviendo a poner cada carta antes de extraer la siguiente. ¿Cuál es la probabilidad de que las 3 sean del mismo color?

31. Una tabla de mortalidad muestra que las probabilidades de que $A$ y $B$ vivan 25 años más son 0.9 y 0.8 respectivamente. Calcular la probabilidad de que al final de 25 años (a) ambos estén vivos; (b) ambos hayan muerto; (c) $A$ esté vivo y $B$ haya muerto; (d) $A$ haya muerto y $B$ esté vivo. Sumar los números obtenidos e interpretar el resultado.

32. Las probabilidades de que $A$ y $B$ resuelvan un cierto problema son $\frac{1}{2}$ y $\frac{2}{3}$ respectivamente. Hallar la probabilidad de que (a) ambos resuelvan el problema; (b) ninguno resuelva el problema; (c) $A$ resuelva el problema pero $B$ no; (d) $B$ resuelva el problema pero $A$ no. Sumar estos números e interpretar el resultado.

33. $A$, $B$ y $C$ compiten en 3 carreras separadas, y las probabilidades de que cada uno gane su carrera son $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ y $\frac{1}{4}$ respectivamente. Hallar la probabilidad de que (a) ninguno gane su carrera; (b) solamente uno gane su carrera; (c) solamente 2 ganen sus carreras; (d) los 3 ganen sus carreras. Sumar estos números e interpretar el resultado.

34. Un dado tiene la forma de tetraedro regular con sus caras marcadas 1, 2, 3, 4; otro dado es un cubo ordinario con sus caras marcadas del 1 al 6 inclusive. Si se tiran ambos dados, ¿cuál es la probabilidad de que la suma de los puntos obtenidos sea mayor que 7?

35. Las probabilidades de comentario favorable de un manuscrito que es revisado por 3 lectores independientes son $\frac{3}{5}$, $\frac{2}{3}$ y $\frac{3}{4}$, respectivamente. Calcular la probabilidad de que la mayoría de los comentarios sean favorables.

36. $A$ y $B$ tiran un dado una sola vez cada uno, ganando el primero que obtenga un as. Si $A$ tira primero, calcular las probabilidades respectivas de ganar.

37. $A$ y $B$ tiran un dado alternativamente hasta que uno de ellos gane al obtener un as. Si $A$ tira primero encuentre la probabilidad de que cada uno gane. *Sugerencia:* Utilizar una serie geométrica infinita (Art. 10.5).

38. $A$, $B$ y $C$, en orden, cortan una baraja de 52 cartas, es decir, cada uno saca una carta al azar y la vuelve a poner. Si gana el primero que obtiene una carta de diamantes, calcular las probabilidades respectivas de ganar.

39. $A$, $B$ y $C$, en orden, tiran una moneda hasta que uno de ellos gana al obtener cara. Si el premio es de \$ 35, calcular las esperanzas matemáticas respectivas.

40. $A$ y $B$, en orden, tiran un par de dados alternativamente hasta que gana $A$ al sacar un 6 ó gana $B$ al sacar un 7. Calcular las probabilidades respectivas de ganar.

## 14.5 PRUEBAS REPETIDAS

En esta sección consideramos el problema de pruebas repetidas que es de importancia fundamental en el cálculo de probabilidades y sus aplicaciones. Este problema se presenta cuando un experimento u observación se repite cierto número de veces bajo las mismas condiciones.

Anteriormente hemos usado la palabra *prueba* sin definirla formalmente (Art. 14.2). Para una mayor precisión vamos a definir este término, así como algunos otros que están relacionados con él.

Se dice que un suceso simple interviene en *una prueba* si necesariamente ocurre o deja de ocurrir una sola vez.

Así, por ejemplo, un tiro de una moneda constituye una prueba ya que la moneda da cara o sello una sola vez. Observamos que una prueba posee esencialmente las características de un experimento.

Se dice que un suceso simple interviene en *pruebas repetidas* si necesariamente bajo *exactamente las mismas condiciones,* ocurre o deja de ocurrir, cada vez, una vez.

Así, por ejemplo, dos o más tiros de una moneda constituyen pruebas repetidas, pues en cada tiro debe obtenerse cara o sello una vez, bajo exactamente las mismas condiciones.

Si un suceso ocurre en una prueba, se acostumbra decir que se *acierta,* y que la probabilidad de que el suceso ocurra es la *probabilidad de acertar.* Análogamente, si un suceso no ocurre en una prueba, se acostumbra decir que el *suceso falla,* y que la probabilidad de que el *suceso* no ocurra es la *probabilidad de fallar.*

Como una introducción al teorema 4 consideremos el ejemplo siguiente:

**Ejemplo 1.** Calcular la probabilidad $P$ de obtener exactamente 3 ases en 5 tiros de un dado.

SOLUCION. Cada tiro del dado es una prueba. Llamemos acertar al acto de obtener un as. Entonces, en una prueba, la probabilidad de acertar es $1/6$ y la probabilidad de fallar es $1 - 1/6 = 5/6$. Entonces debemos determinar la probabilidad de acertar 3 veces en 5 pruebas.

Ya que la probabilidad de acertar en una prueba es $1/6$, la probabilidad de 3 aciertos sera $(1/6)^3$ en 3 pruebas especificadas (Corolario 2, Teorema 1, Art. 14.4). Como se efectúan 5 pruebas, los 3 aciertos *deben ir acompañados de* 2 fallas. Ya que la probabilidad de una falla es $5/6$, la probabilidad de 2 fallas será $(5/6)^2$. Por tanto, por el teorema de multiplicación (Teorema 1, Art. 14.4), la probabilidad de 3 aciertos y 2 fallas es $(1/6)^3(5/6)^2$. Pero estos 3 aciertos pueden ocurrir en 3 *cualesquiera* de las 5 pruebas. Así, por ejemplo, los 3 ases pueden aparecer en los 3 primeros tiros o en los tiros segundo, cuarto y quinto, etc. Es decir, podemos obtener los 3 ases en tantas formas diferentes como el número de selecciones posibles de 3 objetos diferentes entre 5 objetos, o sea en $C(5, 3)$ formas. Ya que estas formas diferentes son mutuamente excluyentes, se concluye por el teorema de adición (Teorema 3, Art. 14.4) que la probabilidad buscada es la suma de $C(5,3)$ términos iguales a $(1/6)^3(5/6)^2$, es decir

$$P = C(5,3)\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{5\cdot 4}{1\cdot 2}\cdot\frac{1}{6^3}\cdot\frac{25}{6^2} = \frac{125}{3888}.$$

El ejemplo anterior es un caso particular del siguiente teorema general:

**Teorema 4.** *(Ley del binomio). Sean $p$ la probabilidad de acertar y $q = 1 - p$ la probabilidad de fallar de un suceso en una prueba. Entonces la probabilidad $P_1$ de exactamente $r$ aciertos en $n$ pruebas repetidas está dada por la fórmula*

$$P_1 = C(n,r)p^r p^{n-r}, \qquad r \leq n. \tag{1}$$

DEMOSTRACION. La probabilidad de que el suceso ocurra en $r$ pruebas especificadas en $p^r$ y la de que falle en las $n - r$ pruebas restantes es $q^{n-r}$ (Corolario 2, Teorema 1, Art. 14.4). La probabilidad de $r$ aciertos especificados y las correspondientes $n - r$ fallas es entonces $p^r q^{n-r}$ (Teorema 1, Art. 14.4). Pero los $r$ aciertos pueden seleccionarse entre las $n$ pruebas en $C(n,r)$ formas diferentes, todas las cuales son igualmente probables y mutuamente excluyentes. Por tanto, por el Teorema 3 (Artículo 14.4), la probabilidad buscada $P_1$ está dada por la fórmula (1).

NOTA 1. Por la relación (2) del Art. 13.7, vemos que $P_1$, tal como aparece en la relación (1), es el término de orden $(n - r + 1)$ del desarrollo binomial de $(p + q)^n$. El Teorema 4 es, por tanto, conocido con el nombre de *Ley del binomio.*

Por medio del Teorema 4 se puede establecer fácilmente el teorema siguiente:

**Teorema 5.** *Sea $p$ la probabilidad de acertar y $q = 1 - p$ la probabilidad de fallar de un suceso en una prueba. Entonces la probabilidad $P_2$ de obtener por lo menos $r$ aciertos en $n$ pruebas repetidas está dada por la relación*

$$P_2 = \sum_{r=n}^{r=r} C(n,r)p^n q^{n-r}, \qquad r \leq n. \tag{2}$$

DEMOSTRACION. Si el suceso ocurre *por lo menos* $r$ veces en $n$ pruebas, entonces debe ocurrir, o bien *exactamente* $n$ veces, *o exactamente* $n - 1$ veces, *o exactamente* $n - 2$ veces, . . . , *o exactamente* $r$ veces. En otras palabras, tenemos los siguientes $n - r + 1$ sucesos mutuamente exclu-

| Suceso Nº | Sucede exactamente | Probabilidad por el Teorema 4 |
|---|---|---|
| 1 | $n$ veces $= n - (1) + 1$ | $C(n,n)p^n q^{n-n} = p^n$ |
| 2 | $n - 1$ veces $= n - (2) + 1$ | $C(n,n-1)p^{n-1}q$ |
| 3 | $n - 2$ veces $= n - (3) + 1$ | $C(n,n-2)p^{n-2}q^2$ |
| . . . . | . . . . . . . . . . . . . . . . | . . . . . . . . . |
| $n - r + 1$ | $r$ veces $= n - (n - r + 1) + 1$ | $C(n,r)p^r q^{n-r}$ |

Sumando estas probabilidades, por el teorema de adición (Teorema 3, Art 14.4) tenemos

$$(3)\qquad P_2 = p^n + C(n, n-1)\,p^{n-1}q + C(n, n-2)\,p^{n-2}q^2 + \ldots + C(n, r)\,p^r q^{n-r},$$

que puede escribirse inmediatamente en la forma de la relación (2) utilizando la notación sigma (Art. 13.6).

NOTA 2. Por el teorema 8 del Art. 13.7, el segundo miembro de (3) representa los primeros $n - r + 1$ términos del desarrollo del binomio de $(p + q)^n$.

**Ejemplo 2.** Una moneda se tira 8 veces. ¿Cuál es la probabilidad de que por lo menos aparezcan 6 caras?

SOLUCION. En un tiro la probabilidad de cara es $p = \frac{1}{2}$; y por tanto la probabilidad de sello es $q = 1 - p = \frac{1}{2}$. En este problema el número de pruebas es $n = 8$. Entonces, de acuerdo con el Teorema 5, la probabilidad buscada $P_2$ es la suma de las probabilidades de obtener exactamente 8 caras, exactamente 7 caras, y exactamente 6 caras. Es decir,

$$P_2 = C(8, 8)\left(\frac{1}{2}\right)^8 + C(8, 7)\left(\frac{1}{2}\right)^7\left(\frac{1}{2}\right) + C(8, 6\left(\frac{1}{2}\right)^6\left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$= \frac{1}{2^8} + 8\cdot\frac{1}{2^8} + \frac{8\cdot 7}{1\cdot 2}\cdot\frac{1}{2^8} = \frac{37}{256}.$$

**Ejemplo 3.** Se extrae una carta al azar de una baraja de 52 cartas. Luego la carta se vuelve a poner y la baraja se mezcla cuidadosamente. Este proceso se repite seis veces. ¿Cuál es la probabilidad de obtener por lo menos una carta de corazones?

SOLUCION. Al principio, el estudiante se sentirá inclinado a resolver este problema por el método del ejemplo anterior, es decir, a sumar las seis probabilidades correspondientes a exactamente una carta de corazones, exactamente 2 cartas de corazones, . . . , exactamente 6 cartas de corazones. Pero el mismo resultado puede obtenerse con mayor facilidad si calculamos la probabilidad de *fallar* en la obtención de cartas de corazones en las seis pruebas y luego restamos esta probabilidad de la unidad.

La probabilidad de obtener una carta de corazones en una prueba es $\frac{13}{52} = \frac{1}{4}$; por tanto la probabilidad de fallar es $1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$. Entonces la probabilidad de fallar en la obtención de corazones en seis pruebas sucesivas es $(\frac{3}{4})^6$. Por tanto, la probabilidad de *no* fallar en la obtención de corazones en seis pruebas sucesivas es $1 - \left(\frac{3}{4}\right)^6 = 1 - \frac{729}{4096} = \frac{3367}{4096}$ y esta es la probabilidad de obtener por lo menos una carta de corazones en seis pruebas.

NOTA 3. En el artículo siguiente se verá que la probabilidad buscada en el ejemplo 3 es la suma de los términos del desarrollo de un binomio cuyo valor es la unidad menos uno de dichos términos. Por tanto es más fácil obtener el resultado buscado calculando el término exceptuado y restándolo de la unidad.

## 14.6. DESARROLLO DEL BINOMIO

En los teoremas 4 y 5 del artículo anterior se observó que las diversas probabilidades que aparecen en un problema de pruebas repetidas son los términos del desarrollo del binomio $(p+q)^n$, en donde $p$ es la probabilidad de acertar y $q = 1 - p$ es la probabilidad de fallar en cada una de $n$ pruebas. Por el Teorema 8 (Art. 13.7), este desarrollo puede expresarse en la forma

$$(q+p)^n = \sum_{r=0}^{n} C(n,r)\,q^{n-r}p^r,$$

que también puede escribirse en la forma

$$(1) \qquad (q+p)^n = C(n,0)\,p^0q^n + C(n,1)\,pq^{n-1} + C(n,2)\,p^2q^{n-2} + \ldots + C(n,n-1)\,p^{n-1}q + C(n,n)\,p^nq^0,$$

siendo $C(n,0) = 1$, $C(n,1) = n, \ldots, C(n,n) = 1$ los coeficientes binómicos ordinarios. Los términos de este desarrollo, tomados en orden, representan, respectivamente, las probabilidades en $n$ pruebas de cero aciertos y $n$ fallas, 1 acierto y $n - 1$ fallas, 2 aciertos y $n - 2$ fallas, ..., $n$ aciertos y cero fallas. Por tanto, estos términos representan las probabilidades de todos los casos posibles y, ya que los sucesos son mutuamente excluyentes, la suma de probabilidades debe ser igual a la unidad. También se llega a esta misma conclusión recordando que $q + p = 1$, y, por tanto, $(q+p)^n = 1$.

En general, los términos sucesivos del desarrollo (1) aumentan hasta cierto valor (o posiblemente hasta dos valores iguales) y luego decrecen. Este es el término *máximo* y tiene la propiedad de que su razón con el término anterior y posterior es mayor o igual que la unidad. Ahora determinaremos este término máximo. Concretamente, determinaremos el valor de $r$ (número de aciertos) para el cual el término general $C(n,r)\,q^{n-r}p^r$ del desarrollo del binomio $(q+p)^n$ es un máximo. Primeramente escribimos las razones

$$(2) \qquad \frac{\text{término de orden } r+1}{\text{término de orden } r} \geq 1,$$

$$(3) \qquad \frac{\text{término de orden } r+1}{\text{término de orden } r+2} \geq 1.$$

De (2) obtenemos

$$\frac{C(n,r)\,q^{n-r}p^{r}}{C(n,r-1)\,q^{n-r+1}p^{r-1}}=\frac{p}{q}\cdot\frac{n!}{r!(n-r)!}\cdot\frac{(r-1)!(n-r+1)!}{n!}$$
$$=\frac{p}{q}\cdot\frac{n-r+1}{r}\geq 1,$$

de donde $np-pr+p\geq qr.$

Ya que $q=1-p$, $np-pr+p\geq r-pr$, o sea

(4) $$np+p\geq r.$$

De (3) tenemos

$$\frac{C(n,r)\,q^{n-r}p^{r}}{C(n,r+1)\,q^{n-r-1}p^{r+1}}=\frac{q}{p}\cdot\frac{n!}{r!(n-r)!}\cdot\frac{(r+1)!(n-r-1)!}{n!}$$
$$=\frac{q}{p}\cdot\frac{r+1}{n-r}\geq 1,$$

de donde $qr+q\geq np-pr.$

Ya que $qr=(1-p)r$, $r-pr+q\geq np-pr$, o sea

(5) $$r\geq np-q.$$

Por tanto, de (4) y (5), tenemos

(6) $$np+p\geq r\geq np-q.$$

En (6) vemos que el entero $r$ está comprendido entre dos valores que difieren el uno del otro en una unidad, pues $p+q=1$. Este resultado se enuncia así:

**Teorema 6.** *Sea $p$ la probabilidad de acertar y $q=1-p$ la probabilidad de fallar de un suceso en una prueba. Entonces en $n$ pruebas repetidas, el número de aciertos $r$ que tiene la mayor probabilidad de ocurrir es un entero comprendido entre $np+p$ y $np-q$.*

Se acostumbra tomar como valor de $r$ que produce la probabilidad máxima el número $np$. En consecuencia establecemos la siguiente definición motivada por el Teorema 6:

Definición. El *valor más probable* del número de aciertos $r$ en $n$ pruebas repetidas, es el entero al que corresponde la mayor probabilidad de ocurrencia comparada con la de cualquier otro valor de $r$. Su valor es, aproximadamente, igual a $np$ en donde $p$ es la probabilidad de acertar en una sola prueba.

En seguida ilustraremos esta teoría del desarrollo del binomio por medio de varios casos numéricos. En nuesttro primer ejemplo, consideraremos, por sencillez, únicamente los coeficientes binómicos del desarrollo de $(q+p)^n$.

**Ejemplo 1.** Usando el desarrollo del binomio $(q + p)^8$, trazar una gráfica en la que cada punto tenga como abscisa el orden del término y como ordenada el valor del coeficiente binómico correspondiente.

SOLUCION. Del Art. 13.7, para $n = 8$, se obtienen inmediatamente los nueve coeficientes binómicos, que tomados en orden, son

$$1,\ 8,\ 28,\ 56,\ 70,\ 56,\ 28,\ 8,\ 1.$$

Como se muestra en la figura 41, las coordenadas de los puntos son $(1, 1)$, $2, 8)$, $3, 28)$, etc. Luego se traza una curva continua que pase por estos puntos. Esta curva recibe el nombre de *gráfica* de los coeficientes, aunque es sólo una aproximación, pues no existen datos para trazar la gráfica entre los puntos mencionados. Pero conforme $n$, o sea el número de términos, aumenta, la gráfica resultante se aproxima más y más a la forma mostrada en la figura 41. Esta forma de campana es típica de las *curvas de probabilidad* que estudiaremos más adelante.

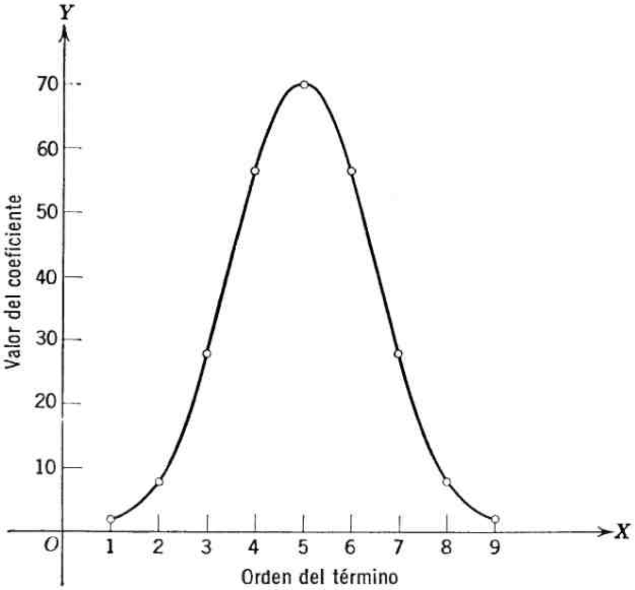


FIG. 41.

En el siguiente ejemplo numérico consideraremos la representación gráfica de los valores de los términos individuales, y no solamente de sus coeficientes binómicos, para el desarrollo de $(q + p)^n$.

**Ejemplo 2.** Calcular los valores de los términos individuales del desarrollo del binomio $(\frac{2}{5}+\frac{3}{5})^6$, y construir una tabla con las seis siguientes columnas de valores correspondientes:

(1) Número de orden del término en el desarrollo.
(2) Valor de $r$ (número de aciertos).
(3) Probabilidad de exactamente $r$ aciertos.
(4) Probabilidad de por lo menos $r$ aciertos.
(5) Frecuencia simple.
(6) Frecuencia acumulativa.

Trazar dos curvas que tengan como abscisas comunes los valores de la columna (2), y como ordenadas los valores de las columnas (3) y (4), respectivamente. Obtener el valor más probable de $r$ y comprobarlo en la tabla.

SOLUCION. La tabla 1 muestra los valores buscados.

TABLA 1

DESARROLLO DE $(\frac{2}{5}+\frac{3}{5})^6$

$n=6,\ p=\frac{3}{5}, q=1-p=\frac{2}{5}$

| Orden del término | $r$ | Probabilidad | | Frecuencia | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | Exactamente $r$ aciertos en $n$ *pruebas = valor* del término | Por lo menos $r$ aciertos en $n$ pruebas | Simple | Acumulativa |
| | | $P_1=C(n,r)p^rq^{n-r}$ | $P_2=\sum_{r=0}^{n}C(n,r)p^rq^{n-r}$ | $nP_1$ | $nP_2$ |
| (1) | (2) | (3) | (4) | (5) | (6) |
| 1 | 0 | 0.004096 | 1.000000 | 0.024576 | 6.000000 |
| 2 | 1 | 0.036864 | 0.995904 | 0.221184 | 5.975424 |
| 3 | 2 | 0.138240 | 0.959040 | 0.829440 | 5.754240 |
| 4 | 3 | 0.276480 | 0.820800 | 1.658880 | 4.924800 |
| 5 | 4 | 0.311040 | 0.544320 | 1.866240 | 3.265920 |
| 6 | 5 | 0.186624 | 0.233280 | 1.119744 | 1.399680 |
| 7 | 6 | 0.046656 | 0.046656 | 0.279936 | 0.279936 |
| Totales | | 1.000000 | | 6.000000 | |

Las columnas (3) y (4) se obtienen de los Teoremas 4 y 5, respectivamente, del Art. 14.5. Las columnas (5) y (6) dan la frecuencia o número esperado de ocurrencias en $n(=6)$ pruebas (Art. 14.2). Los valores de la columna (5) constituyen lo que se conoce como una *distribución de frecuencias simples* y los valores de la columna (6) forman una *distribución de frecuencias acumulativas.* Las columnas (5) y (6) se corresponden con las columnas (3) y (4), respectivamente, siendo (3) y (5) valores simples y (4) y (6) valores acumulativos.

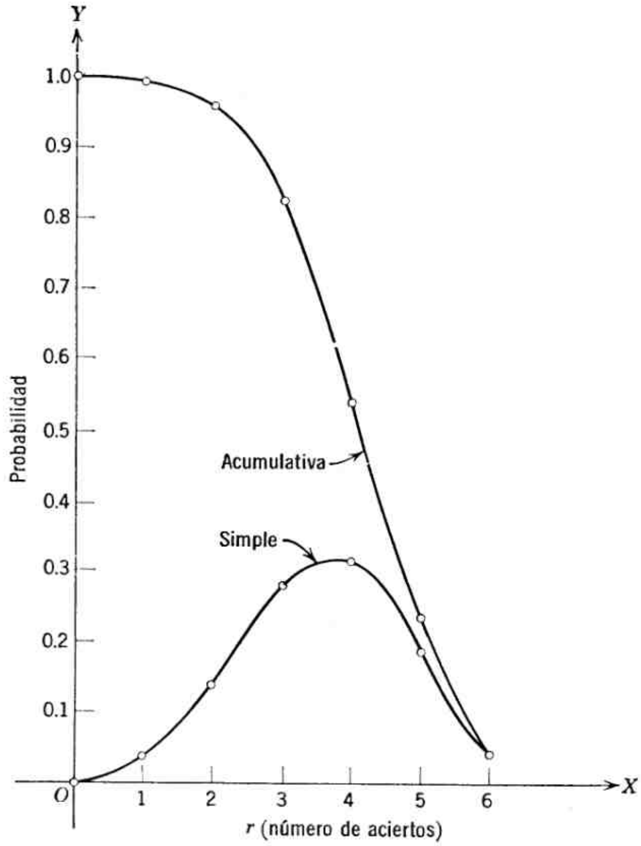


FIG. 42.

Obsérvese que la suma de los valores de la columna (3) es la unidad, o sea la certeza. Esto debe necesariamente ser así, pues representa la suma de las probabilidades de todos los casos posibles. Una observación similar es aplicable a la columna (5) en donde la suma de valores es 6, o sea el número total de pruebas.

Se llevan en la gráfica los valores de la columna (2) como abscisas y los valores de las columnas (3) y (4) como ordenadas. Así resultan las dos curvas mostradas en la figura 42 y que son ejemplos de *curvas de* *probabilidad*. Observamos que la curva obtenida con los valores simples tiene aproximadamente la forma de campana, típica de las curvas de probabilidad. Esta curva no es simétrica como la de la figura 41, recibiendo el nombre de *asimétrica*. Sin embargo, si $p = q = \frac{1}{2}$, la curva de probabilidades simples resulta simétrica. Los puntos sobre la curva acumulativa dan la probabilidad de $r$ o más aciertos.

Por el Teorema 6, el valor más probable de $r$ está dado por

$$np + p > r > np - q.$$

Para $n = 6$, $p = \dfrac{3}{5}$, $q = \dfrac{2}{5}$, $\qquad 6 \cdot \dfrac{3}{5} + \dfrac{3}{5} > r > 6 \cdot \dfrac{3}{5} - \dfrac{2}{5}$

o sea $\qquad 4\dfrac{1}{5} > r > 3\dfrac{1}{5}$.

Por tanto, el valor más probable de $r$ es 4, y para este valor la tabla nos da $P_1 = 0.31104$, que es el valor máximo de la probabilidad simple.

También podemos llevar en una gráfica los valores de las columnas (5) y (6), pero ya que son proporcionales, respectivamente, a los valores de las columnas (3) y (4), las curvas resultantes tendrían un aspecto análogo a las de la figura 42. Estas curvas recibirían los nombres respectivos de *curva de frecuencias simples* y *curva de frecuencias acumulativas*.

NOTA. Este ejemplo se ha construido para un número reducido de pruebas, que fue $n = 6$. Para valores de $n$ mayores, el número de operaciones aritméticas aumenta considerablemente, pero las curvas de probabilidad presentan las mismas características básicas. Conforme $n$ aumenta la gráfica de las probabilidades simples se acerca más y más a una curva continua en forma de campana.

Cuando los elementos de un conjunto son proporcionales a los términos del desarrollo de un binomio, se dice que forman una *distribución binómica*. Existen varios tipos de distribuciones, entre ellas se cuenta la *distribución normal* que corresponde a la muy conocida *curva normal de probabilidad*. Estas distribuciones y sus curvas de frecuencias correspondientes son de importancia fundamental en la ciencia llamada estadística, pero su discusión cae fuera del campo de este libro.

## EJERCICIOS. GRUPO 53

1. Demostrar el Teorema 5 (Art. 14.5) considerando que los sucesos ocurren exactamente $r$, $r + 1$, $r + 2, \ldots, n$ veces, y comprobar que el resultado es el mismo que el de la relación (2), pero que la suma aparece en orden inverso.

2. Una moneda se tira 6 veces. ¿Cuál es la probabilidad de obtener exactamente 2 caras?

3. Un dado se tira 6 veces. Calcular la probabilidad de obtener exactamente 5 ases.

4. La probabilidad de que $A$ gane en cierto juego es $\frac{1}{3}$. Si se juegan 7 de

estos juegos, exactamente bajo las mismas condiciones, ¿cuál es la probabilidad de que $A$ gane exactamente 4 de ellos?

5. Se tira una moneda $n$ veces. Demostrar que la probabilidad de obtener exactamente $r$ sellos es $C(n, r) \div 2^n$.

6. Se saca una carta al azar de una baraja de 52 cartas. En seguida la carta se vuelve a poner y la baraja se mezcla cuidadosamente, y de nuevo se saca una carta al azar y luego se vuelve a poner. Esta operación se efectúa un total de 5 veces. ¿Cuál es la probabilidad de obtener exactamente 3 espadas?

7. De una bolsa que contiene 3 bolas blancas y 2 negras se saca una bola al azar. La bola se vuelve a poner, mezclando las bolas cuidadosamente, y de nuevo se extrae una bola al azar. Este proceso se efectúa un total de 4 veces. Calcular la probabilidad de obtener (a) exactamente 2 bolas blancas; (b) exactamente 4 bolas negras.

8. Se efectúan 6 tiros de un par de dados. ¿Cuál es la probabilidad de obtener exactamente tres sietes?

9. Un jugador de beisbol cuyo promedio de bateo es 0.300, va al bate 4 veces en un determinado juego. Calcular la probabilidad de que pegue exactamente 2 veces.

10. En promedio, cierto estudiante resuelve correctamente 5 de cada 6 problemas. ¿Cuál es la probabilidad de que resuelva exactamente 6 problemas en un examen que consta de 8 problemas?

11. Una moneda se tira 10 veces. Hallar la probabilidad de obtener por lo menos 8 caras.

12. Un dado se tira 7 veces. Hallar la probabilidad de obtener por lo menos 5 ases.

13. Se efectúan 5 tiros con un par de dados. Hallar la probabilidad de obtener por lo menos cuatro sietes.

14. La probabilidad de que $A$ gane en un cierto juego es $\frac{2}{3}$. ¿Cuál es la probabilidad de que en una serie de 6 de estos juegos gane por lo menos en 4 de ellos?

15. En promedio, un tirador pega en el blanco 300 veces en 400 pruebas. Hallar la probabilidad de que pegue en el blanco por lo menos 3 veces en 5 pruebas.

16. En la manufactura de cierto artículo se ha observado que en un volumen de producción grande el 1% de los artículos resultan defectuosos. Si se toma una muestra de 10 artículos, ¿cuál es la probabilidad de que no más de 2 sean defectuosos?

17. La calificación aprobatoria en un examen que consta de 10 problemas es 70%. En promedio, cierto estudiante resuelve correctamente 4 de cada 5 problemas. Calcular la probabilidad de que apruebe el examen.

18. Se encuentra por observación que, en promedio, uno de cada 50 automóviles tiene faros delanteros defectuosos. Hallar la probabilidad de que entre 10 automóviles tomados al azar, por lo menos 1 pase la revisión.

19. La probabilidad de que un hombre de 50 años viva 20 años más es 0.6. Dado un grupo de 5 hombres de 50 años, ¿cuál es la probabilidad de que por lo menos 4 lleguen a los 70 años?

20. $A$ y $B$ juegan un juego en el cual la habilidad de $A$ es a la habilidad de $B$ como 3 es a 2. ¿Cuál es la probabilidad de que $A$ gane por lo menos un juego entre 4?

21. Si $q$ es la probabilidad de fallar en una prueba, demostrar que la probabilidad de acertar por lo menos una vez en $n$ pruebas es $1 - q^n$.

22. Si $p$ es la probabilidad de acertar en una prueba, demostrar que la probabilidad de fallar por lo menos una vez en $n$ pruebas es $1 - p^n$.

23. Una moneda se tira 8 veces. ¿Cuál es la probabilidad de obtener un número impar de caras?

24. $A$ tira un dado hasta que aparezca un 6. Calcular la probabilidad de que tenga que hacer (a) por lo menos 10 tiros; (b) exactamente 10 tiros.

25. Una caja contiene 6 tarjetas numeradas. Se extrae una tarjeta al azar y luego se vuelve a poner. Se mezclan las tarjetas cuidadosamente y se extrae otra al azar y luego se vuelve a poner. Esta operación se efectúa un total de 6 veces. ¿Cuál es la probabilidad de que se hayan sacado todas las tarjetas?

26. Una moneda se tira 8 veces. Hallar el número más probable de caras y la probabilidad de ese número.

27. Una moneda se tira 10 veces. Hallar el número más probable de sellos y la probabilidad de ese número.

28. Un dado se tira 12 veces. Hallar el número más probable de ases y la probabilidad de ese número.

29. La probabilidad de que $A$ gane cierto juego es $\frac{1}{3}$. Calcular el número más probable de victorias en una serie de 12 juegos y la probabilidad de ese número.

30. En el Teorema 6 (Art. 14.6), si $np + p$ y $np - q$ son enteros, demostrar que $r$ tiene dos valores, es decir, que existen dos términos iguales en el desarrollo de $(q + p)^n$, siendo estos términos mayores que cualquier otro término. Comprobar esto en el desarrollo de $(\frac{1}{2} + \frac{1}{2})^7$.

31. Una moneda se tira 9 veces. Hallar la probabilidad de cualquiera de los dos números más probables de caras.

32. En una prueba, sea $p$ la probabilidad de acertar en un suceso y $q$ la probabilidad de fallar. Si en $n$ pruebas repetidas $np$ es un entero, demostrar que el número más probable de fallas es $nq$.

33. Trazar la gráfica de los coeficientes binómicos de $(q + p)^{10}$ como en el ejemplo 1 del Art. 14.6.

34. Trazar la gráfica de los coeficientes binómicos de $(q + p)^{15}$ como en el ejemplo 1 del Art. 14.6.

35. Trazar las curvas de frecuencias simples y acumulativas del desarrollo del binomio del ejemplo 2 del Art. 14.6.

En cada uno de los ejercicios 36-40 construir una tabla análoga a la del ejemplo 2 del Art. 14.6, trazar los mismos tipos de curvas y hacer el mismo tipo de análisis.

36. $(\frac{1}{2} + \frac{1}{2})^6$. 37. $(\frac{5}{6} + \frac{1}{6})^6$. 38. $(\frac{3}{4} + \frac{1}{4})^{10}$. 39. $(\frac{2}{3} + \frac{1}{3})^9$.
40. $(\frac{7}{10} + \frac{3}{10})^{15}$.

# 15

# Determinantes

## 15.1 INTRODUCCION

El tema de los determinantes ha sido ampliamente estudiado desde hace mucho tiempo. Aunque el concepto de determinante tuvo su origen en la solución de sistemas de ecuaciones lineales, posteriormente ha tenido muchas otras aplicaciones. Así, por ejemplo, como se observará en varios ejercicios de este capítulo, las ecuaciones de ciertas curvas pueden escribirse en forma determinante. También hay un gran número de casos en los que una propiedad o relación depende del valor de un determinante especial. Además, los determinantes son útiles en el estudio de las matrices, las cuales, como ya se observó previamente (Art. 1.6), son muy importantes en las matemáticas modernas y en la física.

Las propiedades y el cálculo de los determinantes pueden comprenderse con gran facilidad. Las dificultades que el estudiante puede encontrar al empezar a estudiar este tema se deben, principalmente, al hecho de que tiene que aprender algunas nuevas reglas de operación. Al ordenar el material de este capítulo se ha tomado en cuenta este hecho. En consecuencia, empezaremos mostrando tanto los principios como las operaciones aplicados a los determinantes más sencillos.

## 15.2. NATURALEZA DE UN DETERMINANTE

Es necesario que desde el principio el estudiante tenga alguna idea acerca de la forma y naturaleza de un determinante. Por tanto, establecemos que un *determinante de orden n*, designado por $\Delta_n$, se representa por un arreglo en forma de cuadrado de $n^2$ cantidades llamadas *elementos*, dispuestos en *n filas* y *n columnas*, como se muestra en (1).

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & \dots & l_1 \\ a_2 & b_2 & \dots & l_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n & b_n & \dots & l_n \end{vmatrix} \tag{1}$$

Se acostumbra encerrar este arreglo entre dos líneas rectas verticales.

Por conveniencia, se utilizan números para referirse a las filas o renglones y a las columnas. Así por ejemplo, la primera fila consta de los $n$ elementos $a_1, b_1, \dots, l_1$, la segunda de los $n$ elementos $a_2, b_2, \dots, l_2$, y así sucesivamente. Análogamente, la primera columna consta de los $n$ elementos $a_1, a_2, \dots, a_n$, la segunda de los $n$ elementos $b_1, b_2, \dots, b_n$, y así sucesivamente. Debe hacerse destacar que hasta ahora no hemos definido lo que es un determinante; únicamente hemos dado una descripción de cómo se representa y no de su valor. Aunque en un artículo posterior daremos una definición precisa, aquí será suficiente mencionar que el valor de un determinante es igual a una suma algebraica de términos, cada uno de los cuales es el producto de $n$ elementos, tomándose uno, y sólo uno, de cada fila y de cada columna.

Ya que $n$ representa el *orden* de un determinante, se sigue que un determinante de orden 2 tiene 2 filas y 2 columnas, un determinante de orden 3 tiene 3 filas y 3 columnas, y así sucesivamente. Por tanto, el determinante de mínimo orden se obtiene para $n = 1$ y puede ser representado por $|a_1|$. Este determinante posee solamente un elemento, una fila y una columna, y su valor es, por *definición*, el elemento mismo, es decir, $|a_1| = a_1$. En general, consideraremos solamente determinante de orden $n \geq 2$.

NOTA. El estudiante debe cuidarse de no confundir las líneas verticales usadas como símbolo de un determinante con las líneas verticales usadas para designar el valor absoluto de un número (Art. 2.4). Así, por ejemplo, $|-4| = 4$, como valor absoluto, pero $|-4| = -4$ como determinante.

## 15.3 DETERMINANTES DE SEGUNDO ORDEN

Un determinante de segundo orden se representa así:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix},$$

donde los elementos $a_1$ y $b_2$ se dice que forman la *diagonal principal*. El valor de $\Delta_2$ se *define* como el producto de los elementos en la diagonal principal menos el producto de los elementos en la otra diagonal. Es decir, por definición,

$$(1) \qquad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1,$$

el segundo miembro de esta igualdad se llama *desarrollo* de $\Delta_2$.

Como un ejemplo numérico, tenemos

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 - (-4 \cdot 3) = 2 + 12 = 14.$$

Ahora mostraremos cómo los determinantes de segundo orden están asociados con la solución de un sistema de dos ecuaciones lineales con 2 incógnitas. En el Art. 4.7 se estableció el Teorema 2, una parte del cual repetimos a continuación.

El sistema de ecuaciones lineales

$$(2) \qquad \begin{aligned} a_1x + b_1y &= c_1, \\ a_2x + b_2y &= c_2, \end{aligned}$$

tiene la solución única

$$x = \frac{b_2c_1 - b_1c_2}{a_1b_2 - a_2b_1}, \qquad y = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

solamente si $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$.

Ahora bien, debido a nuestra definición de determinantes de segundo orden, la solución del sistema (2) puede escribirse por medio de determinantes como sigue:

$$(3) \qquad x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}, \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}, \qquad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Observemos que los valores que forman la solución tienen el mismo denominador, el cual se llama *determinante del sistema*. Además, el numerador para el valor de $x$ se obtiene a partir del denominador sustituyendo la primera columna de coeficientes $a_1$ y $a_2$ por los términos independientes $c_1$ y $c_2$, respectivamente. Análogamente, el numerador para el valor de $y$ se obtiene del denominador sustituyendo la *segunda* columna de coeficientes $b_1$ y $b_2$ por los términos independientes $c_1$ y $c_2$, respectivamente.

NOTAS.

1. Es evidente que si uno o más de los elementos de un determinante son intercambiados, el valor del determinante puede cambiar. Por tanto, al dar la solución usando determinantes (3), es muy importante formar las columnas de coeficientes en el *orden* correcto. Por esta razón, el sistema (2) debe escribirse siempre

de manera que en cada columna haya la misma incógnita y que los términos independientes estén en el segundo miembro. Si no figura una incógnita, su coeficiente se toma como cero.

2. La solución por determinantes (3) se conoce con el nombre de *regla de Cramer*. Veremos más adelante que esta regla puede aplicarse al caso general de un sistema de $n$ ecuaciones lineales con $n$ incógnitas, en donde $n$ es cualquier número entero y positivo.

Como una aplicación de la regla de Cramer tenemos el siguiente ejemplo:

**Ejemplo.** Resolver por determinantes el sistema

$$\begin{aligned} 2x + 3y + 1 &= 0, \\ 2y - 3x &= 8. \end{aligned}$$

SOLUCION. De acuerdo con la nota 1, escribiremos el sistema en la forma

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= -1, \\ 3x - 2y &= -8. \end{aligned}$$

El siguiente paso será calcular el determinante $\Delta$ del sistema, pues tendremos una solución única solamente si $\Delta \neq 0$. En este caso resulta

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 2(-2) - 3 \cdot 3 = -4 - 9 = -13.$$

Y por la regla de Cramer tenemos

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -8 & -2 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{2 + 24}{-13} = -2,$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -8 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{-16 + 3}{-13} = 1.$$

Resulta ventajoso estudiar algunas de las propiedades de los determinantes aplicándolas a determinantes de segundo orden. Más adelante estas propiedades se presentarán como teoremas válidos para determinantes de *cualquier* orden.

PROPIEDAD 1. Si las filas de un determinante se intercambian por las columnas correspondientes, el valor del determinante no se altera. Es decir, si

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1,$$

también

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - b_1a_2.$$

De esta propiedad se deduce que cualquier teorema de determinantes que sea válido para las filas es también válido para las columnas.

PROPIEDAD 2. Si todos los elementos de una fila (o columna) son cero, el valor del determinante es cero.

Así, $$\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = 0(b_2) - b_1(0) = 0.$$

PROPIEDAD 3. Si dos filas (o columnas) de un determinante se intercambian, el valor del determinante cambia de signo, pero conserva su valor absoluto.

Así, si $$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1,$$

resulta $$\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = a_2b_1 - a_1b_2 = -\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}.$$

PROPIEDAD 4. Si los elementos correspondientes de dos filas (o columnas) de un determinante son iguales, el valor del determinante es cero.

Así $$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = a_1b_1 - a_1b_1 = 0.$$

PROPIEDAD 5. Si cada elemento de una fila (o columna) de un determinante se multiplica por el mismo número $k$, el nuevo determinante tiene un valor igual a $k$ veces el del determinante original.

Así, $$\begin{vmatrix} ka_1 & kb_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = ka_1b_2 - a_2kb_1$$
$$= k(a_1b_2 - a_2b_1) = k\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}.$$

PROPIEDAD 6. Si cada elemento de una fila (o columna) de un determinante es igual a la suma de dos cantidades, el determinante puede escribirse como la suma de dos determinantes. Esto es,

$$\begin{vmatrix} a_1 + a_1' & b_1 \\ a_2 + a_2' & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1' & b_1 \\ a_2' & b_2 \end{vmatrix}.$$

Ya que $$\begin{vmatrix} a_1 + a_1' & b_1 \\ a_2 + a_2' & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 + a_1'b_2 - a_2b_1 - a_2'b_1$$
$$= (a_1b_2 - a_2b_1) + (a_1'b_2 - a_2'b_1)$$
$$= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1' & b_1 \\ a_2' & b_2 \end{vmatrix}$$

PROPIEDAD 7. Si cada elemento de cualquier fila (o columna) de un determinante se multiplica por el mismo número $k$ y el resultado se suma al elemento correspondiente de otra fila (o columna), el valor del determinante no se altera. Esto es,

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 + kb_1 & b_1 \\ a_2 + kb_2 & b_2 \end{vmatrix}.$$

Ya que $$\begin{vmatrix} a_1 + kb_1 & b_1 \\ a_2 + kb_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 + kb_1b_2 - (a_2b_1 + kb_1b_2)$$

$$= a_1b_2 - a_2b_1 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}.$$

## EJERCICIOS. GRUPO 54

En cada uno de los ejercicios 1-7, hallar el valor del determinante dado.

1. $\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}$. 2. $\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 7 & -4 \end{vmatrix}$. 3. $\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 4 & -2 \end{vmatrix}$. 4. $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -3 & -1 \end{vmatrix}$.

5. $\begin{vmatrix} x & 2a \\ 2x & a \end{vmatrix}$. 6. $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ y^2 & x^2 \end{vmatrix}$. 7. $\begin{vmatrix} x+1 & 2 \\ 2x & x-3 \end{vmatrix}$.

En cada uno de los ejercicios 8 y 9, despejar $x$ en la ecuación dada.

8. $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ x-2 & x \end{vmatrix} = 0.$ 9. $\begin{vmatrix} x & x+6 \\ 1 & x+2 \end{vmatrix} = 0.$

En cada uno de los ejercicios 10-15, usar determinantes para resolver el sistema dado.

10. $2x - 3y = 5,\ 3x + 2y = 1.$ 11. $2x + 3y = 4,\ x - y = 7.$

12. $4x - y = 11,\ y + 2x = 1.$ 13. $2x + 3y = 6,\ x - y + 7 = 0.$

14. $3x + 2y = 0,\ 3y - 2x = 0.$ 15. $x + 2y = 5,\ 2x + 4y = 3.$

16. Demostrar la propiedad 4 (Art. 15.3) utilizando la Propiedad 3.

17. Utilizar la Propiedad 5 (Art. 15.3) para demostrar que si todos los elementos de cualquier fila (o columna) de un determinante tienen un factor común, entonces el desarrollo del determinante también tiene ese factor.

18. Demostrar que $k\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ka_1 & b_1 \\ ka_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & kb_1 \\ a_2 & kb_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_2 \\ ka_1 & kb_2 \end{vmatrix}.$

19. Demostrar que $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 + b_1' \\ a_2 & b_2 + b_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & b_1' \\ a_2 & b_2' \end{vmatrix}.$

20. Como ampliación de la Propiedad 6 (Art. 15.3), demostrar que

$$\begin{vmatrix} a_1 + a_1' + a_1'' & b_1 \\ a_2 + a_2' + a_2'' & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1' & b_1 \\ a_2' & b_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1'' & b_1 \\ a_2'' & b_2 \end{vmatrix}.$$

21. Demostrar la Propiedad 7 (Art. 15.3) demostrando que

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 + ka_2 & b_1 + kb_2 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}.$$

22. Demostrar la Propiedad 7 (Art. 15.3) utilizando las Propiedades 6, 5 y 4.

23. Comprobar la Propiedad 7 (Art. 15.3) por medio de ejemplos numéricos.

24. Demostrar que
$$\begin{vmatrix} a_1 + a_1' & b_1 + b_1' \\ a_2 + a_2' & b_2 + b_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1' & b_1 \\ a_2' & b_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & b_1' \\ a_2 & b_2' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1' & b_1' \\ a_2' & b_2' \end{vmatrix}.$$

25. Demostrar que
$$\begin{vmatrix} a_1 + b_1 & b_1 + b_1' \\ a_2 + b_2 & b_2 + b_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & b_1' \\ a_2 & b_2' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & b_1' \\ b_2 & b_2' \end{vmatrix}.$$

## 15.4. DETERMINANTES DE TERCER ORDEN

Avanzaremos ahora un paso más estudiando los determinantes de tercer orden, que se representan en la forma

$$(1) \qquad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

y que se *definen* por el desarrollo

$$(2) \qquad \Delta_3 = a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 + a_3b_1c_2 + a_2b_3c_1 - a_3b_2c_1.$$

Naturalmente que el desarrollo (2) puede usarse como fórmula para calcular cualquier determinante de tercer orden. Sin embargo, no es conveniente para calcular determinantes con elementos numéricos, pues al sustituir, se debe cuidar de identificar cada elemento con los números de su fila y su columna. Por esta razón se usan reglas que permiten obtener los términos del desarrollo como suma algebraica de productos de elementos a lo largo de ciertas diagonales. Sin embargo, debido a que estas reglas no pueden ser usadas para determinantes cuyo orden sea mayor que 3, no las daremos aquí. En su lugar usaremos un método aplicable a determinantes de cualquier orden y, ya que es el método más conveniente, lo emplearemos de aquí en adelante.

La idea básica usada en este método consiste en expresar el desarrollo de un determinante dado, en función de determinantes de orden inferior. Así, por ejemplo, podemos obtener fácilmente el valor de un determinante de tercer orden expresándolo en función de determinantes de segundo orden, ya que estos últimos pueden calcularse inmediatamente. Este método se conoce con el nombre de *desarrollo por menores.*

**Definición.** Se llama *menor* de un elemento de un determinante, al determinante de orden inmediato inferior que se obtiene suprimiendo la fila y la columna a que pertenece dicho elemento.

Así, por ejemplo, en $\Delta_3$ (1), el menor del elemento $b_1$ se obtiene suprimiendo la primera fila y la segunda columna, que son la fila y la columna a que pertenece $b_1$. El menor es pues $\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}$, que es un determinante de segundo orden. Análogamente, el menor de $c_2$ es $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$, y así sucesivamente.

Existe otro concepto íntimamente ligado al concepto de menor, que es el siguiente:

**Definición.** Se llama *cofactor* de un elemento de un determinante al menor de ese elemento, precedido por el signo más o el signo menos, según que la suma de los números de la fila y la columna a que pertenece el elemento sea par o impar respectivamente.

Por ejemplo, para $\Delta_3$, el cofactor del elemento $c_1$ que está en la primera fila y en la tercera columna es $\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$ ya que $1 + 3 = 4$, es un número par. Análogamente, el cofactor del elemento $a_2$ que está en la segunda fila y en la primera columna es $-\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ ya que $2 + 1 = 3$, es un número impar.

Ahora enunciaremos *sin demostración* un importante teorema que utilizaremos de aquí en adelante para el cálculo de cualquier determinante.

**Teorema.** *El valor de cualquier determinante de orden n es igual a la suma de n productos cada uno de los cuales se forma multiplicando cada elemento de una cualquiera de las filas (o columnas) por su cofactor correspondiente.*

Entonces se dice que el determinante se *ha desarrollado con respecto a los elementos de esta fila particular (o columna).*

Es fácil verificar este teorema para $\Delta_3$. Así tenemos, desarrollando $\Delta_3$ con respecto a los elementos de la primera fila,

$$\begin{aligned} \Delta_3 &= a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \\ &= a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 + a_3b_1c_2 + a_2b_3c_1 - a_3b_2c_1, \end{aligned}$$

lo cual concuerda con el desarrollo (2).

Conviene observar que el teorema afirma que este desarrollo puede ser hecho con respecto a los elementos de *una cualquira* de las filas (o columnas). Así pues, desarrollando $\Delta_3$ con respecto a los elementos de la segunda columna, tenemos

$$\begin{aligned} \Delta_3 &= -b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + b_2 \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_3 \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} \\ &= -a_2b_1c_3 + a_3b_1c_2 + a_1b_2c_3 - a_3b_2c_1 - a_1b_3c_2 + a_2b_3c_1, \end{aligned}$$

lo cual también coincide con el desarrollo (2).

A continuación aplicaremos el teorema a ejemplos numéricos, pero antes conviene hacer la siguiente observación:

NOTA 1. Para lograr una escritura clara y que ocupe menos espacio, escribiremos los elementos negativos de un determinante, de aquí en adelante, con el signo menos sobre el elemento, en lugar de escribir este signo a la izquierda del elemento.

**Ejemplo 1** Calcular el siguiente determinante desarrollándolo con respecto a los elementos de (a) la tercera fila; (b) la segunda columna:

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 4 & \bar{2} \\ \bar{3} & 1 & 0 \\ 5 & \bar{2} & 3 \end{vmatrix}.$$

SOLUCION. (a) $\Delta_3 = 5\begin{vmatrix} 4 & \bar{2} \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - (-2)\begin{vmatrix} 1 & \bar{2} \\ \bar{3} & 0 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ \bar{3} & 1 \end{vmatrix}$

$= 10 - 12 + 3 + 36 = 37.$

(b) $\Delta_3 = -4\begin{vmatrix} \bar{3} & 0 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 1 & \bar{2} \\ 5 & 3 \end{vmatrix} - (-2)\begin{vmatrix} 1 & \bar{2} \\ \bar{3} & 0 \end{vmatrix}$

$= 36 + 3 + 10 - 12 = 37.$

Cuando el teorema se aplica a determinantes de orden elevado, resulta evidente que el desarrollo completo requiere una cantidad considerable de operaciones aritméticas. Por ello conviene hacer la observación de que si una fila determinada (o columna) tiene uno o más ceros, entonces las operaciones se reducen considerablemente desarrollando con respecto a esa fila (o columna). Además, es posible hacer que aparezcan tales ceros, sin alterar el valor del determinante, utilizando la propiedad 7 (Art. 15.3). Veamos una aplicación de este proceso.

**Ejemplo 2.** Calcular el siguiente determinante, transformándolo de manera que aparezcan tantos ceros como sea posible en una fila o en una columna:

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & \bar{3} \\ 4 & \bar{2} & 5 \\ 3 & 2 & \bar{7} \end{vmatrix}.$$

SOLUCION. La Propiedad 7 (Art. 15.3) afirma que si cada elemento de cualquier fila (o columna) de un determinante se multiplica por el mismo número $k$ y el resultado se suma al elemento correspondiente de otra fila (o columna), el valor del determinante no se altera. Así pues, podemos hacer que aparezca un cero en la primera fila y en la primera columna, multiplicando cada elemento de la segunda columna por —2 y sumando el resultado al elemento correspondiente de la primera columna. Esto nos da

$$(3) \qquad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2-2 & 1 & \bar{3} \\ 4+4 & \bar{2} & 5 \\ 3-4 & 2 & \bar{7} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \bar{3} \\ 8 & \bar{2} & 5 \\ \bar{1} & 2 & \bar{7} \end{vmatrix}.$$

Ahora podemos hacer que se anule otro elemento de la primera fila y la tercera columna, multiplicando cada elemento de la segunda columna por 3 y sumando el resultado al elemento correspondiente de la tercera columna. Entonces, de (3) obtenemos

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \bar{3}+3 \\ 8 & \bar{2} & 5-6 \\ \bar{1} & 2 & \bar{7}+6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 8 & \bar{2} & \bar{1} \\ \bar{1} & 2 & \bar{1} \end{vmatrix}.$$

Por claridad hemos mostrado estas operaciones en dos pasos separados, pero ya que la columna utilizada es la misma (la segunda), podemos obtener el resultado en un solo paso. Además, las operaciones aritméticas pueden efectuarse mentalmente y escribir los resultados directamente. De aquí en adelante marcaremos la columna (o fila) que sirve de base con un asterisco. La forma más resumida de las operaciones anteriores es como sigue:

$$(4) \qquad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & \overset{*}{1} & \bar{3} \\ 4 & \bar{2} & 5 \\ 3 & 2 & \bar{7} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 8 & \bar{2} & \bar{1} \\ \bar{1} & 2 & \bar{1} \end{vmatrix}.$$

Desarrollando con respecto a los elementos de la primera fila, obtenemos solamente un menor, es decir

$$\Delta_3 = -\begin{vmatrix} 8 & \bar{1} \\ \bar{1} & \bar{1} \end{vmatrix} = -(-8-1) = 9.$$

En general, utilizando la Propiedad 7 (Art. 15.3), es posible transformar cualquier determinante dado en otro con el mismo valor pero que tenga elementos nulos, con excepción de uno, en cierta fila (o columna). Desarrollando este nuevo determinante con respecto a los elementos de esa fila (o columna), obtenemos un solo determinante del orden inmediato inferior. Obsérvese que si al usar la Propiedad 7 resultan *nulos* todos los elementos de cierta fila (o columna), entonces el determinante dado es igual a cero (Propiedad 2, Art. 15.3).

Ya que este método es eficiente para calcular cualquier determinante, y dado que será el que usaremos de aquí en adelante, a continuación lo enunciamos completo para facilitar consultas futuras.

### Método para calcular un determinante cualquiera

1. Se elige como base una fila (o columna) y se señala con un asterisco.
2. De acuerdo con la Propiedad 7 (Art. 15.3), se multiplica cada elemento de la fila base (o columna) por un número tal que al sumar el resultado con el elemento correspondiente de otra fila (o columna), se obtenga por lo menos un elemento igual a cero.
3. Se repite el paso 2 tantas veces como sea necesario hasta obtener un determinante equivalente en el que todos los elementos de una misma fila (o columna), con excepción de uno, sean cero.
4. Se desarrolla el determinante obtenido en el paso 3 con respecto a la fila (o columna) que tiene todos sus elementos iguales a cero, con excepción de uno de ellos, obteniendo así un solo determinante del orden inmediato inferior.
5. Se repite el proceso anterior con el determinante obtenido en el paso 4.
6. Se continúa este procedimiento hasta obtener un determinante de orden 2, que se calcula como ya hemos indicado.

Veamos el método anterior aplicándolo a un determinante de orden 4. Pero, antes de hacerlo, observemos la siguiente nota:

NOTA 2. El hacer que se anulen algunos elementos por medio de la Propiedad 7 es muy sencillo cuando uno de los elementos de la fila base (o columna) es igual a la unidad. En caso contrario, el proceso requiere el uso de fracciones, complicándose las operaciones aritméticas. Pero en tales casos una aplicación preliminar de la Propiedad 7 puede producir el elemento unitario requerido, tal como puede verse en el ejemplo siguiente.

**Ejemplo 3.** Calcular el determinante

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} \bar{2} & 3 & \bar{5} & 2 \\ 5 & \bar{2} & 7 & 3 \\ 4 & \bar{3} & 6 & 5 \\ \bar{3} & 2 & 2 & 4 \end{vmatrix}.$$

SOLUCION. Primeramente presentamos los diversos pasos necesarios para el cálculo, y a continuación la explicación correspondiente.

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} \bar{2} & 3 & \bar{5} & 2 \\ 5 & \bar{2} & 7 & 3 \\ 4 & \bar{3} & 6 & 5 \\ \bar{3} & 2 & 2 & 4 \end{vmatrix}\begin{matrix} \\ * \\ \\ \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix} 3 & \overset{*}{1} & 2 & 5 \\ 5 & \bar{2} & 7 & 3 \\ 4 & \bar{3} & 6 & 5 \\ \bar{3} & 2 & 2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 11 & \bar{2} & 11 & 13 \\ 13 & \bar{3} & 12 & 20 \\ \bar{9} & 2 & \bar{2} & \bar{6} \end{vmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} 11 & \overset{*}{11} & 13 \\ 13 & 12 & 20 \\ \bar{9} & \bar{2} & \bar{6} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 0 & 11 & 13 \\ 1 & 12 & 20 \\ \bar{7} & \bar{2} & \bar{6} \end{vmatrix}\begin{matrix} \\ * \\ \\ \end{matrix} = -\begin{vmatrix} 0 & 11 & 13 \\ 1 & 12 & 20 \\ 0 & 82 & 134 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 11 & 13 \\ 82 & 134 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 11 & 13 \\ 41 & 67 \end{vmatrix} = 2(737 - 533) = 408.$$

EXPLICACION. Ninguno de los elementos del determinante dado es igual a la unidad. Pero sumando la segunda fila (marcada con un asterisco) a la primera, obtenemos un elemento unitario en la primera fila y en la segunda columna.

Usando la Propiedad 7 con la segunda columna como columna base (marcada con un asterisco), obtenemos 3 elementos nulos en la primera fila.

Desarrollando con respecto a los elementos de la primera fila, obtenemos un solo determinante de orden 3. Ya que este determinante no tiene ningún elemento igual a la unidad, restaremos la segunda columna (marcada con un asterisco) de la primera columna. Esto nos produce un elemento unitario en la segunda fila y en la primera columna. Si ahora sumamos 7 veces los elementos de la segunda fila( marcada con un asterisco) a los elementos correspondientes de la tercera fila, obtenemos un determinante de orden 3 con dos ceros en la primera columna.

Desarrollando este último determinante de orden 3 con respecto a los elementos de la primera columna, resulta un solo determinante de orden 2, el cual se calcula inmediatamente como se muestra en el último paso.

Ya que este artículo está dedicado principalmente a los determinantes de orden 3, consideraremos ahora la resolución de un sistema de 3 ecuaciones lineales con 3 incógnitas:

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= k_1, \\ a_2x + b_2y + c_2z &= k_2, \\ a_3x + b_3y + c_3z &= k_3. \end{aligned} \tag{5}$$

La resolución de este sistema puede efectuarse por el método de eliminación estudiado en el Art. 4.7, lo cual se deja como un ejercicio para el estudiante.

Por medio de determinantes la solución puede escribirse en la forma

$$(6)\qquad x=\frac{\begin{vmatrix} k_1 & b_1 & c_1\\ k_2 & b_2 & c_2\\ k_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}}{\Delta_3},\quad y=\frac{\begin{vmatrix} a_1 & k_1 & c_1\\ a_2 & k_2 & c_2\\ a_3 & k_3 & c_3\end{vmatrix}}{\Delta_3},\quad z=\frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & k_1\\ a_2 & b_2 & k_2\\ a_3 & b_3 & k_3\end{vmatrix}}{\Delta_3},$$

en donde $\Delta_3$, que es el determinante del sistema (5), está dado por

$$\Delta_3=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}\neq 0.$$

Al calcular estos determinantes debe observarse que la solución (6) obtenida por medio de determinantes es exactamente la misma que se obtiene por el método de eliminación. Esto es el motivo que llevó a la definición de $\Delta_3$ tal como se ha dado al principio de este artículo.

Conviene observar que la solución por determinantes (6) es análoga a la solución por determinantes (3) del sistema (2) de dos ecuaciones lineales estudiada en el Art. 15.3. Por supuesto, esta solución constituye otro ejemplo de la regla de Cramer.

**Ejemplo 4.** Resolver el siguiente sistema utilizando determinantes

$$\begin{aligned} 3x+2y-z&=3,\\ 4x-y-3z&=0,\\ x-2y-3z&=1.\end{aligned}$$

SOLUCION. El cálculo detallado de los determinantes que aparecen en este problema se deja como un ejercicio para el estudiante.

El determinante $\Delta$ del sistema es

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & \bar{1}\\ 4 & \bar{1} & \bar{3}\\ 1 & \bar{2} & \bar{3}\end{vmatrix}=16\neq 0.$$

Por tanto, por la regla de Cramer, la solución es

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 3 & 2 & \bar{1}\\ 0 & \bar{1} & \bar{3}\\ 1 & \bar{2} & \bar{3}\end{vmatrix}}{\Delta}=\frac{-16}{16}=-1,$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 3 & \bar{1} \\ 4 & 0 & \bar{3} \\ 1 & 1 & \bar{3} \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{32}{16} = 2,$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 4 & \bar{1} & 0 \\ 1 & \bar{2} & 1 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{-32}{16} = -2.$$

## EJERCICIOS. GRUPO 55

En cada uno de los ejercicios 1-8, calcular el determinante dado.

1. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & \bar{1} \\ 3 & 2 & 5 \\ 4 & \bar{3} & 6 \end{vmatrix}$. 2. $\begin{vmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 2 & 4 & 6 \\ 7 & \bar{9} & 5 \end{vmatrix}$. 3. $\begin{vmatrix} 4 & \bar{3} & 3 \\ 2 & 4 & 3 \\ \bar{5} & 7 & 2 \end{vmatrix}$.

4. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 6 & 7 \\ \bar{1} & 2 & 5 \end{vmatrix}$. 5. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 8 & 4 & 3 \\ \bar{2} & 5 & \bar{1} \end{vmatrix}$. 6. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 7 & 3 & 7 \\ 15 & 6 & 8 \end{vmatrix}$.

7. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & 1 & 5 \\ 7 & 14 & 3 & 5 \\ 6 & 12 & 5 & 4 \end{vmatrix}$. 8. $\begin{vmatrix} 5 & 2 & 7 & 5 \\ 11 & 5 & 8 & 9 \\ 10 & 5 & 3 & 8 \\ 6 & 3 & 2 & 5 \end{vmatrix}$.

En cada uno de los ejercicios 9 y 10 despejar $x$ en la ecuación dada.

9. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 6 & x & 3 \\ 4 & 2 & x \end{vmatrix} = 0$. 10. $\begin{vmatrix} \bar{1} & 2 & \bar{3} \\ 2 & x & 6 \\ x & 5 & 2 \end{vmatrix} = 0$.

En cada uno de los ejercicios 11-15, resolver el sistema dado utilizando determinantes.

11. $x + 2y - z = 3,\ 2x - y + z = 7,\ 2x + y - 4z = -1.$
12. $2x + 7y - 4z = 4,\ x - 3y - 4z = 0,\ 2x + 3y + z = 9.$
13. $3x - y - 2z = 4,\ 2x + y + 4z = 2,\ 7x - 2y - z = 4.$
14. $2x - 3y = 13,\ 2y + z = 1,\ x - 2z = -1.$
15. $3x - 9y + 4z = 0,\ 5x + 2y - 8z = 0,\ 7x - 2y - 5z = 0.$
16. Sean $C_{ij}$ y $M_{ij}$ el cofactor y el menor, respectivamente, del elemento

$a_{ij}$ que está en la fila de orden $i$ y en la columna de orden $j$ de un determinante. Demostrar que $C_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$.

17. Desarrollar $\Delta_3$ con respecto a los elementos de la tercera fila y comprobar que el resultado concuerda con el desarrollo (2) del Art. 15.4.

18. Comprobar, con un ejemplo, el teorema del Art. 15.4 desarrollando un determinante de orden 2 con respecto a los elementos de la primera columna.

19. Resolver el ejemplo 2 (Art. 15.4) usando la primera fila como base.

20. Por el método de eliminación, hallar la solución del sistema (5) de 3 ecuaciones lineales dado en el Art. 15.4.

21. Calcular los determinantes de la solución (6) del sistema (5) del Artículo 15.4, y comprobar que la solución es exactamente la misma que la obtenida en el ejercicio 20.

22. Comprobar la solución del ejemplo 4 del Art. 15.4, calculando todos los determinantes que aparecen en ella.

En cada uno de los ejercicios 23-29, verifique la propiedad mencionada para el determinante general de orden 3, tal como está dado por la relación (1) del Art. 15.4.

23. Propiedad 1 (Art. 15.3). 24. Propiedad 2 (Art. 15.3).

25. Propiedad 3 (Art. 15.3).

26. Propiedad 4 (Art. 15.3). Use la Propiedad 3 (Art. 15.3).

27. Propiedad 4 (Art. 15.3). Use las Propiedades 7 y 2 (Art. 15.3).

28. Propiedad 5 (Art. 15.3).

29. Propiedad 7 (Art. 15.3), demostrando que

$$\begin{vmatrix} a_1 + kb_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 + kb_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 + kb_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

30. Demostrar que $\begin{vmatrix} a_1 + a_1' & b_1 & c_1 \\ a_2 + a_2' & b_2 & c_2 \\ a_3 + a_3' & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1' & b_1 & c_1 \\ a_2' & b_2 & c_2 \\ a_3' & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$

31. Demostrar que

$$\begin{vmatrix} a_1 + a_1' + a_1'' & b_1 & c_1 \\ a_2 + a_2' + a_2'' & b_2 & c_2 \\ a_3 + a_3' + a_3'' & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1' & b_1 & c_1 \\ a_2' & b_2 & c_2 \\ a_3' & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1'' & b_1 & c_1 \\ a_2'' & b_2 & c_2 \\ a_3'' & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

32. En geometría analítica se demuestra que la ecuación de la recta que pasa por dos puntos dados distintos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ puede escribirse en la forma

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Comprobar este resultado demostrando (1) que las coordenadas de cada uno de los puntos $P_1$ y $P_2$ satisfacen la ecuación, y (2) que el desarrollo del determinante es una expresión lineal en las variables $x$ y $y$.

En cada uno de los ejercicios 33 y 34, y utilizando el resultado del ejercicio 32, obtener la ecuación de la recta que pasa por los dos puntos dados.

33. $(2, 0)$, $(0, -1)$. 34. $(3, 1)$, $(-2, -1)$.

35. En geometría analítica se demuestra que el área $K$ del triángulo que tiene los vértices $(x_1, y_1)$, $(x_2, y_2)$, $(x_3, y_3)$, está dada por

$$K = \tfrac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix},$$

tomándose como valor del área el valor absoluto del determinante. Utilizar esta fórmula para calcular el área del triángulo cuyos vértices son $(-1, 1)$, $(3, 4)$, $(5, -1)$.

36. Usar el resultado del ejercicio 35 para demostrar que una condición necesaria y suficiente para que tres puntos diferentes, cuyas coordenadas son $(x_1, y_1)$, $(x_2, y_2)$, $(x_3, y_3)$, sean colineales es que

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

37. Demostrar que $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix} = (x-y)(y-z)(z-x)$.

38. Demostrar que $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ y+z & z+x & x+y \end{vmatrix} = 0$.

39. Demostrar que $\begin{vmatrix} x-y-z & 2x & 2x \\ 2y & y-x-z & 2y \\ 2z & 2z & z-x-y \end{vmatrix} = (x+y+z)^3$.

40. Si $\omega$ es una de las raíces cúbicas complejas de la unidad, hallar el valor de

$$\begin{vmatrix} 1 & \omega & \omega^2 \\ \omega & \omega^2 & 1 \\ \omega^2 & 1 & \omega \end{vmatrix}.$$

## 15.5. DETERMINANTES DE CUALQUIER ORDEN

Ahora estudiaremos los determinantes de un orden cualquiera y mostraremos que tienen las mismas propiedades ya establecidas para los determinantes de orden 2 y 3. Con este motivo primeramente formularemos la definición para un determinante de un orden $n$ cualquiera, la cual comprende a los determinantes de orden 2 y 3 como casos particulares.

Concretamente, consideremos primero el determinante de orden 3:

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

que fue definido previamente (Art. 15.4) por medio del desarrollo

$$(1) \qquad \Delta_3 = a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 + a_3b_1c_2 + a_2b_3c_1 - a_3b_2c_1.$$

Cada término del desarrollo es el producto de tres literales, las que acostumbraremos escribir en orden alfabético, diciendo que se trata de su *orden natural*. Por tanto, los términos difieren unos de otros solamente en el *orden* de los subíndices 1, 2, 3, los cuales pueden permutarse en $3! = 6$ formas diferentes (Corolario, Teorema 2, Art. 13.3). Los subíndices del primer término del desarrollo son 1, 2, 3, ordenados según su magnitud; este orden se llama el *orden normal*. Cuando un subíndice mayor precede a uno menor, se dice que forman una *inversión*. Así, por ejemplo, en el término $a_3b_1c_2$, con subíndices en el orden 312, hay dos inversiones: el 3 precede al 1 y el 3 precede al 2. En el término $a_3b_2c_1$, con subíndices en el orden 321, hay 3 inversiones: el 3 precede al 2, el 3 precede al 1, y el 2 precede al 1. El primer término $a_1b_2c_3$, formado con los elementos de la diagonal principal, no tiene inversiones.

Con este concepto de inversión resulta ahora posible dar la siguiente definición completa para un determinante de cualquier orden:

**Definición.** Un determinante de *orden* $n$, en donde $n$ es cualquier número entero y positivo, se representa con un arreglo cuadrado de $n^2$ cantidades llamadas *elementos* y que están dispuestas en $n$ columnas y $n$ filas. Su valor es la suma algebraica de todos los posibles productos distintos, cada uno con $n$ factores, que pueden formarse al tomar un elemento, y solamente uno, de cada columna y de cada fila. Estos productos van precedidos de los signos más o menos según que presenten un número par o impar de inversiones. El producto formado con los elementos de la diagonal principal no tiene inversiones y está precedido por el signo más, llamándosele *término principal*.

NOTAS

1. Debe observarse que el signo que precede a un término, debido a su número de inversiones, es independiente del signo del término debido a sus factores. Así, por ejemplo, si un término contiene un número par de inversiones y sus factores son los elementos 3, —4, 2, el valor del término es $+(3)(-4)(2) = -24$.

2. El estudiante podrá ahora comprobar fácilmente que las definiciones de

los determinantes de órdenes 2 y 3, dadas por la relación (1) del Art. 15.3 y la relación (2) del Art. 15.4, respectivamente, están de acuerdo con la definición general, para un determinante de cualquier orden, que se acaba de enunciar.

Primeramente estableceremos los dos teoremas siguientes fundamentales sobre inversiones.

**Teorema 1.** *Si dos subíndices cualesquiera se intercambian en cualquier término del desarrollo de un determinante, el número de inversiones cambia en un número impar y, por tanto, el signo del término cambia.*

DEMOSTRACION. Primeramente consideremos el intercambio de dos subíndices sucesivos. En este caso el número de inversiones o aumenta en 1 o disminuye en 1, lo cual es un cambio en un número impar de inversiones. Por tanto, si el número original de inversiones es par (un término precedido de signo positivo), el intercambio produce un número impar de inversiones, o sea un término precedido del signo negativo, lo que significa que ocurre un cambio de signo. Análogamente, si el número original de inversiones es impar (un término prpecedido de signo negativo), el intercambio produce un número par de inversiones o sea un término precedido de signo positivo, lo que de nuevo constituye un cambio de signo.

Consideremos ahora el intercambio de dos subíndices no sucesivos separados por $k$ números. Para llevar el primer subíndice a la posición del segundo se requieren $k + 1$ intercambios de números sucesivos, y a esto deben seguir otros $k$ intercambios de subíndices sucesivos para llevar el segundo subíndice a la posición que tenía originalmente el primero, o sea un total de $2k + 1$ intercambios, que es un número impar. Pero según ya se dijo, cada intercambio de subíndices sucesivos cambia el número de inversiones en 1 ó —1 y produce un cambio de signo. Por tanto, $2k + 1$ intercambios cambian el número de inversiones en un número impar, con lo que el signo del término cambia.

Veamos ahora algunas de las propiedades de un determinante de un orden $n$ cualquiera. Por medio de las $n$ letras $a, b, c, \ldots, l$, lo escribimos en la forma

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & \ldots & l_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & \ldots & l_2 \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ a_n & b_n & c_n & \ldots & l_n \end{vmatrix} \tag{2}$$

en donde la letra denota la columna y el subíndice la fila en que se encuentra cada elemento.

El término principal en el desarrollo de $\Delta_n$ es el producto $a_1b_2c_3 \ldots l_n$. De acuerdo con la definición de $\Delta_n$, todos los términos del desarrollo pueden obtenerse a partir del término principal permutando los $n$ subíndices $1, 2, 3, \ldots, n$. Esto puede hacerse en $n!$ formas diferentes; por tanto, en el desarrollo hay $n!$ términos diferentes. Para $n \geq 2$, $n!$ es un número par.

Consideremos ahora dos subíndices cualesquiera. Entre las $n!$ permutaciones diferentes de los subíndices, el primer subíndice precede al segundo tantas veces como el segundo precede al primero. Pero por el Teorema 1, el intercambio de dos subíndices cambia el signo del término. En consecuencia, la mitad de los $n!$ términos están precedidos del signo positivo y la otra mitad del signo negativo. Resumimos estos resultados en el teorema siguiente:

**Teorema 2.** *El desarrollo de un determinante de orden n consta de n! términos diferentes; la mitad de ellos están precedidos del signo positivo y la otra mitad del signo negativo.*

Las propiedades de un determinante, estudiadas para determinantes de orden 2, se establecerán ahora como teoremas para determinantes de cualquier orden. El estudiante encontrará que para fijar sus ideas es muy útil seguir cada paso de las demostraciones aplicándolas a $\Delta_3$, o sea, al determinante general de orden 3.

**Teorema 3.** *Si las filas y las columnas correspondientes de un determinante se intercambian, el valor del determinante no se altera.*

DEMOSTRACION. Sea $\Delta_n$ el determinante dado (2) de orden $n$. Al intercambiar las filas con las columnas correspondientes obtenemos el determinante

$$\Delta_n' = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ b_1 & b_2 & \ldots & b_n \\ c_1 & c_2 & \ldots & c_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ l_1 & l_2 & \ldots & l_n \end{vmatrix}$$

cuyo término principal $a_1b_2c_3 \ldots l_n$ es el mismo que el término principal de $\Delta_n$. En $\Delta_n'$, las literales denotan las filas y los subíndices las columnas, que es lo inverso de lo que sucede en $\Delta_n$. Por tanto, conservando los subíndices de $a_1b_2c_3 \ldots l_n$ en el orden normal y permutando las $n$ literales en $n!$ formas diferentes, obtenemos todos los términos del desarrollo de $\Delta_n$. Además, los términos idénticos en ambos determinantes llevan los mismos signos, considerando inversiones en las literales y no en los subíndices de $\Delta_n'$. Luego $\Delta_n' = \Delta_n$, como se quería demostrar.

Como una consecuencia inmediata de este teorema tenemos el importante corolario siguiente:

**Corolario.** *Cualquier teorema de determinantes que sea válido para sus filas es también válido para sus columnas.*

NOTA 3. Al operar con determinantes se observará un patrón definido de simetría entre filas y columnas.

**Teorema 4.** *Si todos los elementos de una fila (o columna) son cero, el valor del determinante es cero.*

DEMOSTRACION. Este teorema se deduce inmediatamente del desarrollo del determinante, pues cada término en el desarrollo de $\Delta_n$ debe contener un factor que es un elemento de una fila de ceros. Por tanto, cada término es igual a cero y $\Delta_n = 0$.

**Teorema 5.** *Si dos filas (o columnas) de un determinante se intercambian, el valor del determinante cambia de signo pero conserva su valor absoluto.*

DEMOSTRACION. El intercambio de dos filas produce el intercambio de dos subíndices en cada término del desarrollo del determinante. Entonces, por el Teorema 1, el signo de cada término cambia. Por tanto, el valor del determinante cambia de signo sin alterarse su valor absoluto.

**Teorema 6.** *Si los elementos correspondientes de dos filas (o columnas) de un determinante son iguales, el valor del determinante es cero.*

DEMOSTRACION. Sea $\Delta_n$ un determinante con dos filas idénticas. Si estas dos filas se intercambian, $\Delta_n$ cambia su valor a $-\Delta_n$ por el Teorema 5. Pero como el intercambio de dos filas idénticas no altera el determinantes, entonces $\Delta_n = -\Delta_n$ de donde $2\Delta_n = 0$ y $\Delta_n = 0$.

**Teorema 7.** *Si cada elemento de una fila (o columna) de un determinante se multiplica por el mismo número k, entonces el nuevo determinante tiene un valor igual a k veces el del determinante original.*

DEMOSTRACION. Representemos el determinante original por $\Delta_n$ y el determinante resultante por $\Delta_n'$. Ya que cada término del desarrollo de un determinante contiene un elemento de cada fila, y solamente uno, entonces cada término del desarrollo de $\Delta_n'$ es igual a $k$ veces el término correspondiente de $\Delta_n$. Por tanto, $\Delta_n' = k\Delta_n$.

**Corolario.** *Si todos los elementos de una fila (o columna) tienen un factor común k, entonces k es un factor del determinante. Este factor* *común k puede eliminarse de cada elemento de la fila y colocarse como multiplicador frente al determinante resultante.*

**Teorema 8.** *Si cada elemento de una fila (o columna) de un determinante es igual a la suma de dos cantidades, el determinante puede escribirse como la suma de dos determinantes, es decir,*

$$\begin{vmatrix} a_1 + a_1' & b_1 & \ldots & l_1 \\ a_2 + a_2' & b_2 & \ldots & l_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_n + a_n' & b_n & \ldots & l_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & \ldots & l_1 \\ a_2 & b_2 & \ldots & l_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_n & b_n & \ldots & l_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1' & b_1 & \ldots & l_1 \\ a_2' & b_2 & \ldots & l_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_n' & b_n & \ldots & l_n \end{vmatrix}$$

DEMOSTRACION. Representemos estos tres determinantes, en el orden en que aparecen, con $\Delta$, $\Delta_n$, y $\Delta_n'$, respectivamente. Tenemos que demostrar que

$$\Delta = \Delta_n + \Delta_n'.$$

Vamos a suponer que es la primera columna la que cada uno de sus elementos es la suma de dos cantidades. La demostración para cualquier otra columna (o fila) se lleva a cabo exactamente en la misma forma.

De acuerdo con la definición de determinante el desarrollo de $\Delta$ puede escribirse en la forma

$$\begin{aligned} \Delta &= (a_1 + a_1')A_1 + (a_2 + a_2')A_2 + \ldots + (a_n + a_n')A_n \\ &= (a_1A_1 + a_2A_2 + \ldots + a_nA_n) + (a'_1A_1 + a_2'A_2 + \ldots + a_n'A_n), \end{aligned}$$

en donde $A_1, A_2, \ldots, A_n$ son expresiones que no contienen elementos de la primera columna.

Por la misma definición de determinante y por el significado de $A_1, A_2, \ldots, A_n$, se tiene que

$$\begin{aligned} \Delta_n &= a_1A_1 + a_2A_2 + \ldots + a_nA_n \\ \Delta_n' &= a_1'A_1 + a_2'A_2 + \ldots + a_n'A_n, \end{aligned}$$

de donde $\Delta = \Delta_n + \Delta_n'$, como se quería demostrar.

**Corolario.** *Si cada elemento de una fila (o columna) de un determinante es la suma de tres (o más) cantidades, el determinante puede escribirse como la suma de tres (o más) determinantes.*

A continuación damos un teorema que es muy útil en el cálculo de determinantes.

**Teorema 9.** *Si cada elemento de una fila (o columna) de un determinante se multiplica por el mismo número k y el resultado se suma al elemento correspondiente de otra fila (o columna), el valor del determinante no se altera.*

DEMOSTRACION. Por conveniencia consideraremos una columna particular para la demostración del teorema. La demostración para cualquier otra columna (o fila) es exactamente la misma. Por tanto, demostraremos que

$$\begin{vmatrix} a_1 + kb_1 & b_1 & c_1 & \ldots & l_1 \\ a_2 + kb_2 & b_2 & c_2 & \ldots & l_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n + kb_n & b_n & c_n & \ldots & l_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & \ldots & l_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & \ldots & l_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n & b_n & c_n & \ldots & l_n \end{vmatrix}$$

Por el Teorema 8

$$\begin{vmatrix} a_1 + kb_1 & b_1 & \ldots & l_1 \\ a_2 + kb_2 & b_2 & \ldots & l_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n + kb_n & b_n & \ldots & l_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & \ldots & l_1 \\ a_2 & b_2 & \ldots & l_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n & b_n & \ldots & l_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} kb_1 & b_1 & \ldots & l_1 \\ kb_2 & b_2 & \ldots & l_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ kb_n & b_n & \ldots & l_n \end{vmatrix}$$

Por el Corolario del Teorema 7

$$= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & \ldots & l_1 \\ a_2 & b_2 & \ldots & l_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n & b_n & \ldots & l_n \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} b_1 & b_1 & \ldots & l_1 \\ b_2 & b_2 & \ldots & l_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_n & b_n & \ldots & l_n \end{vmatrix}$$

Por el Teorema 6

$$= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & \ldots & l_1 \\ a_2 & b_2 & \ldots & l_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n & b_n & \ldots & l_n \end{vmatrix}$$

Ahora estableceremos un importante teorema que fue enunciado sin demostración en el Art. 15.4 y que se usó entonces para el cálculo de determinantes. Antes de estudiar la demostración de este teorema, conviene repasar las definiciones de *menor* y *cofactor* y también la comprobación de este teorema para $\Delta_3$, como aparece en el Art. 15.4.

**Teorema 10.** *El valor de cualquier determinante de orden n es igual a la suma de n productos, cada uno de los cuales se forma multiplicando cada elemento de una fila (o columna) por su correspondiente cofactor.*

DEMOSTRACION. Estableceremos el teorema considerando el desarrollo del determinante

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & \ldots & l_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & \ldots & l_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n & b_n & c_n & \ldots & l_n \end{vmatrix}$$

con respecto a los elementos de la primera fila. La demostración es la misma para cualquier otra fila (o columna).

Vamos a demostrar que

$$\Delta_n = a_1A_1 + b_1B_1 + c_1C_1 + \ldots + l_1L_1, \tag{3}$$

en donde $A_1$, $B_1$, $C_1, \ldots, L_1$ son los cofactores respectivos de los elementos $a_1$, $b_1$, $c_1, \ldots, l_1$.

La demostración consta de dos partes en las que se demuestra: (1) que los términos del desarrollo (3) incluyen todos los $n!$ productos dados en la definición $\Delta_n$ y (2) que cada uno de estos productos tiene el signo adecuado.

(1) El cofactor $A_1$ es un determinente de orden $n - 1$ y los términos de su desarrollo constan de $(n - 1)!$ productos, ninguno de los cuales contiene elementos de la primera fila o de la primera columna. Por tanto $a_1A_1$ consta de $(n - 1)!$ productos, cada uno de los cuales contiene un elemento y solamente uno de cada columna y de cada fila, incluyendo la primera fila y la primera columna. Análogamente, $b_1B_1$ constan de $(n - 1)!$ productos, cada uno de los cuales contiene un elemento y solamente uno de cada columna y de cada fila, incluyendo la primera fila y la segunda columna. Continuando de esta manera vemos que en los $n$ términos de (3) hay un total de $n(n - 1)! = n!$ productos, cada uno de los cuales contiene un elemento y solamente uno de cada columna y de cada fila de $\Delta_n$. Esto concuerda con la definición general de determinante.

(2) Los signos de los términos del cofactor $A_1$ concuerdan con la definición de $A_1$ y son los mismos en el desarrollo de $a_1A_1$, pues el factor $a_1$ no cambia el número de inversiones. También conviene observar que para $a_1$, o sea el elemento en la primera fila y en la primera columna, la suma de los números de orden de la fila y la columna es $1 + 1 = 2$, o sea un número par.

En general consideremos el elemento de $\Delta_n$ que está en la fila de orden $i$ y en la columna de orden $j$. Este elemento puede llevarse hasta la posición ocupada por el elemento $a_1$ por medio de $i - 1$ intercambios sucesivos de filas sucesivas y $j - 1$ intercambios de columnas sucesivas, o sea un total de $i + j - 2$ intercambios sucesivos. Por el Teorema 1, cada intercambio cambia el signo del término. Por tanto, si $i + j - 2$ es par, entonces $i + j$ también es par y el término queda precedido del signo más; si $i + j - 2$ es impar, entonces $i + j$ también es impar, y el término queda precedido del signo menos.

**Corolario.** *Si en el desarrollo de un determinante con respecto a los elementos de una fila (o columna), se sustituyen los elementos de esta* *fila (o columna) por los elementos correspondientes a cualquier otra fila (o columna), el valor de la expresión resultante es cero.*

Esto se deduce del hecho de que la expresión resultante es entonces el desarrollo de un determinante con dos filas idénticas (o columnas) y, por tanto, por el Teorema 6, es igual a cero.

Así, por ejemplo, en el desarrollo de $\Delta_n$ dado por (3), si sustituimos los elementos de la primera fila por los elementos de la segunda, tenemos

$$a_2A_1 + b_2B_1 + c_2C_1 + \ldots + l_2L_1 = \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 & \ldots & l_2 \\ a_2 & b_2 & c_2 & \ldots & l_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_n & b_n & c_n & \ldots & l_n \end{vmatrix} = 0.$$

NOTA 4. En relación con la demostración del paso (2) del Teorema 10 conviene referirse al ejercicio 16 del grupo 55, Art. 15.4.

Con las demostraciones de los Teoremas 9 y 10 queda justificado el método para calcular cualquier determinante, dado en el Art. 15.4.

## EJERCICIOS. GRUPO 56.

1. Demostrar que el desarrollo de un determinante de orden 2, dado por la relación (1) del Art. 15.3, concuerda con la definición general del Art. 15.5 para un determinante de cualquier orden.

2. Demostrar que el desarrollo de un determinante de orden 3, dado por la relación (2) del Art. 15.4, concuerda con la definición general del Art. 15.5, para un determinante de cualquier orden.

3. Comprobar el Teorema 2 (Art. 15.5) para determinantes de orden 2 y 3.

4. Demostrar el Corolario del Teorema 7 (Art. 15.5).

5. Demostrar el Corolario del Teorema 8 (Art. 15.5).

6. Si los elementos correspondientes de dos filas (o columnas) de un determinante son proporcionales, el valor del determinante es cero.

7. Demostrar el Teorema 4 por medio de los Teoremas 9 y 6 (Art. 15.5).

8. Demostrar que

$$\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & 0 & 0 \\ a_3 & b_3 & c_3 & 0 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3d_4.$$

En cada uno de los ejercicios 9-17, calcular el determinante dado.

9. $\begin{vmatrix} 5 & 10 & 1 \\ \bar{1} & \bar{1} & \bar{3} \\ 4 & 7 & 3 \end{vmatrix}$.    10. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & \bar{4} \\ 2 & \bar{1} & 7 \\ 6 & 4 & \bar{8} \end{vmatrix}$.    11. $\begin{vmatrix} 1 & x & \bar{y} \\ \bar{x} & 1 & z \\ y & \bar{z} & 1 \end{vmatrix}$.

12. $$\begin{vmatrix} 2 & \bar{3} & 2 & 1 \\ 8 & 2 & \bar{5} & 4 \\ \bar{4} & 0 & 7 & \bar{2} \\ 6 & \bar{9} & 6 & 3 \end{vmatrix}.$$

13. $$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \bar{2} & 2 & 0 & 0 \\ 5 & 9 & \bar{3} & 0 \\ 7 & \bar{6} & 2 & 4 \end{vmatrix}.$$

14. $$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 & 3 \\ \bar{1} & 5 & 2 & 7 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \\ \bar{1} & 10 & 4 & 13 \end{vmatrix}.$$

15. $$\begin{vmatrix} 4 & 4 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 6 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

16. $$\begin{vmatrix} 3 & 5 & \bar{1} & 4 & 1 \\ 6 & 9 & \bar{2} & 7 & 2 \\ 8 & 14 & \bar{2} & 11 & 2 \\ 3 & 5 & \bar{2} & 5 & 1 \\ 6 & 9 & 2 & 3 & \bar{1} \end{vmatrix}.$$

17. $$\begin{vmatrix} 1 & 4 & \bar{3} & 2 & 5 \\ 3 & 0 & 2 & 1 & \bar{1} \\ 2 & 4 & \bar{2} & 0 & 6 \\ 3 & 1 & 7 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

En cada uno de los ejercicios 18 y 19, comprobar la relación dada, sin efectuar el desarrollo de los determinantes.

18. $$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 9 & 3 \\ 9 & 3 & \bar{7} & 5 \\ 7 & 1 & 3 & 2 \\ 5 & 0 & 6 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 2 & \bar{4} & 3 \\ 9 & 3 & 5 & 5 \\ 7 & 1 & 2 & 2 \\ \bar{5} & 0 & \bar{3} & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 & 3 \\ 9 & 3 & \bar{2} & 5 \\ 7 & 1 & 5 & 2 \\ \bar{5} & 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}.$$

19. $$\begin{vmatrix} 2 & \bar{1} & 1 & \bar{1} \\ 3 & 5 & 3 & 10 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \\ 3 & 7 & 3 & 13 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 & \bar{1} & \bar{1} \\ 3 & 3 & 5 & 10 \\ 1 & 1 & 2 & 4 \\ 3 & 3 & 7 & 13 \end{vmatrix} = 0.$$

20. Demostrar que $x + y + z$ es un factor del determinante

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ z & x & y \\ y & z & x \end{vmatrix}$$

21. En geometría analítica se demuestra que la ecuación de una circunferencia que pasa por tres puntos dados que no están en línea recta: $P(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$, y $P(x_3, y_3)$, puede escribirse en la forma

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2 & x & y & 1 \\ x_1{}^2 + y_1{}^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2{}^2 + y_2{}^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3{}^2 + y_3{}^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Comprobar que las coordenadas de cada uno de los puntos $P_1, P_2$, y $P_3$ satisfacen esta ecuación.

22. Por medio del ejercicio 21, hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por los tres puntos $(0, 0)$, $(3, 6)$, $(7, 0)$.

23. Por medio del ejercicio 21, hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por los tres puntos $(2, —2)$, $(—1, 4)$, $(4, 6)$.

24. Por medio del ejercicio 21, demostrar que los cuatro puntos $(—1, —1)$, $(2, 8)$, $(5, 7)$, $(7, 3)$ están en una circunferencia. En un caso como este se dice que los puntos son concíclicos.

25. En geometría analítica del espacio se demuestra que la ecuación de un plano que pasa por tres puntos dados que no están en línea recta: $P_1(x_1, y_1, z_1)$, $P_2(x_2, y_2, z_2)$, y $P_3(x_3, y_3, z_3)$, puede escribirse en la forma

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Comprobar que las coordenadas de cada uno de los puntos $P_1$, $P_2$ y $P_3$ satisfacen esta ecuación.

26. Por medio del ejercicio 25 hallar la ecuación del plano que para por los tres puntos $(6, 2, 0)$, $(4, —1, 2)$ y $(3, 4, —1)$.

27. Si ninguna tercia de los cuatro puntos $(x_1, y_1, z_1)$, $(x_2, y_2, z_2)$, $(x_3, y_3, z_3)$, $(x_4, y_4, z_4)$ es colineal, demostrar, por medio del ejercicio 25, que si estos puntos son coplanares entonces

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

28. Por medio del ejercicio 27, demostrar que los cuatro puntos $(1, 0, —4)$, $(2, —1, 3)$, $(—2, 3, 5)$ y $(—1, 2, 4)$ son coplanares.

29. En geometría analítica del espacio se demuestra que el volumen $V$ de un tetraedro, cuyos vértices son $P_1(x_1, y_1, z_1)$, $P_2(x_2, y_2, z_2)$, $P_3(x_3, y_3, z_3)$ y $P_4(x_4, y_4, z_4)$, está dado por la fórmula

$$V = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}$$

tomándose el valor absoluto del determinante como valor del volumen. Usar este resultado para calcular el volumen de un tetraedro cuyos vértices son $(—4, 6, 3)$, $(8, —3, 5)$, $(4, 0, —1)$ y $(5, 3, 9)$.

30. Demostrar que si los elementos de un determinante $\Delta$ son polinomios en $x$, y que si $\Delta = 0$ cuando $x = r$, entonces $x — r$ es un factor del desarrollo de $\Delta$.

En cada uno de los ejercicios 31-33, factorizar el determinante dado.

31. $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$. 32. $\begin{vmatrix} 1 & a & a^3 \\ 1 & b & b^3 \\ 1 & c & c^3 \end{vmatrix}$. 33. $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \\ 1 & d & d^2 & d^3 \end{vmatrix}$.

34. Demostrar que $\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 - yz \\ 1 & y & y^2 - xz \\ 1 & x & z^2 - xy \end{vmatrix} = 0.$

35. Demostrar que $\begin{vmatrix} y^2 + z^2 & xy & xz \\ xy & x^2 + z^2 & yz \\ xz & yz & x^2 + y^2 \end{vmatrix} = 4x^2y^2z^2.$

## 15.6. SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Al llegar a este punto será conveniente que el estudiante vuelva a leer el Art. 4.7 en el que se estudió la resolución de los sistemas de dos o más ecuaciones lineales con el mismo número de incógnitas que de ecuaciones, sin usar los determinantes. En este artículo estudiaremos la resolución y algunas propiedades de diversos sistemas de ecuaciones lineales utilizando determinantes. Empezaremos con el caso general de la regla de Cramer, que aplicamos previamente a los sistemas de dos y tres ecuaciones en los Artículos 15.3 y 15.4, respectivamente.

Consideremos el siguiente sistema de $n$ ecuaciones lineales en $n$ incógnitas:

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z + \ldots + l_1w &= k_1, \\ a_2x + b_2y + c_2z + \ldots + l_2w &= k_2, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \\ a_nx + b_ny + c_nz + \ldots + l_nw &= k_n. \end{aligned} \tag{1}$$

Para poder formar los determinantes que se precisan, se requiere escribir las ecuaciones del sistema como se indica en (1), es decir, con los términos que contienen una misma incógnita en cada columna y los términos independientes en los segundos miembros. Cuando esto sucede se dice que las ecuaciones *están ordenadas.* Si en alguna de las ecuaciones no aparece alguna de las incógnitas se deja en blanco la posición correspondiente, lo que significa que el coeficiente que corresponde es cero.

El determinante cuyos elementos son los coeficientes de las incógnitas en (1) se llama *determinante del sistema* y se representa por $\Delta$, es decir

$$(2) \qquad \Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & \dots & l_1 \\ a_2 & b_2 & \dots & l_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n & b_n & \dots & l_n \end{vmatrix}$$

Para determinar el valor de una incógnita en (1), debemos eliminar todas las demás. Esto puede hacerse en forma muy sencilla por medio de los cofactores. Sean $A_1, A_2, \dots, A_n$, los respectivos cofactores de $a_1, a_2, \dots, a_n$, que son los elementos de la primera columna de $\Delta$. Multiplicando ambos miembros de cada una de las ecuaciones del sistema (1) por $A_1, A_2, \dots, A_n$, respectivamente, obtenemos

$$(3) \qquad \begin{aligned} a_1A_1x + b_1A_1y + c_1A_1z + \dots + l_1A_1w &= k_1A_1, \\ a_2A_2x + b_2A_2y + c_2A_2z + \dots + l_2A_2w &= k_2A_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_nA_nx + b_nA_ny + c_nA_nz + \dots + l_nA_nw &= k_nA_n. \end{aligned}$$

Sumando miembro a miembro las ecuaciones del sistema (3), resulta

$$(4) \quad (a_1A_1 + a_2A_2 + \dots + a_nA_n)x + (b_1A_1 + b_2A_2 + \dots + b_nA_n)y \\ + \dots + (l_1A_1 + l_2A_2 + \dots + l_nA_n)w = k_1A_1 + k_2A_2 + \dots + k_nA_n.$$

El coeficiente de $x$ en (4) es el desarrollo de $\Delta$ con respecto a los elementos de la primera columna (Teorema 10, Art. 15.5). El coeficiente de $y$ es el coeficiente de $x$ con los elementos de la primera columna sustituidos por los elementos correspondientes de la segunda columna. Por tanto, por el corolario del Teorema 10, Art. 15.5, el coeficiente de $y$ es igual a cero. Análogamente, los coeficientes de las incógnitas restantes $z, \dots, w$ de (4), son iguales a cero. El segundo miembro de (4) es el desarrollo de $\Delta$ con los elementos de su primera columna sustituidos por los correspondientes términos independientes del sistema (1). Designaremos a este último desarrollo por $\Delta_1$, es decir,

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} k_1 & b_1 & \dots & l_1 \\ k_2 & b_2 & \dots & l_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_n & b_n & \dots & l_n \end{vmatrix}.$$

La ecuación (4) puede escribirse como

$$\Delta x = \Delta_1$$

de donde $$x = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad \text{con la condición } \Delta \neq 0.$$

Análogamente, es posible despejar las incógnitas restantes. Por ejemplo, sean $B_1, B_2, \ldots, B_n$ los cofactores respectivos de $b_1, b_2, \ldots, b_n$, que son los elementos de la segunda columna de $\Delta$.

Si multiplicamos ambos miembros de cada uno de las ecuaciones del sistema (1) por $B_1, B_2, \ldots, B_n$ respectivamente y sumamos miembro a miembro las ecuaciones resultantes y luego aplicamos el Teorema 10, Art. 15.5 y su corolario, obtenemos

$$\Delta y = \Delta_2,$$

en donde $\Delta_2$ es el determinante obtenido de $\Delta$ sustituyendo los elementos de su segunda columna por los correspondientes términos independientes del sistema (1).

Por tanto, $y = \dfrac{\Delta_2}{\Delta}$, con la condición $\Delta \neq 0$.

Análogamente, $z = \dfrac{\Delta_3}{\Delta}, \ldots \quad w = \dfrac{\Delta_n}{\Delta}, \ \Delta \neq 0$.

Procediendo a la inversa, es posible demostrar, por sustitución directa, que esta solución satisface a todas las ecuaciones del sistema (1).

Enunciamos estos resultados en el teorema siguiente:

**Teorema 11.** *(Regla de Cramer). Dado un sistema de n ecuaciones lineales con n incógnitas*

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z + \ldots + l_1w &= k_1, \\ a_2x + b_2y + c_2z + \ldots + l_2w &= k_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots \\ a_nx + b_ny + c_nz + \ldots + l_nw &= k_n, \end{aligned}$$

*si $\Delta$ es el determinante del sistema y $\Delta_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, son los determinantes obtenidos de $\Delta$ al sustituir los elementos de su columna de orden $i$ por los correspondientes términos independientes del sistema, si $\Delta \neq 0$, el sistema tiene la solución única*

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad y = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \ldots, \quad w = \frac{\Delta_n}{\Delta}.$$

**Ejemplo 1.** Utilizando la regla de Cramer resolver el sistema

$$\begin{aligned} 3x + 2y + \phantom{2}z - 2w &= 4, \\ 2x - \phantom{2}y + 2z - 5w &= 15, \\ 4x + 2y \phantom{+ 2z} - \phantom{5}w &= 1, \\ 3x \phantom{+ 2y} - 2z - 4w &= 1. \end{aligned}$$

SOLUCION. El primer paso consiste en comprobar que el sistema dado está ordenado.

El siguiente paso corresponde al cálculo del determinante del sistema. En este caso tenemos

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & \bar{2} \\ 2 & 1 & 2 & \bar{5} \\ 4 & 2 & 0 & \bar{1} \\ 3 & 0 & \bar{2} & \bar{4} \end{vmatrix} = -65.$$

Ya que $\Delta \neq 0$, el sistema dado tiene una solución única, la cual, por la regla de Cramer, es

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 & \bar{2} \\ 15 & \bar{1} & 2 & \bar{5} \\ 1 & 2 & 0 & \bar{1} \\ 1 & 0 & \bar{2} & \bar{4} \end{vmatrix}}{-65} = \frac{-65}{-65} = 1,$$

$$y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 & \bar{2} \\ 2 & 15 & 2 & \bar{5} \\ 4 & 1 & 0 & \bar{1} \\ 3 & 1 & \bar{2} & \bar{4} \end{vmatrix}}{-65} = \frac{130}{-65} = -2,$$

$$z = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 & \bar{2} \\ 2 & \bar{1} & 15 & \bar{5} \\ 4 & 2 & 1 & \bar{1} \\ 3 & 0 & 1 & \bar{4} \end{vmatrix}}{-65} = \frac{-195}{-65} = 3,$$

$$w = \frac{\Delta_4}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & \bar{1} & 2 & 15 \\ 4 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & \bar{2} & 1 \end{vmatrix}}{-65} = \frac{65}{-65} = -1.$$

Fácilmente se comprueba que esta solución satisface a las ecuaciones del sistema dado.

De la regla de Cramer resulta evidente que si $\Delta = 0$, no puede existir una solución única

$$(5) \qquad x = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad y = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \ldots, \quad w = \frac{\Delta_n}{\Delta},$$

pues la división entre cero es una operación imposible. Además, si escribimos la solución (5) en la forma

$$\Delta x = \Delta_1,\ \Delta y = \Delta_2, \ldots,\ \Delta w = \Delta_n,$$

se concluye que si $\Delta = 0$, entonces $\Delta_i = 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Por tanto, es suficiente que uno de los determinantes $\Delta_i$ sea diferente de cero, para que se llegue a una contradicción y el sistema no tiene solución; en este caso se dice que el sistema es *incompatible*. Sin embargo, si todos los determinantes $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$ son iguales a cero, puede demostrarse que puede existir un número infinito de soluciones; en este caso el sistema se llama *dependiente*. Ya hemos discutido anteriormente los sistemas incompatibles y dependientes para dos ecuaciones con dos incógnitas (Artículo 4.7). Pero el análisis completo del sistema general de $n$ ecuaciones lineales con $n$ incógnitas para el caso en que $\Delta = 0$, está fuera del campo de este libro. Sin embargo, como referencia, enunciaremos las siguientes propiedades:

*Dado un sistema de n ecuaciones lineales con n incógnitas, si* $\Delta$ *es el determinante del sistema y* $\Delta_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, *es el determinante obtenido de* $\Delta$ *al sustituir los elementos de la columna de orden i por los correspondientes términos independientes que aparecen en el lado derecho del sistema:*

1. *Si* $\Delta \neq 0$, *el sistema tiene una solución única dada por la regla de Cramer. En este caso se dice que el sistema es compatible.*

2. *Si* $\Delta = 0$ *y* $\Delta_i \neq 0$ *por lo menos para una i, el sistema no tiene solución y se llama incompatible.*

3. *Si* $\Delta = 0$ *y* $\Delta_i = 0$ *para todos los valores de i, entonces hay dos posibilidades: o el sistema no tiene solución y es incompatible, o bien tiene un número infinito de soluciones y es dependiente.*

Si en el sistema lineal (1) por lo menos uno de los términos independientes es diferente de cero, se dice que el sistema *no es homogéneo*. Pero si todos los términos independientes (las $k$) son iguales a cero, entonces el sistema se llama *homogéneo* y toma la forma

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + \ldots + l_1w &= 0, \\ a_2x + b_2y + \ldots + l_2w &= 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_nx + b_ny + \ldots + l_nw &= 0. \end{aligned} \tag{6}$$

Resulta claro que el sistema (6) se satisface si todas las incógnitas toman el valor cero, independientemente de que el determinante $\Delta$ del sistema sea cero o no. Ya que un sistema homogéneo siempre tiene una solución formada por ceros, esta solución recibe el nombre de *solución trivial*. Si $\Delta \neq 0$, el sistema homogéneo tiene como única solución la solución trivial, como consecuencia de la regla de Cramer. Por tanto, para que un sistema homogéneo tenga otras soluciones, además de la solución trivial, resulta que $\Delta$ no puede ser diferente de cero. De hecho, en tratados superiores, se demuestra el teorema siguiente:

**Teorema 12.** *Un sistema lineal homogéneo de n ecuaciones con n incógnitas tiene soluciones diferentes de la solución trivial solamente si el determinante del sistema es igual a cero.*

**Ejemplo 2.** Resolver el sistema homogéneo

$$\begin{aligned} 2x + 3y - z &= 0, \\ x - y - 3z &= 0, \\ x + 3y + z &= 0. \end{aligned}$$

SOLUCION. Se encuentra fácilmente que el determinante del sistema es igual a cero y, en consecuencia, existen soluciones diferentes de la solución trivial. Para obtener tales soluciones procedemos como sigue:

Si es posible, intentamos resolver dos de las ecuaciones para dos de las incógnitas en función de la tercera incógnita. Así, por ejemplo, escribimos las primeras dos ecuaciones en la forma

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= z, \\ x - y &= 3z, \end{aligned}$$

y encontramos que podemos despejar $x$ y $y$ en función de $z$, pues el determinante de este sistema es

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & \bar{1} \end{vmatrix} = -5 \neq 0.$$

Así obtenemos $x = 2z$, $y = -z$.

Estos valores de $x$ y $y$ satisfacen idénticamente a la tercera ecuación pues $2z - 3z + z = 0$ para todo valor de $z$.

Por tanto, podemos obtener tantas soluciones como queramos asignando a $z$ valores arbitrarios y calculando los valores correspondientes de $x$ y $y$. Por ejemplo:

$$\text{Para } z = 1,\ x = 2z = 2 \text{ y } y = -z = -1.$$
$$\text{Para } z = 2,\ x = 4 \text{ y } y = -2, \text{ etc.}$$

Evidentemente, todas las soluciones no nulas para $x$, $y$, $z$, están en la razón $2:-1:1$.

**Ejemplo 3.** Resolver el sistema homogéneo

$$\begin{aligned} x - y + 2z &= 0, \\ 2x - 2y + 4z &= 0, \\ 3x - 3y + 6z &= 0. \end{aligned}$$

SOLUCION. El determinante del sistema dado es cero. Si intentamos aquí la obtención de soluciones no triviales como se hizo en el ejemplo anterior, encontramos la dificultad consistente en que los menores de todos los elementos del determinante del sistema son también iguales a cero. Sin embargo, observamos que las tres ecuaciones son equivalentes, pues la segunda y la tercera pueden obtenerse multiplicando la primera por 2 y por 3, respectivamente. Por tanto, si despejamos $x$ de la primera ecuación en términos de $y$ y de $z$, se tiene

$$x = y - 2z,$$

pudiendo utilizarse esta fórmula para obtener valores de $x$ correspondientes a valores arbitrarios de $y$ y de $z$. Así, por ejemplo:

Para $y = 1$ y $z = 1$, $x = -1$.
Para $y = 2$ y $z = 1$, $x = 0$, etc.

Hasta ahora, los sistemas lineales estudiados han consistido de igual número de ecuaciones que de incógnitas. Si el número de ecuaciones difiere del número de incógnitas, el problema se vuelve más complicado y el análisis completo requiere estudios superiores. Sin embargo, existen varios casos que pueden estudiarse con los conocimientos adquiridos.

Primeramente consideraremos un sistema en que el número de ecuaciones sea menor que el número de incógnitas; tales sistemas se llaman *defectuosos*. En general, un sistema defectuoso posee un número infinito de soluciones. El ejemplo más sencillo de tales sistemas lo constituye una sola ecuación con dos incógnitas. Por ejemplo, $x + 2y = 6$ tiene un número infinito de soluciones que pueden obtenerse asignando valores arbitrarios a una de las dos incógnitas y calculando el valor correspondiente a la otra.

En general, en un sistema defectuoso de $n$ ecuaciones con $m$ incógnitas, en donde $n < m$, es posible despejar $n$ de estas incógnitas en términos de las $m - n$ restantes. Al asignar valores arbitrarios a estas $m - n$ incógnitas, obtenemos los valores correspondientes de las $n$ incógnitas.

**Ejemplo 4.** Obtener soluciones del sistema defectuoso

$$x - 2y + z = 1,$$
$$x + y + 4z = 1.$$

SOLUCION. Aquí es posible despejar $x$ y $y$ en función de $z$.
Así obtenemos

$$x = 1 - 3z, \quad y = -z.$$

Asignando valores arbitrarios a $z$, podemos obtener los valores correspondientes de $x$ y $y$, obteniéndose así tantas soluciones como queramos. Por ejemplo,

para $$z = 0,\ x = 1,\quad y = 0,$$
$$z = 1,\ x = -2,\ y = -1,\ \text{etc.}$$

Consideremos ahora un sistema en el que el número de ecuaciones sea mayor que el número de incógnitas; un sistema de este tipo recibe el nombre de *redundante*.

Supongamos que tenemos un sistema de $n$ ecuaciones con $m$ incógnitas, en donde $n > m$. Puede ser posible resolver $m$ de estas ecuaciones para las $m$ incógnitas. Si esta solución satisface a *todas* las $n - m$ ecuaciones restantes, entonces el sistema dado es compatible, en caso contrario es incompatible.

Un sistema redudante de interés especial es aquel en el que el número de ecuaciones es una unidad mayor que el número de incógnitas. Veamos, por ejemplo, el siguiente sistema de tres ecuaciones con dos incógnitas.

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y &= k_1,\\ a_2x + b_2y &= k_2,\\ a_3x + b_3y &= k_3. \end{aligned}$$

Deseamos determinar bajo qué condiciones resulta compatible este sistema, es decir, cuándo existe una solución común. La solución de las dos primeras ecuaciones, por la regla de Cramer, es

$$x = \frac{\begin{vmatrix} k_1 & b_1 \\ k_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\Delta},\quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & k_1 \\ a_2 & k_2 \end{vmatrix}}{\Delta},\quad \Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Esta solución debe satisfacer la tercera ecuación, es decir, deberemos tener

$$a_3 \frac{\begin{vmatrix} k_1 & b_1 \\ k_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} + b_3 \frac{\begin{vmatrix} a_1 & k_1 \\ a_2 & k_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} - k_3 = 0.$$

Eliminando los denominadores, resulta

$$a_3 \begin{vmatrix} k_1 & b_1 \\ k_2 & b_2 \end{vmatrix} + b_3 \begin{vmatrix} a_1 & k_1 \\ a_2 & k_2 \end{vmatrix} - k_3 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Cambiando los signos de todos los términos, podemos escribir

$$a_3 \begin{vmatrix} b_1 & k_1 \\ b_2 & k_2 \end{vmatrix} - b_3 \begin{vmatrix} a_1 & k_1 \\ a_2 & k_2 \end{vmatrix} + k_3 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Se observa que el primer miembro es el desarrollo del siguiente determinante, con respecto a los elementos de la tercera fila (Teorema 10, Art. 15.5):

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & k_1 \\ a_2 & b_2 & k_2 \\ a_3 & b_3 & k_3 \end{vmatrix}.$$

Este determinante $\Delta_3$ se llama *eliminante* del sistema.

Por tanto, una condición necesaria para que el sistema dado sea compatible es que $\Delta_3 = 0$. Este resultado puede extenderse a $n$ ecuaciones con $n - 1$ incógnitas, tal como expresa el teorema siguiente:

**Teorema 13.** *Una condición necesaria para que un sistema lineal no homogéneo y redundante de n ecuaciones con n — 1 incógnitas sea compatible es que el determinante de orden n formado con los coeficientes y los términos independientes sea igual a cero.*

NOTA. El recíproco del teorema 13 no es necesariamente válido, es decir, la condición no es suficiente. Por ejemplo, en el sistema

$$\begin{aligned} x + 2y &= 5, \\ 2x + 4y &= 9, \\ 3x + 6y &= 12. \end{aligned}$$

el eliminante es cero, pero el sistema no es compatible. De hecho, ningún par de estas tres ecuaciones forma un sistema compatible.

**Ejemplo 5.** Calcular el valor de $k$ para el cual el siguiente sistema redundante sea compatible, y hallar además la solución del sistema:

$$\begin{aligned} 2x + y + z &= k, \\ x - y - 2z &= -2, \\ 3x - y + z &= 2k, \\ x + 2y + z &= 1. \end{aligned}$$

SOLUCION. Para que este sistema sea compatible debemos tener, por el Teorema 13,

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & k \\ 1 & \bar{1} & \bar{2} & 2 \\ 3 & \bar{1} & 1 & 2k \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

El desarrollo de este determinante nos da para $k$ el valor 3. Sustituyendo $k$ por 3 en el sistema dado y resolviendo las primeras tres ecuaciones, encontramos $x = 1$, $y = -1$, $z = 2$. Fácilmente se encuentra que esta solución satisface también a la cuarta ecuación.

## EJERCICIOS. GRUPO 57

1. Comprobar los valores dados, para todos los determinantes del ejemplo 1 (Art. 15.6) y comprobar también la solución.

En cada uno de los ejercicios 2-9, resolver el sistema dado por la regla de Cramer y comprobar la solución por sustitución directa.

2. $x + 3y - z = 0,\quad 3x - 4y + z = 2,\quad 2x + 2y + z = 13.$
3. $2x + 2y - z = 2,\quad x - 3y - 2z = 2,\quad 3x + 4y + z = 7.$
4. $3x - 4y + 7z = 4,\quad x + 2y - 5z = 8,\quad 2x - 3y + 9z = 2.$
5. $x + 5y + 4z = 1,\quad 2x - 5y + 3z = -3,\quad x + 9y + 5z = 2.$

6.
$$\begin{aligned} 4x + 2y + 3z + w &= 3.\\ 2x - 3y - w &= 2,\\ 3x - 2y + z + 2w &= 0,\\ x + 3z - 5w &= 1. \end{aligned}$$

7.
$$\begin{aligned} x + 2y + z - 2w &= -2,\\ 3x - y - z + w &= 3,\\ 2x - y + 2z - 4w &= 1,\\ 4x - 3y - 2z + w &= 8. \end{aligned}$$

8.
$$\begin{aligned} x + 3y + 2z + u - v &= 1,\\ 2x - 5y - z - u + 2v &= 5,\\ x + 7y + z - 2v &= 1,\\ 3x - 3y + 2u + 4v &= 1,\\ x + 4y - z - 2u &= 5. \end{aligned}$$

9.
$$\begin{aligned} x + 4y - 3z + 2u - 3v &= 2,\\ 2x - 5z - 3u + 2v &= -2,\\ 3x + 2y + 7z + u &= 6,\\ x - 3y - 2u + 3v &= 1,\\ 2x - 5y + 3z - v &= 7, \end{aligned}$$

En cada uno de los ejercicios 10 y 11, demostrar que el sistema dado no tiene solución única.

10.
$$\begin{aligned} x + y + z + 7w &= 4,\\ 3x + 8y - 2z + w &= -1,\\ 3x + 7y - z + 5w &= 11,\\ x + 3y - z + w &= 3, \end{aligned}$$

11.
$$\begin{aligned} 3x + y - z + 4w &= 5,\\ x + y + 3z + 5w &= 8,\\ x - 5y - 11z &= -2,\\ x + 3y + 5z + 2w &= 9. \end{aligned}$$

12. Demostrar que si un sistema lineal homogéneo de $n$ ecuaciones con $n$ incógnitas tiene una solución $x = \alpha_1$, $y = \alpha_2, \ldots, w = \alpha_n$, entonces también tiene la solución $x = k\alpha_1$, $y = k\alpha_2, \ldots, w = k\alpha_n$, en donde $k$ es una constante arbitraria.

En cada uno de los ejercicios 13 y 14, demostrar que el sistema dado tiene solamente la solución trivial.

13.
$$\begin{aligned} x + 3y + 2z + w &= 0,\\ 2x - y + 4z + 3w &= 0,\\ 3x + 7y + 6z + 4w &= 0,\\ 2x + 3y + 7z + 5w &= 0. \end{aligned}$$

14.
$$\begin{aligned} 2x + 4y - z + 3w &= 0,\\ x + 6y + 2z - 5w &= 0,\\ 3x - 4z + 3w &= 0,\\ 4x - 2y + 3z + w &= 0. \end{aligned}$$

En cada uno de los ejercicios 15 y 16, demostrar que el sistema dado posee otras soluciones aparte de la solución trivial y hallar algunas de dichas soluciones.

15.
$$\begin{aligned} 2x + 2y + 3z - w &= 0,\\ x - y + 2z + w &= 0,\\ 3x + 2y + z - 2w &= 0,\\ x + y - 3z - 2w &= 0. \end{aligned}$$

16.
$$\begin{aligned} x - 2y + 2z - w &= 0,\\ 3x + 2y + 4z + 2w &= 0,\\ x + 3y + z + 2w &= 0,\\ 2x - y + z + w &= 0. \end{aligned}$$

En cada uno de los ejercicios 17 y 18, resolver para $x$, $y$ y $z$ en términos de $w$ el sistema defectuoso dado y obtener varias soluciones.

17.
$$\begin{aligned} x + y + z + w &= 3, \\ x - 2y + 3z + 2w &= -4, \\ 2x - y - 2z - 2w &= 0. \end{aligned}$$

18.
$$\begin{aligned} 2x + 3y - z + w &= 2, \\ x + y - z + 2w &= 4, \\ 3x - 2y - 4z + w &= 6. \end{aligned}$$

19. Un grupo de 18 personas, hombres, mujeres y jóvenes, gana en total \$ 250 por hora. Los hombres ganan \$ 20 por hora, las mujeres \$ 15 por hora y los jóvenes \$10 por hora. Hallar el número de hombres, mujeres y jóvenes.

En cada uno de los ejercicios 20 y 21, determinar si el sistema redundante dado es compatible o incompatible. Si es compatible, hallar la solución.

20.
$$\begin{aligned} 2x + 2y - z &= -5, \\ x - y + 3z &= 6, \\ 2x - 4y + 3z &= 1, \\ x + y + z &= 4. \end{aligned}$$

21.
$$\begin{aligned} 2x + y - z &= 7, \\ x - y - z &= 0, \\ x + 2y + z &= 8, \\ 3x - 2y - 2z &= 3. \end{aligned}$$

22. Comprobar todos los detalles del Ejemplo 5 del Art. 15.6.

En cada uno de los ejercicios 23 y 24, calcular el valor de $k$ para el cual el sistema redundante dado es compatible, y hallar la solución del sistema.

23.
$$\begin{aligned} 2x + y + 3z &= 3, \\ x - y - 2z &= 2k, \\ x + 2y + 2z &= 4k, \\ x + y + z &= 3, \end{aligned}$$

24.
$$\begin{aligned} x + y - 3z &= k, \\ 3x + 3y + z &= 4, \\ 2x - y - 4z &= 4, \\ x - y - 3z &= -k. \end{aligned}$$

25. Por sustitución directa, demostrar que la solución obtenida por la regla de Cramer (Teorema 11) satisface la primera ecuación del sistema (1) del Artículo 15.6.

# 16

# Logaritmos

## 16.1. INTRODUCCION

En este capítulo consideraremos algunas de las propiedades y usos de la función logarítmica. Siendo este un texto de álgebra, el estudiante podrá preguntar por qué incluimos el estudio de una función no algebraica (Art. 3.6). Existen varias razones para hacerlo. Como veremos, el concepto de logaritmo está relacionado con la teoría de los exponentes (Art. 2.13). Además, los logaritmos son muy útiles para efectuar abreviadamente diversas operaciones numéricas que se presentan frecuentemente en la resolución de problemas algebraicos. Finalmente, como un complemento, en el siguiente capítulo estudiaremos varias aplicaciones concretas de los logaritmos.

## 16.2. LAS FUNCIONES EXPONENCIAL Y LOGARITMICA

En lo que llevamos dado, frecuentemente hemos manejado expresiones algebraicas con términos del tipo $x^n$, en donde $x$ es una variable llamada *base* y $n$ es una constante llamada *exponente*. Si ahora intercambiamos la base y el exponente, obtenemos una expresión de la forma $b^x$, en donde la base $b$ es constante y el exponente $x$ es variable. Dicha expresión se llama una *función exponencial*.

En el Art. 2.13 vimos el significado de $b^x$ para todo valor racional de $x$. Así, por ejemplo, por las leyes de los exponentes, $2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2$, $2^{-3} = 1/2^3$, y $2^{3/2} = \sqrt{2^3}$. Pero si $x$ es irracional $b^x$ carece aún de significado. Por ejemplo, $2^{\sqrt{2}}$ no ha sido todavía definido. A continuación vamos a generalizar las leyes de los exponentes para dar un significado a $b^x$ cuando $x$ es irracional, y, por tanto, para que $b^x$ tenga significado para todo valor *real* de $x$.

Para fijar nuestras ideas, sea el exponente $x$ igual a $\sqrt{2}$, que es un número irracional aproximadamente igual a 1.41421 ... En el Art. 10.5 *definimos* a $\sqrt{2}$ como el límite de la sucesión de números racionales 1, 1.4, 1.41, 1.414, ... Para cada uno de estos valores, $b^x$ toma un valor correspondiente. En tratados superiores se demuestra que si $b > 0$, entonces la sucesión de valores de $b^x$ tiende hacia un límite, y este límite se *define* como el valor de $b^{\sqrt{2}}$. En general, si $a$ es cualquier número real

$$\lim_{x \to a} b^x = b^a, \qquad b > 0. \tag{1}$$

La relación (1) significa que un pequeño cambio en $x$ causa solamente un pequeño cambio en el valor de $b^x$; una función así, se llama *continua*. La gráfica de la función exponencial

$$y = b^x, \qquad b > 0, \tag{2}$$

es una curva continua, como se muestra en la figura 43. En esta gráfica $b > 1$. Más adelante veremos que existen dos valores particulares de la constante $b$ que son de especial importancia, siendo ambos mayores que la unidad. La gráfica muestra las siguientes características de la función exponencial $b^x$ cuando $b > 1$:

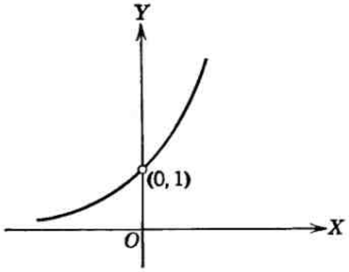


FIG. 43.

(a) Ya que la gráfica está siempre encima del eje $X$, $b^x$ es un número positivo para todo valor real de $x$.

(b) $b^x$ aumenta cuando $x$ aumenta. Cuando $x$ tiende a infinito, también $b^x$ tiende a infinito, escribiéndose

$$\lim_{x \to \infty} b^x = \infty.$$

(c) Para $x < 0$, $b^x < 1$; para $x = 0, b^x = 1$; para $x > 0$, $b^x > 1$.

(d) Cuando $x$ tiende a menor infinito (en la dirección negativa del eje $X$) $b^x$ tiende a cero, escribiéndose

$$\lim_{x \to -\infty} b^x = 0.$$

Además conviene conocer las dos propiedades siguientes, que se demuestran con métodos de matemática superior:

(1) Si $x$ es cualquier número real, racional o irracional, y $b > 0$, la función exponencial $b^x$ satisface todas las leyes de los exponentes (Artículo 2.13).

(2) Si $b > 0$, a cada valor real de $x$ le corresponde solamente un

valor de $y > 0$ dado por la relación $y = b^x$. En este caso se dice que $b^x$ es una *función uniforme de x*. Este hecho también está ilustrado en la gráfica de la figura 43.

En la relación (2), en donde $y$ está expresada directamente como una función de $x$, es posible utilizar operaciones algebraicas para obtener valores de $y$ para valores particulares racionales de $b$ y de $x$. Así, por ejemplo, para $b = 2$ y $x = 3/2, y = b^x = 2^{3/2} = \sqrt{2^3} = \sqrt{2}$. Si $x$ es irracional, $y$ puede obtenerse aproximadamente, utilizando operaciones algebraicas con valores racionales que tiendan hacia $x$, como ya se mencionó.

A continuación consideraremos el problema inverso de hallar $x$ cuando $b$ y $y$ están dados.

Por ejemplo, vamos a estudiar el problema de hallar $x$ en la relación

$$5 = 2^x.$$

En este caso, podemos ver fácilmente que $x$ está comprendido entre 2 y 3, pues $2^2 = 4$ y $2^3 = 8$. Es evidente que el valor de $x$ debe obtenerse por un proceso de aproximación. Para poder resolver un problema como este, hay que considerar la función inversa de la función exponencial (2) que se escribe en la forma

$$(3) \qquad x = \log_b y, \quad b > 0,$$

y se lee "$x$ es igual al logaritmo de $y$ en la base $b$". Ya que las dos igualdades (2) y (3) representan exactamente la misma relación, resulta que un logaritmo es un exponente. De aquí la siguiente definición:

**Definición.** El logaritmo de un número en una base dada es el exponente a que se debe elevar la base para obtener el número.

Debido a la equivalencia de las igualdades (2) y (3), la gráfica de la figura 43 también representa a la función logarítmica definida por la igualdad (3) cuando $b > 1$. Por tanto, en cada punto de la gráfica, el valor de $y$ representa un número positivo y el valor correspondiente de $x$ representa el logaritmo de ese número en la base $b$. En consecuencia, de las características de la función exponencial se deducen las siguientes propiedades de la función logarítmica:

(a) Solamente tienen logaritmos reales los números positivos. Los logaritmos de los números negativos no existen en el sistema de los números reales; en estudios superiores se demuestra que tales logaritmos son números complejos. El logaritmo de cero no está definido.

(b) Cuando un número $y$ aumenta, su logaritmo $x$ también aumenta. Cuando $y$ tiende a infinito, también $x$ tiende a infinito, por lo que se puede escribir

$$\lim_{y \to \infty} \log_b y = \infty.$$

(c) Para $y < 1$, $\log_b y < 0$; para $y = 1$, $\log_b y = 0$; para $y > 1$, $\log_b y > 0$.

(d) Cuando $y$ tiende a cero, su logaritmo tiende hacia menos infinito, escribiéndose

$$\lim_{y \to 0} \log_b y = -\infty.$$

Por métodos de la matemática superior puede demostrarse que si $b > 0$, la función logarítmica $\log_b y$ es uniforme y continua para todos los valores positivos de $y$. Esto también se muestra en la gráfica de la figura 43.

Debido a que en una relación funcional hay la costumbre de representar con $x$ a la variable independiente y con $y$ a la variable dependiente o función, es usual intercambiar la $x$ y $y$ en la relación (3) y escribir la función logarítmica en la forma

$$(4) \qquad y = \log_b x, \quad b > 0,$$

en donde $x$ representa ahora a los números, y $y$ a los logaritmos correspondientes. La gráfica de la ecuación (4) está indicada en la figura 44, que es la representación usual de la función logarítmica. Conviene notar que las gráficas de las figuras 43 y 44 son idénticas en forma, y difieren solamente en sus posiciones relativas a los ejes de coordenadas.

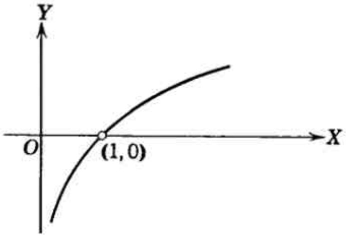


Fig. 44.

NOTA. Teóricamente cualquier número real, con excepción de 0 y 1, puede usarse como base $b$ de un sistema de logaritmos. En efecto, consideremos la relación $y = b^x$ y su forma equivalente $x = \log_b y$ para $b = 0$, para $b = 1$, etc.

Si $b = 0$, $y = b^x = 0$ para todo valor de $x$ con excepción de 0, en cuyo caso $y$ no está definida. Además, si $b = 1$, $y = b^x = 1$ para todo valor de $x$. Por tanto, ni 0 ni 1 pueden servir como base de un sistema de logaritmos.

Si $b$ es negativa, $y = b^x$ puede ser negativa o compleja para ciertos valores de $x$. La discusión de este caso está fuera del campo de este libro.

Si $b$ está entre 0 y 1, $y = b^x$ decrece cuando $x$ aumenta. Mientras que en los sistemas de logaritmos en uso, se escoge la función $y = b^x$ de modo que aumente cuando $x$ aumenta.

Por sencillez y para todos los usos prácticos, tomaremos para base de un sistema de logaritmos un número positivo mayor que la unidad.

**Ejemplo.** En cada una de las siguientes relaciones, hallar el valor de la letra especificada:

(a) Si $x = \log_2 8$, hallar $x$.

(b) Si $\log_b \frac{1}{16} = 4$, hallar $b$.
(c) Si $\log_3 y = -2$, hallar $y$.

SOLUCION. En cada caso transformamos la relación dada a su forma exponencial equivalente.

(a) De $x = \log_2 8$, tenemos la relación exponencial $2^x = 8$, de donde $x = 3$.

(b) De $\log_b \frac{1}{16} = 4$, tenemos la relación exponencial $b^4 = \frac{1}{16}$, de donde $b = \frac{1}{2}$.

(c) De $\log_3 y = -2$, tenemos la relación exponencial $3^{-2} = y$, de donde $y = \frac{1}{9}$.

## EJERCICIOS. GRUPO 58

En cada uno de los ejercicios 1-6 pasar la relación dada a la forma logarítmica.

1. $2^4 = 16$. 2. $3^{-1} = \frac{1}{3}$. 3. $\left(\frac{1}{8}\right)^{2/3} = \frac{1}{4}$.
4. $N = b^x$. 5. $x^y = z$. 6. $u = v^w$.

En cada uno de los ejercicios 7-12 pasar la relación dada a la forma exponencial.

7. $\log_{10} 100 = 2$. 8. $\log_3 81 = 4$. 9. $\log_{10} 0.1 = -1$.
10. $\log_b a = c$. 11. $\log_8 4 = \frac{2}{3}$. 12. $\log_{\sqrt{2}} 1 = 0$

En cada uno de los ejercicios 13-16 hallar el logaritmo que se pide.

13. $\log_{10} 1000$. 14. $\log_{10} 0.001$. 15. $\log_5 625$. 16. $\log_{0.2} 0.008$.
17. Si $\log_b 0.01 = -2$, hallar $b$. 18. Si $\log_7 N = 0$, hallar $N$.
19. Si $\log_4 8 = x$, hallar $x$. 20. Si $\log_b 9 = -2$, hallar $b$.
21. Si $\log_4 N = 3$, hallar $N$.
22. Demostrar que $\log_b 1 = 0$ y que $\log_b b = 1$.
23. Demostrar que $\log_b b^x = x$ y que $b^{\log_b x} = x$.

En cada uno de los ejercicios 24-26, escribir la función inversa de la dada.

24. $y = 3^{-x}$. 25. $y = 10^{x-1}$. 26. $y = \log_{10} \frac{1}{x}$.

27. Demostrar que la función exponencial $y = b^x$ tiene la propiedad de que si $x$ representa una sucesión de valores en progresión aritmética, los valores correspondientes de $y$ están en progresión geométrica.

28. Trazar la gráfica de la función exponencial $y = 2^x$.

29. Trazar la gráfica de la función exponencial $y = (\frac{1}{2})^x$. Comparar el resultado con la gráfica obtenida en el ejercicio 28.

30. Trazar la gráfica de la función exponencial $y = 3^{-x}$. Comparar esta gráfica con la de la figura 43.

31. Escribir las características de la gráfica obtenida en el ejercicio 29 y compararlas con las obtenidas para la gráfica de la figura 43.

32. Trazar la gráfica de la función logarítmica $y = \log_2 x$ usando la función exponencial equivalente.

33. Trazar la gráfica de la función logarítmica $y = \log_{1/2} x$ usando la función exponencial equivalente, y comparar el resultado con el obtenido en el ejercicio 32.

34. Escribir las características de la función logarítmica cuya gráfica aparece en la figura 44.

35. Escribir las características de la gráfica obtenida en el ejercicio 33 y compararlas con las obtenidas en el ejercicio 34.

## 16.3. PROPIEDADES FUNDAMENTALES DE LOS LOGARITMOS

Hemos visto que un logaritmo es un exponente. Por tanto, expresando las leyes de los exponentes en forma logarítmica, obtendremos leyes de los logaritmos.

A continuación estableceremos teoremas fundamentales de los logaritmos que son el resultado de transformar las cuatro siguientes leyes de los exponentes (Art. 2.13):

(1) $$b^x \cdot b^y = b^{x+y}.$$

(2) $$b^x \div b^y = b^{x-y}.$$

(3) $$(b^x)^n = b^{nx}.$$

(4) $$\sqrt[n]{b^x} = b^{x/n}.$$

En los teoremas que siguen, $M$, $N$ y $b$, son tres números positivos. En consecuencia, podemos escribir

(5) $$M = b^x \quad \text{y} \quad N = b^y,$$

de donde

(6) $$x = \log_b M \quad \text{y} \quad y = \log_b N.$$

**Teorema 1.** *El logaritmo del producto de dos números positivos es igual a la suma de los logaritmos de dichos números, es decir,*

$$\log_b MN = \log_b M + \log_b N.$$

DEMOSTRACION. De (5) y (1) tenemos $MN = b^x \cdot b^y = b^{x+y}$ de donde, por la definición de logaritmo y (6)

$$\log_b MN = x + y = \log_b M + \log_b N.$$

Este teorema puede extenderse inmediatamente al caso del producto de tres o más números positivos.

**Teorema 2.** *El logaritmo del cociente de dos números positivos es igual al logaritmo del dividendo menos el logaritmo del divisor es decir,*

$$\log_b \frac{M}{N} = \log_b M - \log_b N.$$

$$\log_b \frac{M}{N} = \log_b M - \log_b N.$$

DEMOSTRACION. De (5) y (2) tenemos

$$\frac{M}{N} = \frac{b^x}{b^y} = b^{x-y}$$

de donde, por la definición del logaritmo y (6)

$$\log_b \frac{M}{N} = x - y = \log_b M - \log_b N.$$

**Teorema 3.** *El logaritmo de la enésima potencia de un número positivo es igual a n veces el logaritmo del número, es decir,*

$$\log_b M^n = n \log_b M.$$

DEMOSTRACION. De (5) y (3) tenemos

$$M^n = (b^x)^n = b^{nx}$$

de donde, por la definición de logaritmo y (6),

$$\log_b M^n = nx = n \log_b M.$$

**Teorema 4.** *El logaritmo de la raíz enésima positiva real de un número positivo es igual al resultado de dividir entre n el logaritmo del número, es decir,*

$$\log_b M^{1/n} = \frac{1}{n} \log_b M.$$

DEMOSTRACION. De (5) y (4) tenemos

$$M^{1/n} = \sqrt[n]{b^x} = b^{x/n}$$

de donde, por la definición de logaritmo y (6),

$$\log_b M^{1/n} = \frac{x}{n} = \frac{\log_b M}{n}.$$

A continuación escribimos las propiedades de los logaritmos que son consecuencia directa de la definición de logaritmo.

(7) $$\log_b b = 1.$$

(8) $$\log_b b^n = n.$$

(9) $$b^{\log_b N} = N.$$

El logaritmo de un número depende de la base. El logaritmo de un número positivo en cualquier base $a > 0$ puede expresarse en función de logaritmos en otra base $b > 0$ por medio del teorema siguiente:

**Teorema 5.** *El logaritmo de un número positivo N en la base a, es igual al logaritmo de N en otra base b, dividido entre el logaritmo de a en la base b, es decir,*

$$\log_a N = \frac{\log_b N}{\log_b a}.$$

DEMOSTRACION. Sea $\log_a N = x$

de donde $N = a^x$.

Tomando logaritmos en la base $b$ tenemos, por el Teorema 3,

$$\log_b N = x \log_b a$$

de donde $x = \dfrac{\log_b N}{\log_b a}$, o sea,

$$\log_a N = \frac{\log_b N}{\log_b a}, \tag{10}$$

como se quería demostrar.

S en (10) hacemos $N = b$ obtenemos, por (7), la siguiente relación:

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}. \tag{11}$$

NOTAS

1. La relación (10) del Teorema 5 para *cambio de base* es útil cuando deseamos obtener el logaritmo de un número en cierta base $a$, y la tabla de logaritmos de que se dispone está en la base $b$.

2. En la relación (11), el número $\log_a b$ se llama *módulo* del sistema de logaritmos en la base $a$ con respecto al sistema de logaritmos en la base $b$.

Veremos más adelante que los resultados de los Teoremas 1 a 4 son muy útiles al efectuar cálculos aritméticos que comprenden las operaciones de multiplicación, división, potenciación y radicación. Pero por ahora solamente los usaremos para aplicarlos a expresiones exponenciales y logarítmicas, como se muestra en los siguientes ejemplos.

**Ejemplo 1.** Hallar la inversa de la función $y = \dfrac{b^x - b^{-x}}{2}$, $b > 0$.

SOLUCION. Debemos despejar $x$ en función de $y$ en la ecuación

$$y = \frac{b^x - b^{-x}}{2}$$

Multiplicando por $2b^x$, obtenemos

$$2yb^x = b^{2x} - 1.$$

Ordenando los términos, resulta $b^{2x} - 2b^x - 1 = 0$.

Esta última ecuación es de forma cuadrática (Art. 5.6), ya que si hacemos $z = b^x$, resulta

$$z^2 - 2yz - 1 = 0.$$

Por tanto, despejando $z$, o sea $b^x$, aplicando la fórmula de la ecuación cuadrática (Art. 5.4), obtenemos

$$b^x = \frac{2y \pm \sqrt{4y^2 + 4}}{2} = \pm \sqrt{y^2 + 1}. \tag{12}$$

Aquí se tiene $\sqrt{y^2+1} > y$, y ya que la función exponencial $b^x$ es siempre positiva (Art. 16.2), descartamos el signo menos en (12) y escribimos

$$b^x = y + \sqrt{y^2+1}$$

de donde se obtiene la función inversa buscada:

$$x = \log_b (y + \sqrt{y^2+1}).$$

**Ejemplo 2.** Hallar la función inversa de la función

$$y = \log_b x - \log_b (1 + x).$$

SOLUCION. Por el Teorema 2, la función dada puede escribirse en la forma

$$y = \log_b \frac{x}{1+x}$$

de donde $\qquad b^y = \dfrac{x}{1+x}$

y quitando denominadores $\qquad b^y + b^y x = x.$

Trasponiendo términos: $\qquad b^y = x(1 - b^y)$

y despejando $x$, $\qquad x = \dfrac{b^y}{1-b^y}.$

**Ejemplo 3.** Demostrar que

$$\log_b (\sqrt{x+2} - \sqrt{x+1}) = -\log_b (\sqrt{x+2} + \sqrt{x+1}).$$

SOLUCION. Ya que vamos a obtener un resultado que comprende $\sqrt{x+2} + \sqrt{x+1}$, observemos que:

$$\sqrt{x+2} - \sqrt{x+1} = (\sqrt{x+2} - \sqrt{x+1}) \cdot \frac{\sqrt{x+2} + \sqrt{x+1}}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x+1}}$$

$$= \frac{x+2-(x+1)}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x+1}} = \frac{1}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x+1}}.$$

De donde, $\qquad \log_b (\sqrt{x+2} - \sqrt{x+1}) = \log_b \dfrac{1}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x+1}}$

Por el Teorema 2, $\qquad = \log_b 1 - \log_b (\sqrt{x+2} + \sqrt{x+1})$

Por la propiedad (8) para $n = 0$, $= -\log_b (\sqrt{x+2} + \sqrt{x+1})$.

## EJERCICIOS. GRUPO 59

1. Extender el Teorema 1 (Art. 16.3) al caso del producto de tres o más números positivos.

2. Demostrar que el logaritmo de la media geométrica de dos números positivos es igual a la media aritmética de sus logaritmos.

3. Obtener el resultado del Teorema 4 directamente del Teorema 3 (Artículo 16.3).

4. Obtener la propiedad (8) del Art. 16.3 a partir del Teorema 3 y la propiedad (7).

5. Obtener la propiedad (7) del Art. 16.3 a partir de la propiedad (8).

6. Obtener la propiedad (9) del Art. 16.3 por el siguiente procedimiento: Se hace $b^{\log_b N} = y$ y se toma en ambos miembros logaritmos en base $b$.

7. Si $N$, $a$ y $b$ son números positivos, demostrar que $\log_b N = \log_a N \cdot \log_b a$.

8. Demostrar que $\log_b N^{-n} = -n \log_b N$.

En cada uno de los ejercicios 9-14, expresar el logaritmo dado en función de logaritmos de expresiones más sencillas.

9. $\log_b \dfrac{x^2-1}{x^2-4}$.
10. $\log_b \dfrac{x^2}{x^3+1}$.
11. $\log_b \dfrac{x(x+2)^2}{(x-2)^4}$.
12. $\log_b \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{3x^2}$.
13. $\log_b \sqrt{\dfrac{x^2+1}{x^2+2}}$.
14. $\log_b \sqrt{\dfrac{x(x^2-5)}{(x^2+3)(x^2-3)}}$.

En cada uno de los ejercicios 15-18, hallar el valor de $x$.

15. $\log_b \mathrm{x} = \log_b 2 + 3 \log_b 2 - \log_b 4$.
16. $\log_b \mathrm{x} = \frac{1}{2} \log_b 3 + \log_b 4 - \frac{1}{2} \log_b 2$.
17. $\log_{10} x = 2 \log_{10} 3 + 3 \log_{10} 2 - 2$.
18. $\log_{10} x = \frac{1}{2} \log_{10} 16 - \frac{1}{3} \log_{10} 8 + 1$.
19. Simplificar (a) $b^{\log_b 3}$; (b) $b^{2 \log_b 2}$.
20. Simplificar (a) $10^{1/2 \log_{10} 8}$; (b) $10^{3 \log_{10} 2}$.

En cada uno de los ejercicios 21-30, hallar la función inversa de la función dada.

21. $y = b^{x+2}$.
22. $y = b^{\frac{x-1}{x}}$.
23. $y = \dfrac{1}{1-b^x}$.
24. $y = \dfrac{b^x-1}{b^x+1}$.
25. $y = \dfrac{1+b^x}{1-b^x}$.
26. $y = \dfrac{b^x+b^{-x}}{2}$.
27. $y = \log_b \dfrac{x}{x-1}$.
28. $y = \log_b \dfrac{x}{x^2+1}$
29. $y = \log_b \dfrac{1 \pm \sqrt{1-x^2}}{x}$.
30. $y = \log_b \dfrac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}$

31. Demostrar que $\dfrac{1}{2} \log_b \dfrac{3+2\sqrt{2}}{3-2\sqrt{2}} = \log_b (3+2\sqrt{2})$.

32. Demostrar que

$$\log_b (\sqrt{x+3} + \sqrt{x+2}) = -\log_b (\sqrt{x+3} - \sqrt{x+2}).$$

33. Demostrar que $\log_b \dfrac{\sqrt{a^2+x^2}+a}{x} = -\log_b \dfrac{\sqrt{a^2+x^2}-a}{x}$.

34. Demostrar que $\log_b (x \pm \sqrt{x^2 - 1}) = \pm \log_b (x + \sqrt{x^2 - 1})$.

35. Demostrar que $\log_b (1 - \sqrt{1 - x^2} = 2 \log_b x - \log_b (1 + \sqrt{1 - x^2})$.

## 16.4. SISTEMAS DE LOGARITMOS

Hemos visto anteriormente que es deseable, tanto por razones teóricas como prácticas, que la base de un sistema de logaritmos sea positiva y mayor que la unidad. Hay en uso dos bases con estas características; una de ellas es el número 10 y la otra un número irracional representado generalmente por la letra $e$ y cuyo valor es, aproximadamente, igual a 2.71828 . . .

El sistema de logaritmos de base 10 se llama *sistema ordinario, común, decimal* o *de Briggs,* y es el usado corrientemente para efectuar cálculos aritméticos. El sistema de logaritmos de base $e$ llamado *sistema natural* o *Neperiano,* se le usa casi exclusivamente en el cálculo diferencial e integral y en matemáticas superiores.

Más adelante veremos que el sistema de logaritmos comunes, o sea de base 10, tiene ventajas bien definidas para efectuar operaciones aritméticas con los números de nuestro sistema decimal. Sin embargo, no estamos en condiciones de mostrar las ventajas que la base $e$ ofrece en ciertos casos, posteriormente, al estudiar cálculo diferencial, el estudiante apreciará la conveniencia de usar logaritmos naturales cuya base $e$ está *definida* por el siguiente límite:

$$e = \lim_{z \to \infty} \left( 1 + \frac{1}{z} \right)^z = 2.71828 \ldots$$

La relación entre los logaritmos comunes y los logaritmos naturales puede obtenerse por medio del Teorema 5 (Art. 16.3), en el que se demostró que para cualquier número positivo $N$ y para cualquier par de bases diferentes $a$ y $b$,

$$\log_a N \frac{\log_b N}{\log_b a}.$$

Si en esta relación hacemos $a = e$ y $b = 10$, resulta

$$\log_e N = \frac{\log_{10} N}{\log_{10} e} \tag{1}$$

de donde

$$\log_{10} N = \log_{10} e \cdot \log_e N. \tag{2}$$

En una tabla de logaritmos decimales se encuentra que

$$\log_{10} e = 0.4343$$

siendo su recíproco

$$\frac{1}{\log_{10} e} = \frac{1}{0.4343} = 2.3026.$$

Por tanto, las relaciones (1) y (2) pueden escribirse en las formas respectivas

$$\log_e N = 2.3026 \log_{10} N,$$
$$\log_{10} N = 0.4343 \log_e N.$$

El número $\log_{10} e = 0.4343$ se llama *módulo* de los logaritmos comunes o decimales, con respecto a los logaritmos naturales. Esto es, por la relación (11) y la Nota 2 del Art. 16.3, el recíproco de $\log_{10} e$, o sea $\log_e 10 = 2.3026$ se llama *módulo* de los logaritmos naturales con respecto a los logaritmos comunes.

Ya que, en general, solamente usaremos las bases 10 y $e$, podemos omitir la escritura de dichas bases adoptando una convención sencilla. Así, para el logaritmo de un número $N$ en la base 10, escribiremos $\log N$ en lugar de $\log_{10} N$. Y para el logaritmo de $N$ en la base $e$, escribiremos $\ln N$ en lugar de $\log_e N$. El término $\ln N$ se lee "logaritmo natural de $N$". Por ejemplo, la relación (2) puede escribirse así:

$$\log N = \log e \cdot \ln N.$$

## 16.5. ECUACIONES EXPONENCIALES

Una ecuación en que la incógnita aparece como exponente se llama *ecuación exponencial.* $2^{x+1} = 8$ y $e^x - e^{-x} = 1$ son ejemplos de ecuaciones exponenciales.

Para resolver una ecuación exponencial, primeramente, si es necesario, se despeja la expresión exponencial. El siguiente paso consiste en tomar logaritmos en ambos miembros en una base apropiada. En este paso usamos el hecho de que si dos expresiones son iguales, también sus logaritmos son iguales ya que, como hemos visto (Art. 16.2), la función exponencial y su inversa la función logarítmica son uniformes. Este procedimiento queda mejor explicado por medio de ejemplos, en los que es importante recordar que la función exponencial es siempre positiva y que estamos considerando únicamente valores reales.

**Ejemplo 1.** Resolver la ecuación

$$e^x - e^{-x} = 1.$$

SOLUCION. Multiplicando por $e^x$, obtenemos

$$e^{2x} - 1 = e^x$$
$$e^{2x} - e^x - 1 = 0.$$

Esta ecuación es de segundo grado (Art. 5.6) si se considera a $e^x$ como incógnita. Por tanto, despejando $e^x$ por medio de la fórmula de la ecuación cuadrática, obtenemos

$$e^x = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Ya que $e^x$ es siempre positiva, descartamos el signo menos y escribimos

$$e^x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Tomando logaritmos en base $e$, obtenemos

$$x = \ln \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

que es la solución buscada.

**Ejemplo 2.** Resolver la ecuación

$$e^{3x} - 2e^{2x} - 2e^x - 3 = 0.$$

SOLUCION. Si hacemos $y = e^x$, esta ecuación toma la forma

(1) $$y^3 - 2y^2 - 2y - 3 = 0,$$

que es una ecuación que puede resolverse por los métodos del Capítulo 11. Es fácil comprobar que $y = 3$ es una raíz de la ecuación (1). Separando esta raíz por división sintética, obtenemos la ecuación reducida

$$y^2 + y + 1 = 0,$$

la cual no posee raíces reales.

Ya que $e^x$ debe ser positiva, el único valor de $y$ es 3. Por tanto, $e^x = 3$ de donde $x = \ln 3$ es la solución buscada.

**Ejemplo 3.** Despejar $t$ en la siguiente ecuación:

$$I = \frac{E}{R}\left(1 - e^{-\frac{Rt}{L}}\right).$$

SOLUCION. Primeramente aislaremos la expresión exponencial $e^{-\frac{Rt}{L}}$. Multiplicando por $R$, tenemos

$$IR = E - Ee^{-\frac{Rt}{L}}$$

de donde $$IR - E = Ee^{-\frac{Rt}{L}}$$

y $$e^{-\frac{Rt}{L}} = \frac{E - IR}{E}.$$

Tomando logaritmos en base $e$, resulta

$$-\frac{Rt}{L} = \ln\left(\frac{E - IR}{E}\right)$$

de donde

$$t = -\frac{L}{R}\ln\left(\frac{E - IR}{E}\right).$$

## 16.6. ECUACIONES LOGARITMICAS

Una ecuación que contiene una o más funciones logarítmicas de una o más incógnitas, se llama *ecuación logarítmica.*

$$\log(x - 2) + \log(x + 1) + 1 = \log 40$$

y

$$2\ln y = 3\ln(x - 1) + x$$

son ejemplos de ecuaciones logarítmicas.

Para resolver una ecuación logarítmica con una sola incógnita, se le transforma primeramente en una relación que no contenga logaritmos. En este proceso se hace uso de la propiedad que dice: si los logaritmos de dos expresiones son iguales, las expresiones son también iguales. En estos problemas es importante comprobar todas las soluciones que se obtengan ya que no estamos considerando los valores de la variable que corresponden a logaritmos de números negativos.

**Ejemplo 1.** Resolver la ecuación

(1) $$\log(x - 2 + \log(x + 1) + 1 = \log 40.$$

SOLUCION. Ya que van a usarse logaritmos en base 10, sustituiremos el número 1 por log 10, escribiendo

$$\log(x - 2) + \log(x + 1) + \log 10 = \log 40.$$

Por el Teorema 1 (Art. 16.3), obtenemos

$$\log 10(x - 2)(x + 1) = \log 40.$$

De donde

$$10(x - 2)(x + 1) = 40,$$

$$x^2 - x - 2 = 4,$$

y

$$x^2 - x - 6 = 0.$$

La resolución de esta última ecuación es inmediata y se obtiene $x = -2$ y $x = 3$. Pero debemos rechazar la solución $-2$ ya que al sustituir este valor en (1) se obtienen logaritmos de números negativos. La solución 3 es válida ya que al sustituir en (1) obtenemos

$$\log 1 + \log 4 + 1 = \log 40$$

de donde

$$0 + \log 4 + 1 = \log 4 + \log 10$$

o sea

$$\log 4 + 1 = \log 4 + 1.$$

Consideremos ahora una ecuación logarítmica con más de una incógnita.

**Ejemplo 2.** Transformar la siguiente ecuación en otra que no contenga logaritmos.

$$2 \ln y = 3 \ln (x - 1) + x.$$

SOLUCION. Ya que la ecuación dada comprende logaritmos naturales, sustituiremos $x$ por $\ln e^x$ obteniendo

$$2 \ln y = 3 \ln (x - 1) + \ln e^x.$$

Luego, por las propiedades de los logaritmos (Art. 16.3), tenemos

$$\ln y^2 = \ln (x - 1)^3 e^x$$

de donde $$y^2 = (x - 1)^3 e^x,$$

que es la ecuación buscada.

## EJERCICIOS. GRUPO 60

1. Si $N$ es cualquier número positivo, demostrar que $\ln N = \ln 10 \cdot \log N$.

2. Demostrar que $\log e = \dfrac{1}{\ln 10}$ y que $\ln 10 = 2.3026$.

3. Construir la gráfica de la función $y = e^{-x^2}$. Una aproximación aceptable de la forma de esta curva puede obtenerse tomando $e = 3$. Esta gráfica es otro ejemplo de *curva de probabilidad* (Art. 14.6).

4. Resolver detalladamente el ejemplo 2 del Art. 16.5.

En cada uno de los ejercicios 5-20, resolver la ecuación dada.

5. $3^{x+1} = 81$. 6. $2^{x-1} = 16$. 7. $5^{x^2+x} = 25$.
8. $2^{x+2} = 4^{x-1}$. 9. $5^{x+1} = 3^{2x}$. 10. $7^x = 2^{2x+1}$.
11. $e^x - e^{-x} = 2$. 12. $e^x + e^{-x} = 1$.
13. $e^{2x} - 2e^x - 3 = 0$. 14. $e^{2x} + 5e^x + 6 = 0$.
15. $e^{2x} - 2e^{-2x} - 1 = 0$. 16. $2e^{3x} - 4e^{-3x} - 7 = 0$.
17. $e^{3x} - 3e^{2x} + 4e^x - 4 = 0$. 18. $e^{2x} - 2e^x - 5 + 6e^{-x} = 0$.
19. $2e^{4x} + e^{3x} + e^{2x} + 11e^x - 6 = 0$.
20. $3e^{3x} - 7e^{2x} - 19e^x - 5 + 4e^{-x} = 0$.

21. En las progresiones geométricas (Art. 10.3), aparece la relación $a_n = a_1 r^{n-1}$. Despejar $n$ en función de $a_1$, $a_n$ y $r$.

22. En las progresiones geométricas (Art. 10.3), aparece la relación $s_n = \dfrac{a_1(1 - r^n)}{1 - r}$. Despejar $n$ en función de $a_1$, $s_n$ y $r$.

23. En un circuito eléctrico con resistencia y capacitancia en serie es válida la fórmula $Q = CE(1 - e^{-t/CR})$. Despejar $t$.

24. En el interés compuesto el monto $A$ y el capital $P$ están relacionados por la fórmula $A = P(1 + r)^n$. Despejar $n$ en función de $A$, $P$ y $r$.

En cada uno de los ejercicios 25-33, resolver la ecuación dada.

25. $\log x - \log (x - 2) = \log 2$. 26. $\log x + \log (x - 1) = \log 6$.
27. $\ln 12 - \ln (x - 1) = \ln (x - 2)$.

28. $\log(x-2)+\log(x-3)=\log 2$.
29. $\log(x+2)+\log(x-1)=1$.
30. $\log(2x-3)=1-\log(x-2)$.
31. $\log(3x+1)=2-\log(x+7)$.
32. $\log(x+1)+\log(x-2)=1-\log(x-3)$.
33. $2\log(x+3)+\log(x+2)=2$.

En cada uno de los ejercicios 34-40, transformar la ecuación dada en otra que no contenga logaritmos.

34. $\log x+\log y=\log 4$.
35. $\ln(x+y)+\ln(x-y)=0$.
36. $2\log y-x=\log x$.
37. $3\ln x-2\ln y=1$.
38. $\log(x+y)-\log y=\log 3-\log(x^2-xy+y^2)$.
39. $2\ln 2x-\ln(z+2y)=\ln(z-2y)$.
40. $\ln x+2\ln y-x-y=z-3\ln z$.

## 16.7. TABLAS DE LOGARITMOS

Existen tablas de logaritmos muy extensas tanto para la base 10 como para la base $e$. La construcción de estas tablas requiere el conocimiento de ciertas series que se estudian en los cursos de Análisis matemático. Para nuestros propósitos resulta suficiente estudiar su manejo.

En las tablas de logaritmos naturales cada número aparece acompañado de su logaritmo. En cambio, en las tablas de logaritmos decimales para cada número se da solamente una parte del logaritmo correspondiente. Por tanto, es necesario explicar la forma en que se maneja una tabla de logaritmos decimales. En el Apéndice II hemos incluido una pequeña tabla de logaritmos decimales que es a la que nos referiremos en este artículo y el siguiente.

| | |
|---|---|
| 0 | $-\infty$ |
| $x$ | $\log x$ |
| $\infty$ | $\infty$ |
| ↑ | ↑ |
| 1000 | 3 |
| 100 | 2 |
| 10 | 1 |
| 1 | 0 |
| 0.1 | $-1$ |
| 0.01 | $-2$ |
| 0.001 | $-3$ |
| ↓ | ↓ |

En principio, observemos la siguiente tabla que nos servirá de base para explicar otra tabla más amplia.

Aquí están indicadas las propiedades de los logaritmos ya estudiadas en el Art. 16.2. Se nota, por ejemplo, que los logaritmos de todos los números positivos comprenden todo el sistema de los números reales, excluyendo así a los logaritmos de números negativos del sistema de números reales.

Es evidente que las potencias enteras de 10 son los únicos números cuyos logaritmos decimales son números enteros. Por tanto, cualquier otro número tiene como logaritmo a un entero más, o menos, una fracción decimal con un cierto número de cifras exactas. Por ejemplo, el logaritmo de 225 es 2.3522, con 4 decimales exactas.

Ya que el logaritmo de un número aumenta cuando el número aumenta, resulta fácil determinar el par de enteros sucesivos entre los que está comprendido el logaritmo de un número. Así por ejemplo, para un número comprendido entre 1 y 10, el logaritmo está comprendido entre 0 y 1; para un número entre 10 y 100, el logaritmo está entre 1 y 2, y así sucesivamente. Además, para un número entre 0.1 y 1 el logaritmo está comprendido entre 0 y —1; para un número entre 0.1 y 0.01, el logaritmo está comprendido entre —1 y —2 y así sucesivamente. Sin embargo, la parte decimal de un logaritmo no puede determinarse por simple observación, siendo precisamente esta parte decimal la que proporciona una tabla de logaritmos.

El logaritmo de un número entre 100 y 1000 está comprendido entre 2 y 3 y por consiguiente, es igual a 2 más una fracción decimal. El logaritmo de un número entre 0.01 y 0.001 está comprendido entre —2 y —3 y, por tanto, es igual a —2 menos una fracción decimal, o bien a —3 más una fracción decimal. Se prefiere elegir tomar el logaritmo como —3 más una fracción decimal. En general, para cualquier número, la parte decimal de su logaritmo se toma siempre positiva (o cero); como veremos, este convenio tiene la gran ventaja de ampliar el uso de las tablas de logaritmos.

Resumiendo, un logaritmo decimal consta de la suma de dos partes, una de ellas es un entero y la otra es una fracción decimal positiva (que puede ser cero). El entero, que puede ser positivo, negativo o cero, se llama la *característica* y se obtiene rápidamente con la regla que daremos a continuación. La fracción decimal se llama *mantisa* y la proporciona una tabla de logaritmos decimales.

*La regla para obtener la característica* del logaritmo de un número $N$ es como sigue:

(1) Si $N \geq 1$, la característica de $\log N$ es una unidad menor que el número de dígitos de $N$ que están a la izquierda del punto decimal.

(2) Si $N < 1$ y $N$ está escrito en forma decimal, la característica de $\log N$ es negativa con un valor absoluto una unidad mayor que el número de ceros que aparecen inmediatamente a la derecha del punto decimal.

Como ejemplos de esta regla, observemos que los logaritmos de los números 4232, 321.3, 85.72, 1.26, 0.843, 0.0436 y 0.002917 tienen las características respectivas 3, 2, 1, 0, —1, —2 y —3.

Ahora mostraremos cuál es la ventaja de usar mantisas no negativas. Si $b$ es un número positivo comprendido en el intervalo $1 \leq b < 10$. cualquier número positivo $N$ puede escribirse en la forma

$$N = b \cdot 10^n, \tag{1}$$

siendo $n$ un número entero, positivo, negativo o cero. Por ejemplo,

$$\begin{aligned} 4232 &= 4.232 \times 10^3, \\ 1.26 &= 1.26 \times 10^0, \\ 0.0436 &= 4.36 \times 10^{-2}, \text{ etc.} \end{aligned}$$

Conviene observar que las cifras significativas de $b$ son las mismas y en el mismo orden que las cifras significativas de $N$.

De la relación (1) tenemos

$$\log N = \log b + n. \tag{2}$$

La característica de $\log b$ es cero; representemos su mantisa con $m$, teniéndose por tanto $\log b = m$. Entonces la relación (2) puede escribirse en la forma

$$\log N = n + m, \tag{3}$$

en donde $n$ es la característica y $m$ es la mantisa. Obsérvese que mientras que $n$ varía de acuerdo con la magnitud de $N$, la mantisa $m$ se conserva igual que en el logaritmo de $b$. Dada la importancia de este resultado lo enunciamos en el teorema siguiente:

**Teorema 6.** *Si dos números positivos tienen las mismas cifras significativas y en el mismo orden, pero difieren en su magnitud, sus logaritmos respectivos tienen diferentes características pero exactamente la misma mantisa.*

Como ejemplo tenemos

$$\begin{aligned} \log 1.42 &= 0.1523, \\ \log 1420 &= \log (1.42) \cdot 10^3 = (\log 1.42) + 3 = 3.1523, \\ \log 0.142 &= \log (1.42) \cdot 10^{-1} = (\log 1.42) - 1 = \bar{1}.1523, \\ \log 0.00142 &= \log (1.42) \cdot 10^{-3} = (\log 1.42) - 3 = \bar{3}.1523. \end{aligned}$$

En el caso de un logaritmo con característica negativa escribimos el signo menos sobre la característica para mostrar que solamente ella es negativa, mientras que la mantisa es positiva. Así, por ejemplo, ya que 0.142 es menor que la unidad, su logaritmo es negativo como puede apreciarse escribiendo

$$1.1523 = -1 + 0.1523 = -0.8477.$$

Para evitar características negativas se acostumbra sumar 10 a la característica y restar 10 a la derecha de la mantisa. Así por ejemplo, el logaritmo $\bar{1}.1523$ se suele escribir $9.1523 - 10$. Sin embargo, aquí acostumbraremos usar características negativas indicándolas por medio de un signo menos sobre ellas.

Habiendo estudiado cómo se determina la característica sólo resta mostrar cómo se obtiene la mantisa utilizando una tabla de logaritmos, tal como la que damos en el Apéndice II.

Si el número dado tiene tres cifras significativas o menos, localizamos las primeras dos cifras en la columna izquierda y la tercera cifra en la parte superior de la tabla. La mantisa buscada está formada por el número de cuatro dígitos que está en la fila de las primeras dos cifras y en la columna de la tercera cifra. Así, por ejemplo, para el número 142, las primeras dos cifras aparecen en la columna izquierda en la quinta fila, y la tercera cifra 2 aparece en la parte superior de la tercera columna. Las cifras correspondientes son 1523; por tanto, la mantisa de log 142 es 0.1523. Como práctica del uso de la tabla se recomienda que el estudiante compruebe los siguientes logaritmos: $\log 34.5 = 1.5378$, $\log 456 = 2.6590$, $\log 2.03 = 0.3075$, $\log 0.075 = \bar{2}.8751$.

Si el número dado tiene cuatro cifras significativas o más, la mantisa de su logaritmo no aparece en la tabla pero puede obtenerse aproximadamente por el método de *interpolación lineal* estudiado en el Art. 11.10. Este método se basa en el supuesto de que para un pequeño cambio en el número, el cambio en su logaritmo es proporcional al cambio en el número. Vamos a explicar este procedimiento por medio de un ejemplo.

**Ejemplo 1.** Hallar el logaritmo de 1424.

SOLUCION. La característica es 3. La mantisa está comprendida entre la mantisa de 1420 y la mantisa de 1430. De la tabla tenemos

$$\begin{aligned} \text{mantisa de } 1430 &= 0.1553, \\ \text{mantisa de } 1420 &= 0.1523. \end{aligned}$$

La diferencia entre estas dos mantisas es 0.0030 y se llama la *diferencia tabular*. El aumento en el número de 1420 a 1430 es 10 y produce un aumento en la mantisa de 0.0030. Por tanto, por proporciones, al aumentar el número de 1420 a 1424, o sea a un aumento de 4, le corresponderá un aumento en la mantisa de $4/10 \times 0.0030$, o sea, 0.0012. La mantisa buscada es $0.1523 + 0.0012 = 0.1535$, y $\log 1424 = 3.1535$.

Como práctica conviene que el estudiante compruebe los siguientes logaritmos: $\log 5026 = 3.7012$, $\log 0.006241 = \bar{3}.7953$, $\log 8.325 = 0.9204$.

Vamos ahora a considerar el problema inverso, es decir, dado el logaritmo de un número, encontrar el número que recibe el nombre de *antilogaritmo*. Si la mantisa del logaritmo dado aparece exactamente en la tabla, entonces las cifras significativas del antilogaritmo pueden obtenerse inmediatamente; en caso contrario es necesaria la interpolación.

**Ejemplo 2.** Hallar el antilogaritmo de (a) 1.9047; (b) $\bar{2}.6144$.

SOLUCION. (a) La mantisa 0.9047 aparece exactamente en la tabla en la fila correspondiente a 80 en la columna de la izquierda y en la columna encabezada por la tercera cifra 3. Por tanto, las cifras significativas son 803 y el antilogaritmo buscado es 80.3.

(b) La mantisa 0.6144 no aparece exactamente en la tabla pero está comprendida entre las mantisas consecutivas 0.6138 y 0.6149 que corresponden, respectivamente, a 4110 y 4120. Por tanto, tenemos

| *Mantisa* | *Número* |
|---|---|
| 0.6149 | 4120 |
| 0.6138 | 4110 |

La diferencia tabular entre las mantisas es 0.0011 y es debida a un cambio de 10 al pasar el número de 4110 a 4120. Por tanto, por proporciones, un aumento en la mantisa de 0.6138 a 0.6144, o sea, de 0.0006, producirá en el número un aumento de $6/11 \times 10 = 5$ aproximadamente. En consecuencia, las cifras significativas buscadas son $4110 + 5 = 4115$ y el antilogaritmo buscado es 0.04115.

Como práctica adicional se recomienda que el estudiante compruebe los siguientes resultados: antilog de $\bar{1}.6791 = 0.4777$; antilog de $2.8024 = 634.4$.

Una tabla de logaritmos decimales nos permite obtener el logaritmo de un número en cualquier base por medio del Teorema 5 (Art. 16.3), en el que se obtuvo:

$$\log_a N = \frac{\log_b N}{\log_b a}. \tag{4}$$

El método se explica en el ejemplo siguiente:

**Ejemplo 3.** Hallar $\log_6 0.86$.

SOLUCION. Por la fórmula (4),

$$\log_6 0.86 = \frac{\log 0.86}{\log 6} = \frac{\bar{1}.9345}{0.7782} = \frac{-1 + 0.9345}{0.7782}$$

$$= \frac{-0.0655}{0.7782} = -0.0842.$$

NOTA. Hay tablas de logaritmos que dan las mantisas con cinco o más decimales y el límite de la tabla es más amplio que el de nuestra tabla. El uso de tales tablas tiene como resultado una mayor precisión y más facilidad para efectuar las operaciones. Esas tablas generalmente incluyen diferencias tabulares y tablas de partes proporcionales para facilitar la interpolación.

## 16.8. CALCULO LOGARITMICO

Estudiaremos ahora las ventajas de los logaritmos decimales al efectuar operaciones aritméticas. De acuerdo con las propiedades de los logaritmos establecidas en el Art. 16.3, es posible reemplazar las operaciones de multiplicación, división, potenciación y radicación por las operaciones. más simples, de suma, resta, multiplicación y división, respectivamente.

**Ejemplo 1.** Calcular $x = \dfrac{346 \times 0.0269}{45.21}$

SOLUCION. Por los Teoremas 1 y 2 (Art. 16.3), podemos escribir.

$$\log x = \log 346 + \log 0.0269 - \log 45.21. \tag{1}$$

Para efectuar el cálculo se dispone el trabajo como se indica, usando los valores de los logaritmos dados por la tabla de logaritmos del Apéndice II.

$$\begin{aligned} \log 346 &= \phantom{-}2.5391 \\ + \log 0.0269 &= \phantom{-}\bar{2}.4298 \\ \log 346 + \log 0.0269 &= \phantom{-}0.9689 \\ - \log 45.21 &= -1.6552 \\ \log x &= \phantom{-}\bar{1}.3137 \end{aligned}$$

de donde $\quad x = 0.2059,$

siendo $x$ el antilogaritmo de $\log x$.

Al efectuar estas operaciones debe recordarse que la parte decimal del logaritmo, o sea la mantisa, es siempre positiva y que las características negativas llevan el signo menos en su parte superior.

**Ejemplo 2.** Calcular (a) $x = (0.162)^5$; (b) $\sqrt[3]{-0.085}$.

SOLUCION. (a) Por el Teorema 3 (Art. 16.3),

$$\log x = 5 \log (0.162) = 5(\bar{1}.2095).$$

Al efectuar esta multiplicación debe tenerse cuidado con los signos. La operación es realmente como sigue:

$$5(\bar{1}.2095) = 5(-1 + 0.2095) = -5 + 1.0475 = \bar{4}.0475.$$

Es decir, $\quad \log x = \bar{4}.0475$

de donde $\quad x = 0.0001116.$

(b) En este problema la raíz cúbica buscada es un número negativo, pero la operación se efectúa como si todas las cantidades utilizadas fueran positivas y luego se antepone el signo adecuado al resultado (negativo en este caso).

Sea $y = \sqrt[3]{0.085}$. Entonces, por el Teorema 4 (Art. 16.3),

$$\log y = \tfrac{1}{3} \log 0.085 = \tfrac{1}{3}(\bar{2}.9294).$$

La característica no puede ser fraccionaria y la mantisa debe ser positiva. Por tanto, para efectuar la división entre 3, hacemos que la característica de log 0.085 sea un múltiplo de 3 restándole 1 y luego sumando 1 a la mantisa. La operación es como sigue:

$$\tfrac{1}{3}(\bar{2}.9294) = \tfrac{1}{3}(-3 + 1.9294) = -1 + 0.6431 = \bar{1}.6431$$

Luego, $\log y = \bar{1}.6431$

de donde $y = 0.4396$

y finalmente $x = -0.4396.$

Algunos de los pasos en la resolución de los ejemplos 1 y 2 se han incluido por motivos didácticos, pero pueden excluirse en los cálculos prácticos. Así, por ejemplo, la relación (1) en la resolución del ejemplo 1 puede omitirse; su significado es equivalente al del arreglo indicado para el trabajo logarítmico.

Para lograr mayor rapidez y precisión en estos cálculos es recomendable usar un dispositivo tabular cuyo esquema se hace *antes* de buscar en la tabla los valores de los logaritmos. Luego se escriben todos los logaritmos en un solo paso. El método se indica en el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 3.** Calcular $x = \left(\dfrac{8264 \times 0.311}{2.351 \times 28.6}\right)^{1/2}$.

SOLUCION. Sea $N$ el numerador y $D$ el denominador de la fracción, el esquema para el cálculo logarítmico es el siguiente:

$$\begin{array}{rlcrl}
\log 8264 = & & & \log 2.351 = & \\
+ \log 0.311 = & \underline{\qquad\qquad} & & + \log 28.6 = & \underline{\qquad\qquad} \\
\log N = & & & \log D = & \\
-\log D = & \underline{\qquad\qquad} & & & \\
\log N/D = & & & & \\
\tfrac{1}{2} \log N/D = & \qquad = \log x & & & \\
 & x = & & &
\end{array}$$

El siguiente paso consiste en hallar todos los logaritmos necesarios y completar la operación.

$$\begin{array}{rl} \log 8264 = & 3.9172 \\ +\log 0.311 = & \bar{1}.4928 \\ \hline \log N = & 3.4100 \\ -\log D = & 1.8277 \\ \hline \log N/D = & 1.5823 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} \log 2.351 = & 0.3713 \\ +\log 28.6 = & 1.4564 \\ \hline \log D = & 1.8277 \end{array}$$

$$\tfrac{1}{2} \log N/D = 0.79115 = \log x$$

$$x = 6.182.$$

NOTA. Algunos autores usan cologaritmos para lograr una mayor uniformidad en el cálculo logarítmico de las operaciones que llevan división. El *cologaritmo* de un número es el logaritmo de su recíproco. Su uso transforma en suma la resta de logaritmos. La abreviatura para el cologaritmo es colog, es decir,

$$\operatorname{colog} N = \log 1/N.$$

## EJERCICIOS. GRUPO 61

En cada uno de los ejerciciso 1-8 calcular el logaritmo que se pide.

1. $\log_2 20$. 2. $\log_5 17$. 3. $\log_6 8.1$. 4. $\log_7 5$.
5. $\ln 3$. 6. $\ln 7$. 7. $\ln 10.3$. 8. $\log_4 2.31$.

9. Comprobar todas las operaciones del ejercicio 3 (Art. 16.8).

10. Demostrar que $\operatorname{colog} N = -\log N$ y que $\log N/D = \log N + \operatorname{colog} D$.

En cada uno de los ejercicios 11-26 calcular la expresión dada utilizando logaritmos.

11. $431 \times 0.4126$.
12. $3.063 \div 28.41$.
13. $21.2 \times 13.11 \times 0.0061$.
14. $85.23 \times 61.4 \div 21.36$.
15. $\dfrac{7.203 \times 34.2}{85.11}$
16. $\dfrac{3.87 \times 3.142}{2.718 \times 0.0116}$
17. $(4.21)^{2/5}(0.7321)$.
18. $(21.39)^{1/4}(1.237)$.
19. $\dfrac{22.3 \times 0.041 \times 236.8}{521.3 \times 0.0026}$
20. $\dfrac{181.2 \times 415.3 \times 62.91}{2013 \times 341.9 \times 85.86}$
21. $\dfrac{(91.6)^2 \times \sqrt[5]{41.62}}{\sqrt[5]{724.1}}$
22. $\dfrac{\sqrt{32.17} \times \sqrt[5]{55.6}}{\sqrt[4]{5.113} \times \sqrt{86.92}}$
23. $\dfrac{4\sqrt{39.6} \times 3\sqrt[3]{81.2}}{21.31\sqrt{72.54}}$
24. $\dfrac{(21.42)^{2/3} \times (1.114)^{3/2}}{(38.26)^{1/5}}$
25. $\left(\dfrac{28.96 \times \sqrt[3]{25.05}}{\sqrt{81.7} \times 110.1}\right)^{1/2}$
26. $\left(\dfrac{\sqrt{62.3} \times \sqrt[3]{31.24}}{76.91 \times \sqrt{0.0163}}\right)^{1/4}$

27. Hallar el área de un triángulo cuya base y altura miden 1.683 metros y 0.9621 metros, respectivamente.

28. Calcular el área y la longitud de la circunferencia de un círculo cuyo diámetro es 2.426 metros.

29. El área $S$ y el volumen $V$ de una esfera de radio $r$ están dados por las fórmulas $S = 4\pi r^2$ y $V = \frac{4}{3}\pi r^3$. Calcular el área y el volumen de una esfera cuyo diámetro es 2.03 cm.

30. El volumen $V$ de un cono circular recto de radio de la base $r$ y altura $h$ está dado por la fórmula $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$. Calcular el volumen de un cono circular recto cuyo radio de la base es 0.7561 metros y cuya altura es 4.023 metros.

31. Si $a$, $b$ y $c$ son los lados de un triángulo y $s = \frac{1}{2}(a + b + c)$, el área $K$ de un triángulo está dada por la fórmula $K = \sqrt{s(s - a)(s - b)(s - c)}$. Calcular el área del triángulo cuyos lados miden 5.21, 7.03 y 10.2 metros respectivamente.

32. Hallar el área del triángulo cuyos lados miden 11.3, 15.2 y 21.1 centímetros respectivamente.

33. El período $t$ en segundos de un péndulo simple está dado por la fórmula $t = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, en donde $l$ es la longitud, en metros, del péndulo y $g = 9.81$ m/seg$^2$ es la aceleración debida a la gravedad. Calcular el período de un péndulo de 15 cm de largo.

34. Calcular la longitud de un péndulo cuyo período es de un segundo.

En cada uno de los ejercicios 35-40 hallar las soluciones reales que existan, con 4 cifras significativas.

35. $5^{2x} = 7^{x-1}$..

36. $e^x - e^{-x} = 2$.

37. $6^x = 3^{2x-1}$.

38. $e^x + 10e^{-x} - 7 = 0$.

39. $e^{2x} - 4e^x = 21$.

40. $e^{3x} + 4e^{2x} - 11e^x = 30$.

# 17

# Interés y anualidades

## 17.1. INTRODUCCION

En este capítulo consideraremos brevemente algunas de las operaciones financieras más comunes, con las que puede encontrarse en la práctica cualquier persona. Estos temas pueden, en general, dividirse en dos amplias clasificaciones: (1) renta que proviene de inversiones y (2) sistemas de pagos, generalmente de naturaleza periódica, para satisfacer algún objetivo futuro. En el primer tema están incluídas las cantidades que se obtienen en forma de intereses y dividendos de cuentas de ahorro, acciones y bonos. En el segundo consideraremos los sistemas de pagos de igual valor y hechos a intervalos regulares para diversos propósitos. Son ejemplos de tales pagos los hechos para la amortización de hipotecas, compras en abonos, pólizas de seguros, planes de pensiones y la creación de fondos especiales.

Conviene observar que al dedicar este breve capítulo al estudio de algunos problemas financieros, solamente podremos dar una breve introducción a un tema de gran extensión e importancia. Existen tratados dedicados exclusivamente a la teoría y aplicaciones de las matemáticas financieras. Naturalmente estas cuestiones son de vital importancia en las instituciones financieras, compañías de seguros y empresas comerciales.

## 17.2. INTERES SIMPLE

El *interés* de una suma de dinero, que se llama *capital,* es la cantidad cobrada por el uso de ese dinero. El interés es una parte fraccionaria del capital; cuando esta fracción se expresa como un tanto por ciento, se llama *tasa de interés* y generalmente se refiere a un período de un año.

Así, por ejemplo, una tasa de 4% significa que por cada peso prestado, el deudor debe pagar 4 centavos de interés en un año.

Hay dos tipos de interés, simple y compuesto. El primer tipo se estudiará en este artículo y el segundo en el siguiente. Cuando el interés se paga al final de un período especificado y se calcula sobre el capital original, se llama *interés simple.* Generalmente el interés simple se usa para períodos relativamente cortos. Por ejemplo, podemos considerar un bono de \$ 1000 que paga un interés semestral con tasa de 4% anual. Entonces al final de un período de seis meses, el interés simple producido por el bono es igual a \$ 1000 × 0.02, o sea, \$ 20.

Ahora consideraremos el problema general del interés simple.

Sean: $P$ el capital, $i$ la tasa de interés para cada uno de $n$ períodos e $I$ el interés simple al final de los $n$ períodos. Entonces

$$I = Pni. \tag{1}$$

La suma del capital y el interés se llama *monto,* que representaremos por $A$. Por tanto, de (1),

$$A = P + Pni = P(1 + ni). \tag{2}$$

El *valor actual* del monto $A$ dado por (2), *se define* como la suma de dinero que debe invertirse en la fecha actual con una tasa $i$ por período para que el monto sea $A$ al final de $n$ períodos. Evidentemente el valor actual de $A$ es $P$ y, por (2), se tiene

$$P = A(1 + ni)^{-1} \tag{3}$$

Para facilitar referencias futuras enunciaremos estos resultados en forma de teorema.

**Teorema 1.** *Sean: $P$ el capital y valor actual de un monto $A$, $I$ el interés simple al final de $n$ períodos, e $i$ la tasa de interés por cada período. Entonces*

$$I = Pni;\ A = P(1 + ni);\ P = A(1 + ni)^{-1}.$$

**Ejemplo 1.** Si la tasa de interés anual es igual al 6%, calcular: (a) El interés simple y el monto de \$ 500 al final de 3 meses.

(b) El valor actual de \$ 600 pagaderos dentro de 6 meses, usando interés simple.

SOLUCION. (a) La tasa $i$ para un período de 3 meses es $\dfrac{0.06}{4} = 0.015.$ Por tanto, para $P = \$500$ el interés simple es, por (1),

$$I = Pni = \$\,500 \times 0.015 = \$\,7.50,$$

y por (2), el monto es

$$A = P + Pni = \$500 + \$7.50 = \$507.50.$$

(b) La tasa $i$ para un período de 6 meses es $\dfrac{0.06}{2} = 0.03$. El valor actual es, por (3),

$$P = \frac{A}{1 + ni} = \frac{\$600}{1 + 0.03} = \$582.52.$$

En relación con préstamos a interés simple y por períodos cortos, los bancos acostumbran cargar el interés en el momento en que hacen el préstamo. Esta deducción se llama *descuento bancario*. Así, por ejemplo, para un préstamo de \$1000 al 6%, por un período de 6 meses, el descuento bancario es $\$1000 \times 0.03 = \$30$. La persona que recibe el préstamo realmente obtiene \$1000 menos \$30, o sea, \$970 aunque al final de los 6 meses debe devolver la cantidad de \$1000. Evidentemente la tasa de interés es entonces mayor que 6%. Veamos un ejemplo.

**Ejemplo 2.** Una persona pide un préstamo bancario de \$2000 por 3 meses y al 5%. Calcular la tasa real de interés que corresponde al descuento bancario.

SOLUCION. El descuento bancario es $\$2000 \times \frac{1}{4} \times 0.05 = \$25$. La persona recibe \$2000 menos \$25, o sea, \$1975, lo que podemos considerar como el valor actual de un monto de \$2000 pagaderos al final de 3 meses. Sea $r$ la tasa anual de interés necesaria para que \$1975 produzcan un monto de \$2000 al final de 3 meses. El interés es $I = \$25$, de modo que por la relación (1), o sea, $I = Pni$, tenemos

$$25 = 1975 \cdot \tfrac{1}{4} r$$

de donde

$$r = \frac{100}{1975} = 5.06\%.$$

## 17.3. INTERES COMPUESTO

El interés simple devengado al final de un período especificado, puede añadirse al capital original para formar un nuevo capital. Entonces, el interés del siguiente período se calcula sobre este nuevo capital. Si este proceso se repite por dos o más períodos, el aumento total del capital original se llama *interés compuesto*. La suma del capital original más el interés compuesto se llama *monto compuesto*. El intervalo entre dos conversiones sucesivas de interés a capital se llama *período de interés* o *período de conversión* o de *capitalización*. Los períodos de capitalización más usuales son: Un año, 6 meses y 3 meses, y se dice que se trata de interés compuesto: anual, semestral y trimestral, respectivamente. Aunque el interés compuesto se calcula para cada período con una tasa que corresponde al período, la tasa de interés, tal como se hace en el interés simple, se enuncia con base anual y se llama *tasa nominal.*

Como un ejemplo de aplicación de los términos precedentes, observemos el efecto de acumular a interés compuesto un capital original de \$1000 con capitalización trimestral y con tasa nominal de 4%. La tasa de interés en cada uno de los períodos de 3 meses es entonces igual a 1%. En la tabla 1 se detalla la acumulación en un período de un año.

TABLA 1

| Trimestre | Capital al principio del período | Interés por período | Interés compuesto al final del período | Monto compuesto al final del período |
|---|---|---|---|---|
| Primero | 1000.00 | $1000 \times 0.01 = 10.00$ | 10.00 | 1010.00 |
| Segundo | 1010.00 | $1010 \times 0.01 = 10.10$ | 20.10 | 1020.10 |
| Tercero | 1020.10 | $1020.10 \times 0.01 = 10.20$ | 30.30 | 1030.30 |
| Cuarto | 1030.30 | $1030.30 \times 0.01 = 10.30$ | 40.60 | 1040.60 |

Consideremos ahora el problema general del interés compuesto. Sean

$r$ = tasa nominal (anual) de interés,
$m$ = número de períodos de capitalización por año,
$i$ = tasa de interés por período de capitalización = $r/m$,
$n$ = número total de períodos de capitalización.
$P$ = capital original,
$A_n$ = monto compuesto al final de $n$ períodos.

Al final del primer período, el interés es $Pi$ y el monto es

$$A_1 = P + Pi = P(1 + i). \tag{1}$$

El capital al empezar el segundo período es entonces $A_1$ y el interés al final de ese segundo período es $A_1 i$, de modo que el monto al final del segundo período es

$$\begin{aligned} A_2 &= A_1 + A_1 i = A_1(1 + i) \\ \text{[De (1)]} \quad &= P(1 + i)(1 + i) = P(1 + i)^2. \end{aligned}$$

Análogamente, el monto final del tercer período es

$$A_3 = P(1 + i)^3.$$

Continuando este proceso, encontramos que el monto compuesto al final de $n$ períodos es

$$A_n = P(1 + i)^n. \tag{2}$$

En la relación (2), el capital original $P$ es el *valor actual* del monto $A_n$. De (2) tenemos:

$$P = A_n(1 + i)^{-n}. \tag{3}$$

La diferencia $A_n - P$ es el interés compuesto total acumulado hasta el final de $n$ períodos; también se le llama *descuento* sobre $A_n$.

Resumimos los resultados anteriores en el teorema siguiente:

**Teorema 2.** *Si $P$ es el capital original o valor actual del monto compuesto $A_n$ al final de $n$ períodos, siendo $i$ la tasa de interés por período, entonces*

$$A_n = P(1+i)^n;\ P = A_n(1+i)^{-n}.$$

Resulta evidente, por las fórmulas del Teorema 2, que los problemas de interés compuesto pueden resolverse usando logaritmos (Art. 16.8). Sin embargo, también pueden resolverse por medio de tablas que dan los valores de $(1+i)^n$ y $(1+i)^{-n}$.

En el Apéndice II se incluyen unas pequeñas tablas de estos valores.

**Ejemplo 1.** Calcular el monto compuesto al final de 5 años de \$1000 invertidos a una tasa nominal de 6% con capitalización trimestral.

SOLUCION. En este problema vamos a calcular $A_n$ siendo

$$P = \$1000,\ i = \frac{0.06}{4} = 0.015,\ \ n = 5 \times 4 = 20.$$

En la Tabla 3 (Apéndice II), que es una tabla para el monto compuesto $(1+i)^n$ de \$1 al final de $n$ períodos, encontramos que cuando $i = 1\frac{1}{2}\%$ y $n = 20$, entonces $(1+i)^n = 1.3469$. Por tanto, para $P = \$1000$, tenemos

$$A_n = P(1+i)^n = 1000(1+0.015)^{20} = 1000(1.3469) = \$1346.90.$$

La solución por logaritmos es como sigue:

$$\log(1+0.015)^{20} = 20\log 1.015 = 20(0.0065) = 0.1300$$

Por tanto, $$\log A_n = \log 1000 + \log(1.015)^{20}$$
$$= 3 + 0.1300 = 3.1300,$$

de donde $$A_n = \$1349.$$

La discrepancia de estos dos resultados se debe a que nuestra tabla de logaritmos es solamente de 4 decimales. Con una tabla de logaritmos de seis decimales puede obtenerse un resultado que concuerda con el de la tabla para $(1+i)^n$.

Al calcular el interés compuesto al final de muchos períodos de capitalización, es necesario utilizar logaritmos de $1+i$ con seis o más decimales.

**Ejemplo 2.** Calcular el valor actual de \$4000 pagaderos dentro de 4 años si la tasa nominal es de 4% capitalizando semestralmente.

SOLUCION. En este problema debemos hallar $P$ siendo $A_n = 4000$, $i = 2\%$ y $n = 4 \times 2 = 8$.

En la Tabla 4 (Apéndice II), para el valor actual $(1 + i)^{-n}$ de \$1 pagadero al final de $n$ períodos, encontramos que cuando $i = 2\%$ y $n = 8$, entonces $(1 + i)^{-n} = 0.85349$. Por tanto, para $A_n = 4000$, tenemos

$$P = A_n(1 + i)^{-n} = 4000(1 + 0.02)^{-8} = 4000(0.85349) = \$3413.96.$$

La solución de este problema por medio de logaritmos se deja como un ejercicio para el estudiante.

Si el interés compuesto se capitaliza anualmente, entonces el monto al final de 1 año es el mismo que el que se obtiene por interés simple. Pero si se capitaliza más de una vez al año, entonces el monto al final del año es mayor que el del interés simple. Por ejemplo, un peso al 6% de interés simple da \$1.06 al final de un año. Pero si se trata de interés compuesto con capitalización semestral con la misma tasa nominal de 6%, entonces se obtiene al final del año $(1 + 0.03)^2 = \$1.0609$. En este último caso la tasa de interés por un año es 6.09% y es mayor que la tasa nominal de 6%. Se dice que 6.09% es la *tasa efectiva* de interés.

En general, la tasa de interés anual que es equivalente a una tasa dada para un período de capitalización no anual, se llama *tasa efectiva.* A continuación vamos a calcular la relación entre tasas nominales efectivas.

Sea $r$ una tasa nominal para interés compuesto capitalizando $n$ veces al año, y sea $j$ la tasa efectiva equivalente. Entonces, por definición de tasa efectiva, debe tenerse

$$1 + j = \left(1 + \frac{r}{n}\right)^n.$$

Este resultado nos dice:

**Teorema 3.** *Si $r$ es la tasa nominal de interés compuesto capitalizando $n$ veces al año y $j$ es la tasa efectiva equivalente, la relación entre $j$ y $r$ es:*

$$1 + j = \left(1 + \frac{r}{n}\right)^n.$$

**Ejemplo 3.** Calcular la tasa efectiva equivalente a una tasa nominal de 5% capitalizando semestralmente.

SOLUCION. Por el Teorema 3,

$$j = \left(1 + \frac{r}{n}\right)^n - 1 = (1 + 0.025)^2 - 1.$$

Por la tabla 3, $\quad = 1.0506 - 1 = 0.0506 = 5.06\%.$

Consideremos ahora el caso general de $n$ capitalizaciones por año. Hemos visto que conforme $n$ aumento, la tasa efectiva también aumenta. Pudiera entonces tenerse la impresión de que si $n$ tiende a infinito, la tasa efectiva también tiende a infinito. Sin embargo, esto no es así, como vamos a ver.

Sea $r$ la tasa nominal de interés compuesto con $n$ capitalizaciones por año. Por el Teorema 2, el monto $a_n$ de \$1 al final de un año está dado por

$$a_n = \left(1 + \frac{r}{n}\right)^n.$$

Tomemos ahora el límite cuando $n$ tiende a infinito, expresado simbólicamente por $n \to \infty$ (Art. 10.5). En este caso se dice que el interés es de *capitalización continua* o *interés continuo*. En los cursos de cálculo diferencial se demuestra que

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{r}{n}\right)^n = e^r,$$

en donde $e$, base del sistema de logaritmos naturales, es igual a 2.71828. . . (Art. 16.4). Ya que $e$ y $r$ son cantidades finitas, $e^r$ también es una cantidad finita. Por tanto, sin importar que a $n$ se le asigne un valor muy grande, $a_n$ será finito y, por el Teorema 3, la tasa efectiva $j = a_n - 1$ también será finita. Por ejemplo, para una tasa nominal $r = 6\%$, el monto de \$1 al final de 1 año, a interés continuo, tiene como valor límite $e^{0.6} = (2.71828\ldots)^{0.6} = \$1.06184$, y la tasa efectiva está limitada por el 6.184%.

A continuación damos la tabla 2 para hacer resaltar lo que ocurre al aumentar el número de capitalizaciones por año.

TABLA 2

MONTO AL FINAL DE 1 AÑO PARA \$1 AL 6% ANUAL A INTERES COMPUESTO CON $n$ CAPITALIZACIONES POR AÑO

| $n$ | Monto |
|---|---|
| 1 | 1.06000 |
| 2 | 1.06090 |
| 3 | 1.06121 |
| 4 | 1.06136 |
| 6 | 1.06152 |
| 12 | 1.06168 |
| 24 | 1.06176 |
| $\infty$ | 1.06184 |

El estudio de los valores dados en esta tabla puede ayudar a corregir muchas de las ideas erróneas acerca de los efectos del interés compuesto.

## EJERCICIOS. GRUPO 62

1. Hallar el interés simple de \$500 en 6 meses con la tasa anual de 6%.

2. Calcular el interés simple de \$800 en 10 meses al 4%.

3. Hallar el monto de \$750 en 4 meses al 5% de interés simple.

4. Calcular el monto de \$2100 en 8 meses al 3½% de interés simple.

5. Hallar el valor actual de \$1000 pagaderos en 3 meses al 4% de interés simple.

6. Calcular el valor actual de \$1200 pagaderos en 6 meses al 5% de interés simple.

7. Con un capital de \$1500 se obtiene un monto de \$1530 al final de 8 meses. ¿Cuál es la tasa de interés simple?

8. Un préstamo de \$3600 se liquida con un pago de \$3654 a los 4 meses. Hallar la tasa de interés simple.

9. Una persona pide un préstamo bancario de \$3000 por 6 meses al 6%. Calcular la tasa de interés que corresponde al descuento bancario.

10. Una persona pide un préstamo bancario de \$4000 por 9 meses al 5%. Calcular la tasa de interés que le corresponde si paga el descuento bancario y un cargo adicional de \$10 por adelantado.

11. Determinar cuánto tiempo se necesita para que un capital se doble si está invertido al 4% de interés simple.

12. Determinar cuánto tiempo se necesita para que un capital se doble si está invertido al 5% de interés simple.

13. Calcular la tasa necesaria para que un capital se doble en 40 años a interés simple.

14. Demostrar la relación (2) del Art. 17.3 por el método de inducción matemática.

15. Obtenga la relación (2) del Art. 17.3 como término de orden $(n + 1)$ de una progresión geométrica cuyo primer término es $P$ y cuya razón es $1 + i$ (Art. 10.3).

16. Calcular el monto compuesto al final de 4 años de \$500 invertidos con una tasa nominal de 5% capitalizando semestralmente. Utilizar la tabla 3 del Apéndice II.

17. Resolver el ejercicio 16 usando logaritmos.

18. Calcular el monto compuesto al final de 6 años de \$800 invertidos con una tasa nominal de 8% con capitalización trimestral.

19. Hallar el interés compuesto total en el ejercicio 18.

20. Resolver el ejemplo 2 del Art. 17.3 usando logaritmos.

21. Determinar el valor actual de \$5000 pagaderos dentro de 2 años si la tasa nominal es 6% capitalizando trimestralmente. Usar la tabla 4 del Apéndice II.

22. Resolver el ejercicio 21 usando logaritmos.

23. Una persona invierte \$2000 al 3% capitalizando semestralmente, para formar un fondo especial en un término de 10 años. Calcular el monto de este fondo.

24. Una persona desea formar un fondo de \$8000 para la educación de su

hijo, de modo de poder disponer de él dentro de 16 años. ¿Cuánto deberá invertir ahora, para este propósito, al 4% capitalizando semestralmente?

25. ¿En cuántos años \$2000 se convertirán en \$5000 si se invierten ahora al 6% capitalizando anualmente? Resolver el problema por logaritmos.

26. Resolver el ejercicio 25 usando la interpolación lineal en la Tabla 3 del Apéndice II.

27. Determinar cuanto tiempo se requerirá para que un capital se doble, si está invertido al 5% y se capitaliza semestralmente. Resolver por logaritmos.

28. Resolver el ejercicio 27 aplicando la interpolación lineal en la Tabla 3 del Apéndice II.

29. En la fórmula del Teorema 3 (Art. 17.3), despejar $j$ en función de $r$ y $r$ en función de $j$.

30. Hallar la tasa efectiva equivalente a la tasa nominal de 6% con capitalización trimestral.

31. Indicar en qué forma puede usarse la Tabla 3 del Apéndice II para calcular $(1 + i)^n$ para valores enteros y positivos de $n > 50$.

32. Indicar cómo puede usarse el teorema del binomio (Art. 7.4) para calcular un monto compuesto.

33. Calcular $(1 + 0.015)^6$ por medio del teorema del binomio y comparar el resultado con el valor dado en la Tabla 3 del Apéndice II.

34. Calcular la tasa nominal, capitalizando semestralmente equivalente a la tasa efectiva de 4%. Utilizar el teorema del binomio.

35. Comprobar los valores dados en la Tabla 2 al final del Art. 17.3.

## 17.4. ANUALIDADES

Una *anualidad* es una sucesión de pagos iguales periódicos. Son ejemplos sencillos de anualidades los pagos mensuales por concepto de renta y el pago de primas de seguros de vida.

El término *anualidad* parece implicar que los pagos se hacen anualmente; sin embargo, éste no es necesariamente el caso. El intervalo entre los pagos puede ser de cualquiera siempre que en una anualidad particular dicho intervalo entre pagos sea constante. El intervalo entre dos pagos sucesivos se llama *período*. En nuestro estudio quedará sobrentendido que los pagos iguales se hacen al *final* de cada período; una sucesión de pagos de este tipo se llama *anualidad ordinaria*. El tiempo que transcurre entre el principio del primer período y el final del último se llama *término* de la anualidad.

Consideremos que en una anualidad cada pago gana interés compuesto desde el momento en que se hace el pago hasta el final del término, siendo el período de la anualidad igual al período de capitalización del interés compuesto. En este caso *el monto de una anualidad* al final de su término se *define* como la suma de los montos compuestos de todos los pagos de la anualidad acumulados hasta el final del término. En la

Tabla 3 se muestran los diversos pasos necesarios para obtener el monto de una anualidad con término de un año, en donde los pagos de \$100 cada uno, se hacen al final de cada trimestre, siendo la tasa nominal igual a 6%, lo que significa que la tasa trimestral es de 1.5%.

TABLA 3

| Trimestre | Pago al final de cada trimestre | Monto compuesto del pago al final del término |
|---|---|---|
| Primero | \$100 | $100(1.015)^3 =$ \$104.57 |
| Segundo | 100 | $100(1.015)^2 =$ 103.02 |
| Tercero | 100 | $100(1.015) =$ 101.50 |
| Cuarto | 100 | 100.00 |
| | | Monto de la anualidad = \$409.09 |

Es evidente que el monto de una anualidad puede obtenerse como suma de una progresión geométrica. Esto también se apreciará en la siguiente determinación de la fórmula general para el monto de una anualidad ordinaria.

Consideremos ahora una anualidad ordinaria en donde $R$ es el pago hecho al final de cada uno de $n$ períodos e $i$ es la tasa de interés por período. Ya que el primer pago se hace al final del primer período, ganará interés por $n - 1$ períodos y, por el Teorema 2 (Art. 17.3), su monto al final del término será $R(1+i)^{n-1}$. Análogamente, el segundo pago ganará interés por $n - 2$ períodos y su monto al final del término será $R(1+i)^{n-2}$. Continuando de esta manera, vemos que el pago de orden $n - 1$ producirá un monto de $R(1+i)$ y que el pago enésimo, o pago final, tendrá como monto su propio valor, es decir $R$. Escribiendo estos montos en oroden inverso, tenemos

$$R, R(1+i), R(1+i)^2, \ldots, R(1+i)^{n-2}, R(1+i)^{n-1},$$

que forman una progresión geométrica de $n$ términos de razón $1 + i$.

Por definición, la suma $S$ de esta progresión es el monto de la anualidad y, por el Teorema 2 del Art. 10.3, su valor está dado por

$$S = R\,\frac{1-(1+i)^n}{1-1(1+i)} = R\,\frac{(1+i)^n-1}{i}.$$

Para el caso particular en que $R = 1$, $S$ se designa por el símbolo $s_{\overline{n}|i}$ resultando de (1),

$$(2) \qquad s_{\overline{n}|i} = \frac{(1+i)^n-1}{i}$$

y

$$(3) \qquad S = Rs_{\overline{n}|i}.$$

Para facilitar la resolución de problemas de anualidades se han elaborado tablas de valores de $s_{\overline{n}|i}$. Una pequeña tabla de este tipo es la Tabla 5 del Apéndice II.

Consideremos ahora *el valor actual de una anualidad* que se *define* como la suma de los valores actuales de todos los pagos.

Como se hizo anteriormente, para una anualidad ordinaria, sea $R$ el pago hecho al final de cada uno de $n$ períodos y sea $i$ la tasa de interés por un período. Por el teorema 2 (Art. 17.3), el valor actual del primer pago (hecho al final del primer período) es $R(1+i)^{-1}$; el valor actual del segundo pago (hecho al final del segundo período es $R(1+i)^{-2}$; y así sucesivamente. El valor actual del último, o enésimo pago, es $R(1+i)^{-n}$. El valor actual $A$ de la anualidad es la suma de estos valores actuales de los pagos, es decir,

$$A = R(1+i)^{-1} + R(1+i)^{-2} + \ldots + R(1+i)^{-n},$$

que es la suma de ua progresión geométrica de $n$ términos de razón $(1+i)^{-1}$. Por el Teorema 2 del Art. 10.3,

$$\frac{R(1+i)^{-1}[1-(1+i)^{-n}]}{1-(1+i)^{-1}}.$$

Multiplicando el numerador y el denoominador por $1+i$, resulta

$$(4) \qquad A = \frac{R[1-(1+i)^{-n}]}{1+i-1} = R\,\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}.$$

Para el caso particular en que $R = 1$, $A$ se designa con el símbolo $a_{\overline{n}|i}$ de manera que, por (4),

$$(5) \qquad a_{\overline{n}|i} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

$$(6) \qquad A = Ra_{\overline{n}|i}.$$

Una pequeña tabla de valores de $a_{\overline{n}|i}$ es la tabla 6 del Apéndice II.

Para facilitar las referencias futuras, resumimos los resultados anteriores en el teorema siguiente:

**Teorema 4.** *Si $S$ es el monto y $A$ el valor actual de una anualidad ordinaria formada por $n$ pagos de valor $R$ con $i$ como tasa de interés por período, entonces*

$$S = R\,\frac{(1+i)^n - 1}{i}; \quad A = R\,\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}.$$

**Ejemplo.** Una anualidad ordinaria está formada por el pago de \$300 semestrales durante 5 años, siendo la tasa nominal igual a 3%. Calcular (a) el monto y (b) el valor actual de esta anualidad.

SOLUCION. (a) Para esta anualidad, $R = 300$, el número de períodos es $n = 10$, y la tasa de interés por período es $i = 1.5\%$. Para $n = 10$ e $i = 1.5\%$, en la Tabla 5 (Apéndice II) tenemos el valor $s_{\overline{n}|i} = 10.7027$. Por tanto, por la fórmula (3) el monto buscado es

$$S = Rs_{\overline{n}|i} = 300(10.7027) = \$3210.81.$$

(b) Para $n = 10$ e $i = 1.5\%$ en la Tabla 6 (Apéndice II) tenemos el valor $a_{\overline{n}|i} = 9.2222$. Por tanto, por la fórmula (6), el valor actual que se busca es

$$A = Ra_{\overline{n}|i} = 300(9.2222) = \$2766.66.$$

NOTA. Los problemas de anualidades también pueden resolverse por medio de logaritmos o aplicando el teorema del binomio. Para lograr mayor precisión, especialmente en anualidades a largo plazo, es necesario usar tablas extensas de logaritmos, de $s_{\overline{n}|i}$ y $a_{\overline{n}|i}$.

## 17.5. APLICACIONES DE LAS ANUALIDADES

En este artículo estudiaremos algunos ejemplos de operaciones financieras que son esencialmente problemas de anualidades.

### Fondo de amortización

Una suma de dinero acumulada para pagar una obligación que vence en fecha futura se llama *fondo de amortización*. Un fondo de este tipo no incluye el pago de intereses de la obligación; estos pagos se consideran por separado. Un fondo de amortización generalmente se forma invirtiendo cantidades iguales al final de períodos iguales. Por tanto, su valor corresponde al monto $S$ de una anualidad [Tearema 4 (Art. 17.4)].

Los fondos de amortización generalmente se establecen para liquidar una deuda que vence en fecha futura. Tal es el caso, por ejemplo, de redimir una emisión de bonos. Sin embargo, los fondos de amortización también pueden crearse para otros propósitos. Así, por ejemplo, un fondo del tipo mencionado puede usarse para reemplazar equipos gastados u obsoletos; en este caso se le llama *fondo de depreciación*. Nótese que un fondo de depreciación no cubre los gastos ordinarios de mantenimiento de equipo ni el interés del capital invertido.

**Ejemplo 1.** La vida útil de cierto equipo industrial es de 10 años y el costo neto de reemplazarlo al final de ese tiempo es \$15 000. Calcular las cantidades semestrales que deben invertirse con una tasa nominal de 5% para crear el fondo de depreciación correspondiente.

SOLUCION. En este problema se trata de hallar el pago periódico $R$ de una anualidad cuyo monto $S$ es \$15 000 al final de $n = 20$ períodos y cuya tasa de interés por período es $i = 2.5\%$.

Para $n = 20$ e $i = 2.5\%$, la Tabla (Apéndice II) nos da el valor $s_{\overline{n}|i} = 25.5447$.

Por la fórmula (3), Art. 17.4, $S = Rs_{\overline{n}|i}$. Por tanto,

$$R = \frac{S}{s_{\overline{n}|i}} = \frac{15000}{25.5447} = \$587.20 \text{ (aproximadamente)}.$$

## Amortización

La liquidación de una deuda junto con sus intereses por medio de pagos iguales hechos al final de períodos iguales se llama *amortización*. Es evidente que el valor del pago debe exceder al interés de la deuda en el primer período. Los pagos sirven para que la deuda decrezca de período a período. Como resultado, la parte de cada pago que se usa para pagar interés sobre la deuda es decreciente y el resto del pago que se aplica a la deuda misma es creciente. Esta variación en la distribución de cada pago en las partes que se aplican al capital y al interés se muestra en la tabla de amortización de una deuda difiere de un fondo de amortización en que incluye no sólo el pago de la deuda sino también el de los intereses correspondientes.

Es evidente, por la definición, que la amortización de una deuda se lleva a cabo por medio de una anualidad. La deuda que va a amortizarse es el valor actual $A$ de la anualidad. Si $R$ es el pago al final de cada uno de los $n$ períodos e $i$ es la tasa de interés por período, entonces la deuda $A$ que va a amortizarse está dada por la fórmula (4) del Artículo 17.4, a saber, $A = Ra_{\overline{n}|i}$.

**Ejemplo 2.** Un préstamo de \$4000 se va a amortizar por medio de cinco pagos anuales iguales. Calcular el valor del pago anual si la tasa es 5% capitalizando anualmente.

SOLUCION. En este problema se nos pide que calculemos el pago anual $R$ de una anualidad cuyo valor actual es $A = \$4000$, cuyo término es $n = 5$ períodos y cuya tasa de interés $i$ por período es 5%.

Para $n = 5$ e $i = 5\%$, la Tabla 6 (Apéndice II) nos da el valor $a_{\overline{n}|i} = 4.3295$. Por tanto, de la fórmula $A = Ra_{\overline{n}|i}$, tenemos

$$R = \frac{A}{a_{\overline{n}|i}} = \frac{4000}{4.3295} = \$923.90.$$

Es conveniente observar, para cada uno de los cinco períodos anuales, la distribución de cada pago anual entre interés y capital (deuda).

Esto se muestra en la tabla 4, que recibe el nombre de *tabla de amortización.*

Los números en la columna (3) son el 5% de los números correspondientes en la columna (1). Los números en la columna (4) se obtienen restando los números correspondientes de la columna (3), del pago anual de $923.90 que aparece en la columna (2).

TABLA 4

| Año | Capital al principio de año | Pago anual al final de año | Interés pagado al final de año | Capital pagado al final de año |
|---|---|---|---|---|
| 1 | $4000.00 | $ 923.90 | $200.00 | $ 723.90 |
| 2 | 3276.10 | 923.90 | 163.81 | 760.09 |
| 3 | 2516.01 | 923.90 | 125.80 | 798.10 |
| 4 | 1717.91 | 923.90 | 85.90 | 838.00 |
| 5 | 879.91 | 923.90 | 43.99 | 879.91 |
|  | Totales | 4619.50 | 619.50 | 4000.00 |

Uno de los ejemplos más frecuentes de amortización es el pago de la hipoteca de una casa. Generalmente este pago se hace por medio de abonos mensuales iguales, cuyo valor común es mayor que el interés de la hipoteca en el primer mes. La institución que hace el préstamo generalmente proporciona a la persona que lo recibe una tabla de amortización que muestra la distribución de cada grupo mensual entre interés y capital.

Ahora deduciremos una fórmula muy útil que nos da el tiempo necesario para amortizar una hipoteca. Para este propósito sean

$R =$ el pago anual,
$i =$ la tasa mensual de interés,
$n =$ número de meses necesario para amortizar la hipoteca,
$M =$ valor original de la hipoteca.

Por el teorema 4 (Art. 17.4), haciendo $A = M$, la fórmula para el valor actual de una anualidad es

$$M = R\,\frac{1 - (1+i)^{-n}}{i}$$

de donde

$$\frac{Mi}{R} = 1 - (1+i)^{-n}$$

y también

$$(1+i)^{-n} = 1 - \frac{Mi}{R} = \frac{R - Mi}{R}.$$

Entonces

$$(1+i)^{n} = \frac{R}{R - Mi}$$

y tomando logaritmos, $n \log(1+i) = \log R - \log(R - Mi)$,

de donde se obtiene la fórmula buscada

$$n = \frac{\log R - \log (R - Mi)}{\log (1 + i)}. \qquad (1)$$

**Ejemplo 3.** Calcular el número de meses necesario para amortizar una hipoteca de \$1 000 por medio de pagos mensuales iguales de \$10, cobrándose un interés anual de 6%.

SOLUCION. Aquí, $R = 10$, $i = 0.005$, y $M = 1000$. Sustituyendo estos valores en la relación (1), obtenemos

$$n = \frac{\log 10 - \log (10 - 5)}{\log (1 + 0.005)} = 139 \text{ meses (aproximadamente)}.$$

## EJERCICIOS. GRUPO 63

1. En el Teorema 4 del Art. 17.4, demostrar que $A = S(1 + i)^{-n}$. Comprobar esta fórmula con el ejemplo del artículo 17.4.

2. Utilizando logaritmos obtener el valor del monto $S$ en el ejemplo del Art. 17.4.

3. Utilizando el teorema del binomio obtener el valor del monto $S$ en el ejemplo del Art. 17.4.

En cada uno de los ejercicios 4-7, calcular el monto y el valor actual de la anualidad descrita.

4. Pagos trimestrales de \$200 por 4 años, tasa nominal de interés igual a 6%.

5. Pagos anuales de \$500 por 10 años, tasa nominal de interés igual a 4%.

6. Pagos semestrales de \$400 por 12 años, tasa nominal de interés igual a 5%.

7. Pagos anuales de \$300 por 6 años, tasa nominal de interés igual a 3%.

8. Calcular el valor de los pagos trimestrales que deben hacerse para obtener \$2 000 al final de 5 años, siendo la tasa nominal de interés igual a 6%.

9. ·Calcular el valor actual de la anualidad descrita en el ejercicio 8.

10. Si una anualidad continúa por tiempo ilimitado se llama ***perpetuidad***. Este hecho puede indicarse simbólicamente escribiendo $n \to \infty$. Usar la fórmula (4) del Art. 17.4 para demostrar que el valor actual de una perpetuidad es igual a $Ri^{-1}$.

11. Usar el resultado del ejercicio 10 para hallar el valor actual de una perpetuidad de \$1 000 semestrales con tasa nominal de interés de 4%.

12. Una perpetuidad cuyo valor actual es \$10 000 paga \$125 trimestrales. Calcular la tasa nominal de interés.

13. Una persona desea formar un fondo de \$8 000, que esté disponible dentro de 15 años para la educación de su hijo. Calcular cuánto debe depositar en el banco al final de cada semestre si el interés se capitaliza semestralmente y la tasa nominal es de 4%.

14. Hallar el número de pagos trimestrales de \$100 cada uno que deben hacerse para obtener la suma de \$6 000 siendo la tasa nominal de interés igual a 6%.

15. Calcular el número de pagos semestrales de \$300 cada uno deben hacer-

se para obtener una suma cuyo valor actual es de $2 700, siendo la tasa nominal de interés igual a 5%.

16. Una persona posee un bono que vence dentro de 10 años y que paga dividendos semestrales de $20 cada uno. Conforme se recibe cada dividendo, se le invierte con una tasa nominal de 4% capitalizando semestralmente. Hallar el monto de esta inversión en la fecha de redención del bono.

17. Un bono cuyo valor de redención al final de 10 años es $2 000, lleva 20 cupones, siendo el valor de cada uno $400 semestrales. Calcular el valor actual, tanto de los cupones como del bono, usando una tasa nominal de 5% capitalizando semestralmente.

18. Para construir una escuela, una ciudad obtiene $200 000 por medio de una emisión de bonos que vence en 15 años. Calcular la cantidad que debe depositarse semestralmente en un fondo de amortización para redimir dicha omisión, si el interés pagado sobre los depósitos corresponde a una tasa de 4% capitalizando semestralmente.

19. Una compañía sabe que la vida útil de un camión es 8 años, al final de los cuales el costo de reemplazo es $5 000. Calcular la cantidad que debe invertirse trimestralmente con tasa nominal de 6% para acumular el costo de reemplazo.

20. Una persona acuerda pagar una deuda de $6 000 con un solo pago al final de 5 años. Si utiliza un fondo de amortización para este propósito, calcular cuánto debe invertir semestralmente con tasa nominal de 5% capitalizando semestralmente.

21. Si en el ejercicio 20 la persona debe pagar también un interés semestral con tasa nominal de 4%, ¿cuál es el pago semestral necesario?

22. Una persona desea amortizar una deuda de $10 000 en 4 años, por medio de pagos anuales iguales. Calcular el valor del pago anual si la tasa de interés es 4% si se capitaliza anualmente.

23. Construir la tabla de amortización correspondiente al ejercicio 22.

24. Una compañía pide un préstamo de $50 000 para modernizar su instalación. Para amortizar esta deuda se hacen pagos trimestrales iguales por un período de 2 años. Calcular el valor de los pagos si la tasa anual es 6% capitalizando trimestralmente.

25. Construir la tabla de amortización correspondiente al ejercicio 24.

26. Una persona desea donar una beca anual de $1 000 en cada uno de los siguientes 10 años. ¿Cuánto debe invertir para este propósito al principio del período de 10 años, al 5% capitalizando anualmente?

27. Comprobar el resultado del ejemplo 3 del Art. 17.5.

28. ¿Cuánto tiempo se necesitará para amortizar una hipoteca de $8 000 por medio de pagos mensuales iguales de $50, si el interés se cobra con una tasa nominal de 4½% ?

29. Una persona desea amortizar una hipoteca de $10 000 por medio de pagos mensuales iguales por un período de 10 años. Calcular el valor de cada pago si la tasa nominal de interés es de 6%.

30. Una persona pide un préstamo bancario de $1 200 con tasa nominal de 4½%, acordando pagar de inmediato el descuento bancario por un año y luego pagar $100 mensuales en cada uno de los siguientes 12 meses. Calcular la tasa real de interés que se le ha cobrado.

# Apéndice I

## Lista de obras de consulta y datos

### A. Bibliografía

A continuación se da una pequeña lista de obras de consulta. En ellas se encuentran muchos temas del álgebra que no están incluidos en este libro. Esta lista debe considerarse como una sugerencia complementaria, de ningún modo exhaustiva, ya que hay muchos otros libros que pueden ser también útiles e informativos al lector.

Barnard, S. y J. M. Child, *Higher Algebra*. Londres: Macmillan and Co., 1936.

Bell, E. T., *Mathematics, Queen and Servant of Science*. Nueva York: McGraw-Hill Book Co., 1951

Chrystal, G., *Algebra*, 2 volúmenes. Londres: A y C. Black, Ltd., 1926.

Coolidge, J. L., *An Introduction to Mathematical Probability*. Nueva York: Oxford University Press, 1925.

Dickson, L. E., *New First Course in the Theory of Equations*. Nueva York: John Wiley and Sons, 1939.

Fry, T. C., *Probability and its Engineering Uses*. Nueva York: D. Van Nostrand Co., 1928.

Gheury de Bray, M. E. J., *Exponentials Made Easy*. Londres: Macmillan and Co., 1921.

Hall, H. S., y S. R. Knight, *Higher Algebra*. Londres: Macmillan and Co., 1924.

Hummel, P. M., y C. L. Seebeck, Jr., *Mathematics of Finance*. Nueva York: McGraw-Hill Book Co., 1956.

Lehmann, C. H., *Analytic Geometry*. Nueva York: John Wiley and Sons, 1942.

MacDuffee, C. C., *Theory of Equations*. Nueva York: John Wiley and Sons, 1954.

María, M. H., *The Structure of Arithmetic and Algebra*. Nueva York: John Wiley and Sons, 1958.

Smith, D. E., *History of Mathematics*, 2 volúmenes. Nueva York: Ginn and Co., 1951 y 1953.

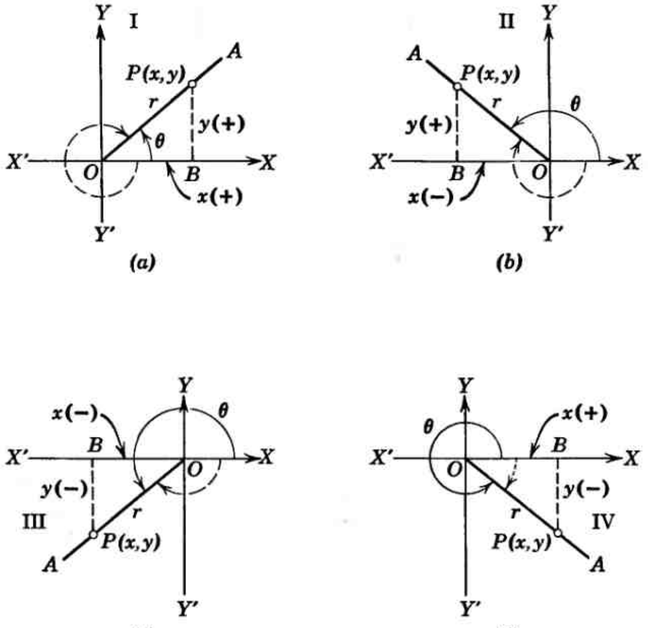
Weiss, M. J., *Higher Algebra for the Undergraduate*. Nueva York: John Wiley and Sons, 1949.

Whitworth, W. A., *Choice and Chance*. Nueva York: Reprint by Stechert-Hafner, Inc., 1959.

Young, J. W., *Lectures on Fundamental Concepts of Algebra and Geometry*. Nueva York: The Macmillan Co., 1911.

B. Trigonometría.

1. Definiciones de las funciones trigonométricas. Sea $\theta$ un ángulo tal que $-360° \leq \theta \leq 360°$. Para definir este ángulo y sus funciones trigonométricas es conveniente utilizar un sistema de coordinadas rectangulares. Las indicaciones siguientes son aplicables a cada una de las cuatro posiciones que se ven en la figura 45.



(a) (b)

(c) (d)

Fig. 45

Si una línea recta, que originalmente coincide con el eje $X$, gira en el plano coordenado $XY$, alrededor del origen $O$, hasta llegar a una nueva posición $OA$, se dice que se ha generado el ángulo $XOA = \theta$, que tiene el *lado inicial* $OX$ y el *lado terminal* $OA$. Si la rotación es un sentido contrario al giro de las manecillas de un reloj, se dice entonces que el ángulo generado es *positivo;* para rotaciones en el sentido que giran las manecillas de un reloj se dice entonces que el ángulo es *negativo* (ángulos señalados con líneas punteadas en las figuras). Se dice que el ángulo pertenece al mismo cuadrante en que cae su lado terminal.

Sobre el lado terminal $OA$ tómese cualquier punto $P$ distinto de $O$ y con coordenadas $(x, y)$. De $P$, trácese $PB$, perpendicular al eje $X$. El segmento $OP$ se llama *radio vector,* designado por $r$, se toma siempre como *positivo.* En el triángulo $OPB$, $OB = x$ y $PB = y$ tienen los signos de las coordenadas del punto $P$ como se indica para cada uno de los cuatro cuadrantes. Entonces, independientemente del cuadrante en que caiga $\theta$, las seis funciones trigonométricas de $\theta$ *se* *definen*, tanto en valor absoluto como en signo, por medio de los siguientes cocientes:

$$\text{seno de } \theta\text{: } \operatorname{sen} \theta = \frac{y}{r} \qquad \text{coseno de } \theta\text{: } \cos \theta = \frac{x}{r}$$

$$\text{tangente de } \theta\text{: } \tan \theta = \frac{y}{x} \qquad \text{cotangente de } \theta\text{: } \cot \theta = \frac{x}{y}$$

$$\text{secante de } \theta\text{: } \sec \theta = \frac{r}{x} \qquad \text{cosecante de } \theta\text{: } \csc \theta = \frac{r}{y}$$

Estas definiciones son también válidas para ángulos positivos y negativos con valor absoluto mayor que 360°

2. IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS FUNDAMENTALES

$$\csc \theta = \frac{1}{\operatorname{sen} \theta}, \quad \sec \theta = \frac{1}{\cos \theta}, \quad \cot \theta = \frac{1}{\tan \theta} \quad \tan \theta = \frac{\operatorname{sen} \theta}{\cos \theta},$$

$$\operatorname{sen}^2 \theta + \cos^2 \theta = 1, \qquad 1 + \tan^2 \theta = \sec^2 \theta, \qquad 1 + \cot^2 \theta = \csc^2 \theta.$$

3. FÓRMULAS DE REDUCCIÓN

$$\operatorname{sen}(90° \pm \theta) = \cos \theta, \quad \cos(90° \pm \theta) = \mp \operatorname{sen} \theta, \quad \tan(90° \pm \theta) = \mp \cot \theta,$$

$$\operatorname{sen}(180° \pm \theta) = \mp \operatorname{sen} \theta, \quad \cos(180° \pm \theta) = -\cos \theta, \quad \tan(180° \pm \theta) = \pm \tan \theta,$$

$$\operatorname{sen}(270° \pm \theta) = -\cos \theta, \quad \cos(270° \pm \theta) = \pm \operatorname{sen} \theta, \quad \tan(270° \pm \theta) = \mp \cot \theta,$$

$$\operatorname{sen}(360° \pm \theta) = \pm \operatorname{sen} \theta, \quad \cos(360° \pm \theta) = \cos \theta, \quad \tan(360° \pm \theta) = \pm \tan \theta.$$

4. MEDICIÓN DE ÁNGULOS EN RADIANES. Sea $\theta$ un ángulo central que intercepta un arco de longitud $s$ en un círculo de radio $r$. Entonces la medida del ángulo $\theta$ en *radianes se define* como $\theta = \frac{s}{r}$. Obsérvese que este cociente es un ***número*** (sin unidades) ya que $s$ y $r$ son longitudes. De la definición de medida en radianes se obtiene en seguida la relación de conversión:

$$\pi \text{ radianes} = 180°$$

de donde

$$1 \text{ radian} = \frac{180°}{\pi} = 57.2958° \text{ (aproximadamente)},$$

$$= 57°17'45'' \text{ (aproximadamente)}.$$

$$1° = \frac{\pi}{180} \text{ radianes} = 0.017453 \text{ radianes (aproximadamente)}.$$

5. FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS NOTABLES

| Angulo $\theta$ en | | sen $\theta$ | cos $\theta$ | tan $\theta$ |
|---|---|---|---|---|
| Radianes | Grados | | | |
| 0 | 0° | 0 | 1 | 0 |
| $\frac{\pi}{6}$ | 30° | ½ | $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ | $\frac{1}{3}\sqrt{3}$ |
| $\frac{\pi}{4}$ | 45° | $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ | $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ | 1 |
| $\frac{\pi}{3}$ | 60° | $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ | ½ | $\sqrt{3}$ |
| $\frac{\pi}{2}$ | 90° | 1 | 0 | |

6. FÓRMULAS PARA SUMA Y RESTA DE ÁNGULOS

$$\operatorname{sen}(x \pm y) = \operatorname{sen} x \cos y \pm \cos x \operatorname{sen} y,$$
$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y,$$
$$\tan(x \pm y) = \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \tan y}.$$

7. FÓRMULAS PARA EL ÁNGULO DOBLE

$$\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x,$$
$$\cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = 1 - 2 \operatorname{sen}^2 x = 2 \cos^2 x - 1,$$
$$\tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$$

8. FÓRMULAS PARA LA MITAD DEL ÁNGULO

$$\operatorname{sen}\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}, \qquad \cos\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$$

$$\tan\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}} = \frac{\operatorname{sen} x}{1+\cos x} = \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x}$$

## C. El alfabeto griego

Α α alpha
Β β beta
Γ γ gamma
Δ δ delta
Ε ε épsilon
Ζ ζ zeta
Η η eta
Θ θ theta

Ι ι iota
Λ ϰ kappa
Λ λ lambda
Μ μ my
Ν ν ny
Ξ ξ xi
Ο ο omicrón
Π π pi

Ρ ϱ ro
Σ σ sigma
Τ τ tau
ϒ υ ípsilon
Φ ϕ fi
Χ χ ji
Ψ ψ psi
Ω ω omega

# Apéndice II

## Tablas

## 1. FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS NATURALES

| Radianes | Grados | Seno | Coseno | Tangente | Cotangente | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| .0000 | 0.0 | .0000 | 1.0000 | .0000 | —— | 90.0 | 1.5708 |
| .0087 | 0.5 | .0087 | 1.0000 | .0087 | 114.5887 | 89.5 | 1.5621 |
| .0175 | 1.0 | .0175 | .9998 | .0175 | 57.2900 | 89.0 | 1.5533 |
| .0262 | 1.5 | .0262 | .9997 | .0262 | 38.1885 | 88.5 | 1.5446 |
| .0349 | 2.0 | .0349 | .9994 | .0349 | 28.6363 | 88.0 | 1.5359 |
| .0436 | 2.5 | .0436 | .9990 | .0437 | 22.9038 | 87.5 | 1.5272 |
| .0524 | 3.0 | .0523 | .9986 | .0524 | 19.0811 | 87.0 | 1.5184 |
| .0611 | 3.5 | .0610 | .9981 | .0612 | 16.3499 | 86.5 | 1.5097 |
| .0698 | 4.0 | .0698 | .9976 | .0699 | 14.3007 | 86.0 | 1.5010 |
| .0785 | 4.5 | .0785 | .9969 | .0787 | 12.7062 | 85.5 | 1.4923 |
| .0873 | 5.0 | .0872 | .9962 | .0875 | 11.4301 | 85.0 | 1.4835 |
| .0960 | 5.5 | .0958 | .9954 | .0963 | 10.3854 | 84.5 | 1.4748 |
| .1047 | 6.0 | .1045 | .9945 | .1051 | 9.5144 | 84.0 | 1.4661 |
| .1134 | 6.5 | .1132 | .9936 | .1139 | 8.7769 | 83.5 | 1.4574 |
| .1222 | 7.0 | .1219 | .9925 | .1228 | 8.1443 | 83.0 | 1.4486 |
| .1309 | 7.5 | .1305 | .9914 | .1317 | 7.5958 | 82.5 | 1.4399 |
| .1396 | 8.0 | .1392 | .9903 | .1405 | 7.1154 | 82.0 | 1.4312 |
| .1484 | 8.5 | .1478 | .9890 | .1495 | 6.6912 | 81.5 | 1.4224 |
| .1571 | 9.0 | .1564 | .9877 | .1584 | 6.3138 | 81.0 | 1.4137 |
| .1658 | 9.5 | .1650 | .9863 | .1673 | 5.9758 | 80.5 | 1.4050 |
| .1745 | 10.0 | .1736 | .9848 | .1763 | 5.6713 | 80.0 | 1.3963 |
| .1833 | 10.5 | .1822 | .9833 | .1853 | 5.3955 | 79.5 | 1.3875 |
| .1920 | 11.0 | .1908 | .9816 | .1944 | 5.1446 | 79.0 | 1.3788 |
| .2007 | 11.5 | .1994 | .9799 | .2035 | 4.9152 | 78.5 | 1.3701 |
| .2094 | 12.0 | .2079 | .9781 | .2126 | 4.7046 | 78.0 | 1.3614 |
| .2182 | 12.5 | .2164 | .9763 | .2217 | 4.5107 | 77.5 | 1.3526 |
| .2269 | 13.0 | .2250 | .9744 | .2309 | 4.3315 | 77.0 | 1.3439 |
| .2356 | 13.5 | .2334 | .9724 | .2401 | 4.1653 | 76.5 | 1.3352 |
| .2443 | 14.0 | .2419 | .9703 | .2493 | 4.0108 | 76.0 | 1.3265 |
| .2531 | 14.5 | .2504 | .9681 | .2586 | 3.8667 | 75.5 | 1.3177 |
| .2618 | 15.0 | .2588 | .9659 | .2679 | 3.7321 | 75.0 | 1.3090 |
| .2705 | 15.5 | .2672 | .9636 | .2773 | 3.6059 | 74.5 | 1.3003 |
| .2793 | 16.0 | .2756 | .9613 | .2867 | 3.4874 | 74.0 | 1.2915 |
| .2880 | 16.5 | .2840 | .9588 | .2962 | 3.3759 | 73.5 | 1.2828 |
| .2967 | 17.0 | .2924 | .9563 | .3057 | 3.2709 | 73.0 | 1.2741 |
| .3054 | 17.5 | .3007 | .9537 | .3153 | 3.1716 | 72.5 | 1.2654 |
| .3142 | 18.0 | .3090 | .9511 | .3249 | 3.0777 | 72.0 | 1.2566 |
| .3229 | 18.5 | .3173 | .9483 | .3346 | 2.9887 | 71.5 | 1.2479 |
| .3316 | 19.0 | .3256 | .9455 | .3443 | 2.9042 | 71.0 | 1.2392 |
| .3403 | 19.5 | .3338 | .9426 | .3541 | 2.8239 | 70.5 | 1.2305 |
| .3491 | 20.0 | .3420 | .9397 | .3640 | 2.7475 | 70.0 | 1.2217 |
| .3578 | 20.5 | .3502 | .9367 | .3739 | 2.6746 | 69.5 | 1.2130 |
| .3665 | 21.0 | .3584 | .9336 | .3839 | 2.6051 | 69.0 | 1.2043 |
| .3752 | 21.5 | .3665 | .9304 | .3939 | 2.5386 | 68.5 | 1.1956 |
| .3840 | 22.0 | .3746 | .9272 | .4040 | 2.4751 | 68.0 | 1.1868 |
| .3927 | 22.5 | .3827 | .9239 | .4142 | 2.4142 | 67.5 | 1.1781 |
| | | Coseno | Seno | Cotangente | Tangente | Grados | Radianes |

## 1. FUNCIONES TRIGONOMETRICAS NATURALES

| Radianes | Grados | Seno | Coseno | Tangente | Cotangente | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| .3927 | 22.5 | .3827 | .9239 | .4142 | 2.4142 | 67.5 | 1.1781 |
| .4014 | 23.0 | .3907 | .9205 | .4245 | 2.3559 | 67.0 | 1.1694 |
| .4102 | 23.5 | .3987 | .9171 | .4348 | 2.2998 | 66.5 | 1.1606 |
| .4189 | 24.0 | .4067 | .9135 | .4452 | 2.2460 | 66.0 | 1.1519 |
| .4276 | 24.5 | .4147 | .9100 | .4557 | 2.1943 | 65.5 | 1.1432 |
| .4363 | 25.0 | .4226 | .9063 | .4663 | 2.1445 | 65.0 | 1.1345 |
| .4451 | 25.5 | .4305 | .9026 | .4770 | 2.0965 | 64.5 | 1.1257 |
| .4538 | 26.0 | .4384 | .8988 | .4877 | 2.0503 | 64.0 | 1.1170 |
| .4625 | 26.5 | .4462 | .8949 | .4986 | 2.0057 | 63.5 | 1.1083 |
| .4712 | 27.0 | .4540 | .8910 | .5095 | 1.9626 | 63.0 | 1.0996 |
| .4800 | 27.5 | .4617 | .8870 | .5206 | 1.9210 | 62.5 | 1.0908 |
| .4887 | 28.0 | .4695 | .8829 | .5317 | 1.8807 | 62.0 | 1.0821 |
| .4974 | 28.5 | .4772 | .8788 | .5430 | 1.8418 | 61.5 | 1.0734 |
| .5061 | 29.0 | .4848 | .8746 | .5543 | 1.8040 | 61.0 | 1.0647 |
| .5149 | 29.5 | .4924 | .8704 | .5658 | 1.7675 | 60.5 | 1.0559 |
| .5236 | 30.0 | .5000 | .8660 | .5774 | 1.7321 | 60.0 | 1.0472 |
| .5323 | 30.5 | .5075 | .8616 | .5890 | 1.6977 | 59.5 | 1.0385 |
| .5411 | 31.0 | .5150 | .8572 | .6009 | 1.6643 | 59.0 | 1.0297 |
| .5498 | 31.5 | .5225 | .8526 | .6128 | 1.6319 | 58.5 | 1.0210 |
| .5585 | 32.0 | .5299 | .8480 | .6249 | 1.6003 | 58.0 | 1.0123 |
| .5672 | 32.5 | .5373 | .8434 | .6371 | 1.5697 | 57.5 | 1.0036 |
| .5760 | 33.0 | .5446 | .8387 | .6494 | 1.5399 | 57.0 | .9948 |
| .5847 | 33.5 | .5519 | .8339 | .6619 | 1.5108 | 56.5 | .9861 |
| .5934 | 34.0 | .5592 | .8290 | .6745 | 1.4826 | 56.0 | .9774 |
| .6021 | 34.5 | .5664 | .8241 | .6873 | 1.4550 | 55.5 | .9687 |
| .6109 | 35.0 | .5736 | .8192 | .7002 | 1.4281 | 55.0 | .9599 |
| .6196 | 35.5 | .5807 | .8141 | .7133 | 1.4019 | 54.5 | .9512 |
| .6283 | 36.0 | .5878 | .8090 | .7265 | 1.3764 | 54.0 | .9425 |
| .6370 | 36.5 | .5948 | .8039 | .7400 | 1.3514 | 53.5 | .9338 |
| .6458 | 37.0 | .6018 | .7986 | .7536 | 1.3270 | 53.0 | .9250 |
| .6545 | 37.5 | .6088 | .7934 | .7673 | 1.3032 | 52.5 | .9163 |
| .6632 | 38.0 | .6157 | .7880 | .7813 | 1.2799 | 52.0 | .9076 |
| .6720 | 38.5 | .6225 | .7826 | .7954 | 1.2572 | 51.5 | .8988 |
| .6807 | 39.0 | .6293 | .7771 | .8098 | 1.2349 | 51.0 | .8901 |
| .6894 | 39.5 | .6361 | .7716 | .8243 | 1.2131 | 50.5 | .8814 |
| .6981 | 40.0 | .6428 | .7660 | .8391 | 1.1918 | 50.0 | .8727 |
| .7069 | 40.5 | .6494 | .7604 | .8541 | 1.1708 | 49.5 | .8639 |
| .7156 | 41.0 | .6561 | .7547 | .8693 | 1.1504 | 49.0 | .8552 |
| .7243 | 41.5 | .6626 | .7490 | .8847 | 1.1303 | 48.5 | .8465 |
| .7330 | 42.0 | .6691 | .7431 | .9004 | 1.1106 | 48.0 | .8378 |
| .7418 | 42.5 | .6756 | .7373 | .9163 | 1.0913 | 47.5 | .8290 |
| .7505 | 43.0 | .6820 | .7314 | .9325 | 1.0724 | 47.0 | .8203 |
| .7592 | 43.5 | .6884 | .7254 | .9490 | 1.0538 | 46.5 | .8116 |
| .7679 | 44.0 | .6947 | .7193 | .9657 | 1.0355 | 46.0 | .8029 |
| .7767 | 44.5 | .7009 | .7133 | .9827 | 1.0176 | 45.5 | .7941 |
| .7854 | 45.0 | .7071 | .7071 | 1.0000 | 1.0000 | 45.0 | .7854 |
| | | Coseno | Seno | Cotangente | Tangente | Grados | Radianes |

## 2. LOGARITMOS DECIMALES

| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 10 | 0000 | 0043 | 0086 | 0128 | 0170 | 0212 | 0253 | 0294 | 0334 | 0374 |
| 11 | 0414 | 0453 | 0492 | 0531 | 0569 | 0607 | 0645 | 0682 | 0719 | 0755 |
| 12 | 0792 | 0828 | 0864 | 0899 | 0934 | 0969 | 1004 | 1038 | 1072 | 1106 |
| 13 | 1139 | 1173 | 1206 | 1239 | 1271 | 1303 | 1335 | 1367 | 1399 | 1430 |
| 14 | 1461 | 1492 | 1523 | 1553 | 1584 | 1614 | 1644 | 1673 | 1703 | 1732 |
| 15 | 1761 | 1790 | 1818 | 1847 | 1875 | 1903 | 1931 | 1959 | 1987 | 2014 |
| 16 | 2041 | 2068 | 2095 | 2122 | 2148 | 2175 | 2201 | 2227 | 2253 | 2279 |
| 17 | 2304 | 2330 | 2355 | 2380 | 2405 | 2430 | 2455 | 2480 | 2504 | 2529 |
| 18 | 2553 | 2577 | 2601 | 2625 | 2648 | 2672 | 2695 | 2718 | 2742 | 2765 |
| 19 | 2788 | 2810 | 2833 | 2856 | 2878 | 2900 | 2923 | 2945 | 2967 | 2989 |
| 20 | 3010 | 3032 | 3054 | 3075 | 3096 | 3118 | 3139 | 3160 | 3181 | 3201 |
| 21 | 3222 | 3243 | 3263 | 3284 | 3304 | 3324 | 3345 | 3365 | 3385 | 3404 |
| 22 | 3424 | 3444 | 3464 | 3483 | 3502 | 3522 | 3541 | 3560 | 3579 | 3598 |
| 23 | 3617 | 3636 | 3655 | 3674 | 3692 | 3711 | 3729 | 3747 | 3766 | 3784 |
| 24 | 3802 | 3820 | 3838 | 3856 | 3874 | 3892 | 3909 | 3927 | 3945 | 3962 |
| 25 | 3979 | 3997 | 4014 | 4031 | 4048 | 4065 | 4082 | 4099 | 4116 | 4133 |
| 26 | 4150 | 4166 | 4183 | 4200 | 4216 | 4232 | 4249 | 4265 | 4281 | 4298 |
| 27 | 4314 | 4330 | 4346 | 4362 | 4378 | 4393 | 4409 | 4425 | 4440 | 4456 |
| 28 | 4472 | 4487 | 4502 | 4518 | 4533 | 4548 | 4564 | 4579 | 4594 | 4609 |
| 29 | 4624 | 4639 | 4654 | 4669 | 4683 | 4698 | 4713 | 4728 | 4742 | 4757 |
| 30 | 4771 | 4786 | 4800 | 4814 | 4829 | 4843 | 4857 | 4871 | 4886 | 4900 |
| 31 | 4914 | 4928 | 4942 | 4955 | 4969 | 4983 | 4997 | 5011 | 5024 | 5038 |
| 32 | 5051 | 5065 | 5079 | 5092 | 5105 | 5119 | 5132 | 5145 | 5159 | 5172 |
| 33 | 5185 | 5198 | 5211 | 5224 | 5237 | 5250 | 5263 | 5276 | 5289 | 5302 |
| 34 | 5315 | 5328 | 5340 | 5353 | 5366 | 5378 | 5391 | 5403 | 5416 | 5428 |
| 35 | 5441 | 5453 | 5465 | 5478 | 5490 | 5502 | 5514 | 5527 | 5539 | 5551 |
| 36 | 5563 | 5575 | 5587 | 5599 | 5611 | 5623 | 5635 | 5647 | 5658 | 5670 |
| 37 | 5682 | 5694 | 5705 | 5717 | 5729 | 5740 | 5752 | 5763 | 5775 | 5786 |
| 38 | 5798 | 5809 | 5821 | 5832 | 5843 | 5855 | 5866 | 5877 | 5888 | 5899 |
| 39 | 5911 | 5922 | 5933 | 5944 | 5955 | 5966 | 5977 | 5988 | 5999 | 6010 |
| 40 | 6021 | 6031 | 6042 | 6053 | 6064 | 6075 | 6085 | 6096 | 6107 | 6117 |
| 41 | 6128 | 6138 | 6149 | 6160 | 6170 | 6180 | 6191 | 6201 | 6212 | 6222 |
| 42 | 6232 | 6243 | 6253 | 6263 | 6274 | 6284 | 6294 | 6304 | 6314 | 6325 |
| 43 | 6335 | 6345 | 6355 | 6365 | 6375 | 6385 | 6395 | 6405 | 6415 | 6425 |
| 44 | 6435 | 6444 | 6454 | 6464 | 6474 | 6484 | 6493 | 6503 | 6513 | 6522 |
| 45 | 6532 | 6542 | 6551 | 6561 | 6571 | 6580 | 6590 | 6599 | 6609 | 6618 |
| 46 | 6628 | 6637 | 6646 | 6656 | 6665 | 6675 | 6684 | 6693 | 6702 | 6712 |
| 47 | 6721 | 6730 | 6739 | 6749 | 6758 | 6767 | 6776 | 6785 | 6794 | 6803 |
| 48 | 6812 | 6821 | 6830 | 6839 | 6848 | 6857 | 6866 | 6875 | 6884 | 6893 |
| 49 | 6902 | 6911 | 6920 | 6928 | 6937 | 6946 | 6955 | 6964 | 6972 | 6981 |
| 50 | 6990 | 6998 | 7007 | 7016 | 7024 | 7033 | 7042 | 7050 | 7059 | 7067 |
| 51 | 7076 | 7084 | 7093 | 7101 | 7110 | 7118 | 7126 | 7135 | 7143 | 7152 |
| 52 | 7160 | 7168 | 7177 | 7185 | 7193 | 7202 | 7210 | 7218 | 7226 | 7235 |
| 53 | 7243 | 7251 | 7259 | 7267 | 7275 | 7284 | 7292 | 7300 | 7308 | 7316 |
| 54 | 7324 | 7332 | 7340 | 7348 | 7356 | 7364 | 7372 | 7380 | 7388 | 7396 |

## 2. LOGARITMOS DECIMALES

| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 55 | 7404 | 7412 | 7419 | 7427 | 7435 | 7443 | 7451 | 7459 | 7466 | 7474 |
| 56 | 7482 | 7490 | 7497 | 7505 | 7513 | 7520 | 7528 | 7536 | 7543 | 7551 |
| 57 | 7559 | 7566 | 7574 | 7582 | 7589 | 7597 | 7604 | 7612 | 7619 | 7627 |
| 58 | 7634 | 7642 | 7649 | 7657 | 7664 | 7672 | 7679 | 7686 | 7694 | 7701 |
| 59 | 7709 | 7716 | 7723 | 7731 | 7738 | 7745 | 7752 | 7760 | 7767 | 7774 |
| 60 | 7782 | 7789 | 7796 | 7803 | 7810 | 7818 | 7825 | 7832 | 7839 | 7846 |
| 61 | 7853 | 7860 | 7868 | 7875 | 7882 | 7889 | 7896 | 7903 | 7910 | 7917 |
| 62 | 7924 | 7931 | 7938 | 7945 | 7952 | 7959 | 7966 | 7973 | 7980 | 7987 |
| 63 | 7993 | 8000 | 8007 | 8014 | 8021 | 8028 | 8035 | 8041 | 8048 | 8055 |
| 64 | 8062 | 8069 | 8075 | 8082 | 8089 | 8096 | 8102 | 8109 | 8116 | 8122 |
| 65 | 8129 | 8136 | 8142 | 8149 | 8156 | 8162 | 8169 | 8176 | 8182 | 8189 |
| 66 | 8195 | 8202 | 8209 | 8215 | 8222 | 8228 | 8235 | 8241 | 8248 | 8254 |
| 67 | 8261 | 8267 | 8274 | 8280 | 8287 | 8293 | 8299 | 8306 | 8312 | 8319 |
| 68 | 8325 | 8331 | 8338 | 8344 | 8351 | 8357 | 8363 | 8370 | 8376 | 8382 |
| 69 | 8388 | 8395 | 8401 | 8407 | 8414 | 8420 | 8426 | 8432 | 8439 | 8445 |
| 70 | 8451 | 8457 | 8463 | 8470 | 8476 | 8482 | 8488 | 8494 | 8500 | 8506 |
| 71 | 8513 | 8519 | 8525 | 8531 | 8537 | 8543 | 8549 | 8555 | 8561 | 8567 |
| 72 | 8573 | 8579 | 8585 | 8591 | 8597 | 8603 | 8609 | 8615 | 8621 | 8627 |
| 73 | 8633 | 8639 | 8645 | 8651 | 8657 | 8663 | 8669 | 8675 | 8681 | 8686 |
| 74 | 8692 | 8698 | 8704 | 8710 | 8716 | 8722 | 8727 | 8733 | 8739 | 8745 |
| 75 | 8751 | 8756 | 8762 | 8768 | 8774 | 8779 | 8785 | 8791 | 8797 | 8802 |
| 76 | 8808 | 8814 | 8820 | 8825 | 8831 | 8837 | 8842 | 8848 | 8854 | 8859 |
| 77 | 8865 | 8871 | 8876 | 8882 | 8887 | 8893 | 8899 | 8904 | 8910 | 8915 |
| 78 | 8921 | 8927 | 8932 | 8938 | 8943 | 8949 | 8954 | 8960 | 8965 | 8971 |
| 79 | 8976 | 8982 | 8987 | 8993 | 8998 | 9004 | 9009 | 9015 | 9020 | 9025 |
| 80 | 9031 | 9036 | 9042 | 9047 | 9053 | 9058 | 9063 | 9069 | 9074 | 9079 |
| 81 | 9085 | 9090 | 9096 | 9101 | 9106 | 9112 | 9117 | 9122 | 9128 | 9133 |
| 82 | 9138 | 9143 | 9149 | 9154 | 9159 | 9165 | 9170 | 9175 | 9180 | 9186 |
| 83 | 9191 | 9196 | 9201 | 9206 | 9212 | 9217 | 9222 | 9227 | 9232 | 9238 |
| 84 | 9243 | 9248 | 9253 | 9258 | 9263 | 9269 | 9274 | 9279 | 9284 | 9289 |
| 85 | 9294 | 9299 | 9304 | 9309 | 9315 | 9320 | 9325 | 9330 | 9335 | 9340 |
| 86 | 9345 | 9350 | 9355 | 9360 | 9365 | 9370 | 9375 | 9380 | 9385 | 9390 |
| 87 | 9395 | 9400 | 9405 | 9410 | 9415 | 9420 | 9425 | 9430 | 9435 | 9440 |
| 88 | 9445 | 9450 | 9455 | 9460 | 9465 | 9469 | 9474 | 9479 | 9484 | 9489 |
| 89 | 9494 | 9499 | 9504 | 9509 | 9513 | 9518 | 9523 | 9528 | 9533 | 9538 |
| 90 | 9542 | 9547 | 9552 | 9557 | 9562 | 9566 | 9571 | 9576 | 9581 | 9586 |
| 91 | 9590 | 9595 | 9600 | 9605 | 9609 | 9614 | 9619 | 9624 | 9628 | 9633 |
| 92 | 9638 | 9643 | 9647 | 9652 | 9657 | 9661 | 9666 | 9671 | 9675 | 9680 |
| 93 | 9685 | 9689 | 9694 | 9699 | 9703 | 9708 | 9713 | 9717 | 9722 | 9727 |
| 94 | 9731 | 9736 | 9741 | 9745 | 9750 | 9754 | 9759 | 9763 | 9768 | 9773 |
| 95 | 9777 | 9782 | 9786 | 9791 | 9795 | 9800 | 9805 | 9809 | 9814 | 9818 |
| 96 | 9823 | 9827 | 9832 | 9836 | 9841 | 9845 | 9850 | 9854 | 9859 | 9863 |
| 97 | 9868 | 9872 | 9877 | 9881 | 9886 | 9890 | 9894 | 9899 | 9903 | 9908 |
| 98 | 9912 | 9917 | 9921 | 9926 | 9930 | 9934 | 9939 | 9943 | 9948 | 9952 |
| 99 | 9956 | 9961 | 9965 | 9969 | 9974 | 9978 | 9983 | 9987 | 9991 | 9996 |

### 3. MONTO COMPUESTO DE $\$ 1$: $(1+i)^n$

| $n$ | **1½%** | **2%** | **2½%** | **3%** | **4%** | **5%** | **6%** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1.0150 | 1.0200 | 1.0250 | 1.0300 | 1.0400 | 1.0500 | 1.0600 |
| 2 | 1.0302 | 1.0404 | 1.0506 | 1.0609 | 1.0816 | 1.1025 | 1.1236 |
| 3 | 1.0457 | 1.0612 | 1.0769 | 1.0927 | 1.1249 | 1.1576 | 1.1910 |
| 4 | 1.0614 | 1.0824 | 1.1038 | 1.1255 | 1.1699 | 1.2155 | 1.2625 |
| 5 | 1.0773 | 1.1041 | 1.1314 | 1.1593 | 1.2167 | 1.2763 | 1.3382 |
| 6 | 1.0934 | 1.1262 | 1.1597 | 1.1941 | 1.2653 | 1.3401 | 1.4185 |
| 7 | 1.1098 | 1.1487 | 1.1887 | 1.2299 | 1.3159 | 1.4071 | 1.5036 |
| 8 | 1.1265 | 1.1717 | 1.2184 | 1.2668 | 1.3686 | 1.4775 | 1.5938 |
| 9 | 1.1434 | 1.1951 | 1.2489 | 1.3048 | 1.4233 | 1.5513 | 1.6895 |
| **10** | 1.1605 | 1.2190 | 1.2801 | 1.3439 | 1.4802 | 1.6289 | 1.7908 |
| 11 | 1.1779 | 1.2434 | 1.3121 | 1.3842 | 1.5395 | 1.7103 | 1.8983 |
| 12 | 1.1956 | 1.2682 | 1.3449 | 1.4258 | 1.6010 | 1.7959 | 2.0122 |
| 13 | 1.2136 | 1.2936 | 1.3785 | 1.4685 | 1.6651 | 1.8856 | 2.1329 |
| 14 | 1.2318 | 1.3195 | 1.4130 | 1.5126 | 1.7317 | 1.9799 | 2.2609 |
| 15 | 1.2502 | 1.3459 | 1.4483 | 1.5580 | 1.8009 | 2.0789 | 2.3966 |
| 16 | 1.2690 | 1.3728 | 1.4845 | 1.6047 | 1.8730 | 2.1829 | 2.5404 |
| 17 | 1.2880 | 1.4002 | 1.5216 | 1.6528 | 1.9479 | 2.2920 | 2.6928 |
| 18 | 1.3073 | 1.4282 | 1.5597 | 1.7024 | 2.0258 | 2.4066 | 2.8543 |
| 19 | 1.3270 | 1.4568 | 1.5987 | 1.7535 | 2.1068 | 2.5270 | 3.0256 |
| **20** | 1.3469 | 1.4859 | 1.6386 | 1.8061 | 2.1911 | 2.6533 | 3.2071 |
| 21 | 1.3671 | 1.5157 | 1.6796 | 1.8603 | 2.2788 | 2.7860 | 3.3996 |
| 22 | 1.3876 | 1.5460 | 1.7216 | 1.9161 | 2.3699 | 2.9253 | 3.6035 |
| 23 | 1.4084 | 1.5769 | 1.7646 | 1.9736 | 2.4647 | 3.0715 | 3.8197 |
| 24 | 1.4295 | 1.6084 | 1.8087 | 2.0328 | 2.5633 | 3.2251 | 4.0489 |
| 25 | 1.4509 | 1.6406 | 1.8539 | 2.0938 | 2.6658 | 3.3864 | 4.2919 |
| 26 | 1.4727 | 1.6734 | 1.9003 | 2.1566 | 2.7725 | 3.5557 | 4.5494 |
| 27 | 1.4948 | 1.7069 | 1.9478 | 2.2213 | 2.8834 | 3.7335 | 4.8223 |
| 28 | 1.5172 | 1.7410 | 1.9965 | 2.2879 | 2.9987 | 3.9201 | 5.1117 |
| 29 | 1.5400 | 1.7758 | 2.0464 | 2.3566 | 3.1187 | 4.1161 | 5.4184 |
| **30** | 1.5631 | 1.8114 | 2.0976 | 2.4273 | 3.2434 | 4.3219 | 5.7435 |
| 31 | 1.5865 | 1.8476 | 2.1500 | 2.5001 | 3.3731 | 4.5380 | 6.0881 |
| 32 | 1.6103 | 1.8845 | 2.2038 | 2.5751 | 3.5081 | 4.7649 | 6.4534 |
| 33 | 1.6345 | 1.9222 | 2.2589 | 2.6523 | 3.6484 | 5.0032 | 6.8406 |
| 34 | 1.6590 | 1.9607 | 2.3153 | 2.7319 | 3.7943 | 5.2533 | 7.2510 |
| 35 | 1.6839 | 1.9999 | 2.3732 | 2.8139 | 3.9461 | 5.5160 | 7.6861 |
| 36 | 1.7091 | 2.0399 | 2.4325 | 2.8983 | 4.1039 | 5.7918 | 8.1473 |
| 37 | 1.7348 | 2.0807 | 2.4933 | 2.9852 | 4.2681 | 6.0814 | 8.6361 |
| 38 | 1.7608 | 2.1223 | 2.5557 | 3.0748 | 4.4388 | 6.3855 | 9.1543 |
| 39 | 1.7872 | 2.1647 | 2.6196 | 3.1670 | 4.6164 | 6.7048 | 9.7035 |
| **40** | 1.8140 | 2.2080 | 2.6851 | 3.2620 | 4.8010 | 7.0400 | 10.2857 |
| 41 | 1.8412 | 2.2522 | 2.7522 | 3.3599 | 4.9931 | 7.3920 | 10.9029 |
| 42 | 1.8688 | 2.2972 | 2.8210 | 3.4607 | 5.1928 | 7.7616 | 11.5570 |
| 43 | 1.8969 | 2.3432 | 2.8915 | 3.5645 | 5.4005 | 8.1497 | 12.2505 |
| 44 | 1.9253 | 2.3901 | 2.9638 | 3.6715 | 5.6165 | 8.5572 | 12.9855 |
| 45 | 1.9542 | 2.4379 | 3.0379 | 3.7816 | 5.8412 | 8.9850 | 13.7646 |
| 46 | 1.9835 | 2.4866 | 3.1139 | 3.8950 | 6.0748 | 9.4343 | 14.5905 |
| 47 | 2.0133 | 2.5363 | 3.1917 | 4.0119 | 6.3178 | 9.9060 | 15.4659 |
| 48 | 2.0435 | 2.5871 | 3.2715 | 4.1323 | 6.5705 | 10.4013 | 16.3939 |
| 49 | 2.0741 | 2.6388 | 3.3533 | 4.2562 | 6.8333 | 10.9213 | 17.3775 |
| **50** | 2.1052 | 2.6916 | 3.4371 | 4.3839 | 7.1067 | 11.4674 | 18.4202 |

## 4. VALOR ACTUAL DE \$ 1: $(1+i)^{-n}$

| $n$ | **1½%** | **2%** | **2½%** | **3%** | **4%** | **5%** | **6%** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | .985 22 | .980 39 | .97561 | .97087 | .96154 | .95238 | .94340 |
| 2 | .970 66 | .961 17 | .95181 | .94260 | .92456 | .90703 | .89000 |
| 3 | .956 32 | .942 32 | .92860 | .91514 | .88900 | .86384 | .83962 |
| 4 | .942 18 | .923 85 | .90595 | .88849 | .85480 | .82270 | .79209 |
| 5 | .928 26 | .905 73 | .88385 | .86261 | .82193 | .78353 | .74726 |
| 6 | .914 54 | .887 97 | .86230 | .83748 | .79031 | .74622 | .70496 |
| 7 | .901 03 | .870 56 | .84127 | .81309 | .75992 | .71068 | .66506 |
| 8 | .887 71 | .853 49 | .82075 | .78941 | .73069 | .67684 | .62741 |
| 9 | .874 59 | .836 76 | .80073 | .76642 | .70259 | .64461 | .59190 |
| **10** | .861 67 | .820 35 | .78120 | .74409 | .67556 | .61391 | .55839 |
| 11 | .848 93 | .804 26 | .76214 | .72242 | .64958 | .58468 | .52679 |
| 12 | .836 39 | .788 49 | .74356 | .70138 | .62460 | .55684 | .49697 |
| 13 | .824 03 | .773 03 | .72542 | .68095 | .60057 | .53032 | .46884 |
| 14 | .811 85 | .757 88 | .70773 | .66112 | .57748 | .50507 | .44230 |
| 15 | .799 85 | .743 01 | .69047 | .64186 | .55526 | .48102 | .41727 |
| 16 | .788 03 | .728 45 | .67362 | .62317 | .53391 | .45811 | .39365 |
| 17 | .776 39 | .714 16 | .65720 | .60502 | .51337 | .43630 | .37136 |
| 18 | .764 91 | .700 16 | .64117 | .58739 | .49363 | .41552 | .35034 |
| 19 | .753 61 | .686 43 | .62553 | .57029 | .47464 | .39573 | .33051 |
| **20** | .742 47 | .672 97 | .61027 | .55368 | .45639 | .37689 | .31180 |
| 21 | .731 50 | .659 78 | .59539 | .53755 | .43883 | .35894 | .29416 |
| 22 | .720 69 | .646 84 | .58086 | .52189 | .42196 | .34185 | .27751 |
| 23 | .710 04 | .634 16 | .56670 | .50669 | .40573 | .32557 | .26180 |
| 24 | .699 54 | .621 72 | .55288 | .49193 | .39012 | .31007 | .24698 |
| 25 | .689 21 | .609 53 | .53939 | .47761 | .37512 | .29530 | .23300 |
| 26 | .679 02 | .597 58 | .52623 | .46369 | .36065 | .28124 | .21981 |
| 27 | .668 99 | .585 86 | .51340 | .45019 | .34682 | .26785 | .20737 |
| 28 | .659 10 | .574 37 | .50088 | .43708 | .33348 | .25509 | .19563 |
| 29 | .649 36 | .563 11 | .48866 | .42435 | .32069 | .24295 | .18456 |
| **30** | .639 76 | .552 07 | .47674 | .41199 | .30832 | .23138 | .17411 |
| 31 | .630 31 | .541 25 | .46511 | .39999 | .29646 | .22036 | .16425 |
| 32 | .620 99 | .530 63 | .45377 | .38834 | .28506 | .20987 | .15496 |
| 33 | .611 82 | .520 23 | .44270 | .37703 | .27409 | .19987 | .14619 |
| 34 | .602 77 | .510 03 | .43191 | .36604 | .26355 | .19035 | .13791 |
| 35 | .593 87 | .500 03 | .42137 | .35538 | .25342 | .18129 | .13011 |
| 36 | .585 09 | .490 22 | .41109 | .34503 | .24367 | .17266 | .12274 |
| 37 | .576 44 | .480 61 | .40107 | .33498 | .23430 | .16444 | .11579 |
| 38 | .567 92 | .471 19 | .39128 | .32523 | .22529 | .15661 | .10924 |
| 39 | .559 53 | .461 95 | .38174 | .31575 | .21662 | .14915 | .10306 |
| **40** | .551 26 | .452 89 | .37243 | .30656 | .20829 | .14205 | .09722 |
| 41 | .543 12 | .444 01 | .36335 | .29763 | .20028 | .13528 | .09172 |
| 42 | .535 09 | .435 30 | .35448 | .28896 | .19257 | .12884 | .08653 |
| 43 | .527 18 | .426 77 | .34584 | .28054 | .18517 | .12270 | .08163 |
| 44 | .519 39 | .418 40 | .33740 | .27237 | .17805 | .11686 | .07701 |
| 45 | .511 71 | .410 20 | .32917 | .26444 | .17120 | .11130 | .07265 |
| 46 | .504 15 | .402 15 | .32115 | .25674 | .16461 | .10600 | .06854 |
| 47 | .496 70 | .394 27 | .31331 | .24926 | .15828 | .10095 | .06466 |
| 48 | .489 36 | .386 54 | .30567 | .24200 | .15219 | .09614 | .06100 |
| 49 | .482 13 | .378 96 | .29822 | .23495 | .14634 | .09156 | .05755 |
| **50** | .475 00 | .371 53 | .29094 | .22811 | .14071 | .08720 | .05429 |

### 5. MONTO DE UNA ANUALIDAD DE \$ 1: $s_{\overline{n}|i}$

| *n* | **1½%** | **2%** | **2½%** | **3%** | **4%** | **5%** | **6%** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 |
| 2 | 2.0150 | 2.0200 | 2.0250 | 2.0300 | 2.0400 | 2.0500 | 2.0600 |
| 3 | 3.0452 | 3.0604 | 3.0756 | 3.0909 | 3.1216 | 3.1525 | 3.1836 |
| 4 | 4.0909 | 4.1216 | 4.1525 | 4.1836 | 4.2465 | 4.3101 | 4.3746 |
| 5 | 5.1523 | 5.2040 | 5.2563 | 5.3091 | 5.4163 | 5.5256 | 5.6371 |
| 6 | 6.2296 | 6.3081 | 6.3877 | 6.4684 | 6.6330 | 6.8019 | 6.9753 |
| 7 | 7.3230 | 7.4343 | 7.5474 | 7.6625 | 7.8983 | 8.1420 | 8.3938 |
| 8 | 8.4328 | 8.5830 | 8.7361 | 8.8923 | 9.2142 | 9.5491 | 9.8975 |
| 9 | 9.5593 | 9.7546 | 9.9545 | 10.1591 | 10.5828 | 11.0266 | 11.4913 |
| **10** | 10.7027 | 10.9497 | 11.2034 | 11.4639 | 12.0061 | 12.5779 | 13.1808 |
| 11 | 11.8633 | 12.1687 | 12.4835 | 12.8078 | 13.4864 | 14.2068 | 14.9716 |
| 12 | 13.0412 | 13.4121 | 13.7956 | 14.1920 | 15.0258 | 15.9171 | 16.8699 |
| 13 | 14.2368 | 14.6803 | 15.1404 | 15.6178 | 16.6268 | 17.7130 | 18.8821 |
| 14 | 15.4504 | 15.9739 | 16.5190 | 17.0863 | 18.2919 | 19.5986 | 21.0151 |
| 15 | 16.6821 | 17.2934 | 17.9319 | 18.5989 | 20.0236 | 21.5786 | 23.2760 |
| 16 | 17.9324 | 18.6393 | 19.3802 | 20.1569 | 21.8245 | 23.6575 | 25.6725 |
| 17 | 19.2014 | 20.0121 | 20.8647 | 21.7616 | 23.6975 | 25.8404 | 28.2129 |
| 18 | 20.4894 | 21.4123 | 22.3863 | 23.4144 | 25.6454 | 28.1324 | 30.9057 |
| 19 | 21.7967 | 22.8406 | 23.9460 | 25.1169 | 27.6712 | 30.5390 | 33.7600 |
| **20** | 23.1237 | 24.2974 | 25.5447 | 26.8704 | 29.7781 | 33.0660 | 36.7856 |
| 21 | 24.4705 | 25.7833 | 27.1833 | 28.6765 | 31.9692 | 35.7193 | 39.9927 |
| 22 | 25.8376 | 27.2990 | 28.8629 | 30.5368 | 34.2480 | 38.5052 | 43.3923 |
| 23 | 27.2251 | 28.8450 | 30.5844 | 32.4529 | 36.6179 | 41.4305 | 46.9958 |
| 24 | 28.6335 | 30.4219 | 32.3490 | 34.4265 | 39.0826 | 44.5020 | 50.8156 |
| 25 | 30.0630 | 32.0303 | 34.1578 | 36.4593 | 41.6459 | 47.7271 | 54.8645 |
| 26 | 31.5140 | 33.6709 | 36.0117 | 38.5530 | 44.3117 | 51.1135 | 59.1564 |
| 27 | 32.9867 | 35.3443 | 37.9120 | 40.7096 | 47.0842 | 54.6691 | 63.7058 |
| 28 | 34.4815 | 37.0512 | 39.8598 | 42.9309 | 49.9676 | 58.4026 | 68.5281 |
| 29 | 35.9987 | 38.7922 | 41.8563 | 45.2189 | 52.9663 | 62.3227 | 73.6398 |
| **30** | 37.5387 | 40.5681 | 43.9027 | 47.5754 | 56.0849 | 66.4388 | 79.0582 |
| 31 | 39.1018 | 42.3794 | 46.0003 | 50.0027 | 59.3283 | 70.7608 | 84.8017 |
| 32 | 40.6883 | 44.2270 | 48.1503 | 52.5028 | 62.7015 | 75.2988 | 90.8898 |
| 33 | 42.2986 | 46.1116 | 50.3540 | 55.0778 | 66.2095 | 80.0638 | 97.3432 |
| 34 | 43.9331 | 48.0338 | 52.6129 | 57.7302 | 69.8579 | 85.0670 | 104.1838 |
| 35 | 45.5921 | 49.9945 | 54.9282 | 60.4621 | 73.6522 | 90.3203 | 111.4348 |
| 36 | 47.2760 | 51.9944 | 57.3014 | 63.2759 | 77.5983 | 95.8363 | 119.1209 |
| 37 | 48.9851 | 54.0343 | 59.7339 | 66.1742 | 81.7022 | 101.6281 | 127.2681 |
| 38 | 50.7199 | 56.1149 | 62.2273 | 69.1594 | 85.9703 | 107.7095 | 135.9042 |
| 39 | 52.4807 | 58.2372 | 64.7830 | 72.2342 | 90.4091 | 114.0950 | 145.0585 |
| **40** | 54.2679 | 60.4020 | 67.4026 | 75.4013 | 95.0255 | 120.7998 | 154.7620 |
| 41 | 56.0819 | 62.6100 | 70.0876 | 78.6633 | 99.8265 | 127.8398 | 165.0477 |
| 42 | 57.9231 | 64.8622 | 72.8398 | 82.0232 | 104.8196 | 135.2318 | 175.9505 |
| 43 | 59.7920 | 67.1595 | 75.6608 | 85.4839 | 110.0124 | 142.9933 | 187.5076 |
| 44 | 61.6889 | 69.5027 | 78.5523 | 89.0484 | 115.4129 | 151.1430 | 199.7580 |
| 45 | 63.6142 | 71.8927 | 81.5161 | 92.7199 | 121.0294 | 159.7002 | 212.7435 |
| 46 | 65.5684 | 74.3306 | 84.5540 | 96.5015 | 126.8706 | 168.6852 | 226.5081 |
| 47 | 67.5519 | 76.8172 | 87.6679 | 100.3965 | 132.9454 | 178.1194 | 241.0986 |
| 48 | 69.5652 | 79.3535 | 90.8596 | 104.4084 | 139.2632 | 188.0254 | 256.5645 |
| 49 | 71.6087 | 81.9406 | 94.1311 | 108.5406 | 145.8337 | 198.4267 | 272.9584 |
| **50** | 73.6828 | 84.5794 | 97.4843 | 112.7969 | 152.6671 | 209.3480 | 290.3359 |

## 6. VALOR ACTUAL DE UNA ANUALIDAD DE $ 1: $a_{\overline{n}|i}$

| $n$ | **$1\frac{1}{2}\%$** | **2%** | **$2\frac{1}{2}\%$** | **3%** | **4%** | **5%** | **6%** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | .9852 | .9804 | .9756 | .9709 | .9615 | .9524 | .9434 |
| 2 | 1.9559 | 1.9416 | 1.9274 | 1.9135 | 1.8861 | 1.8594 | 1.8334 |
| 3 | 2.9122 | 2.8839 | 2.8560 | 2.8286 | 2.7751 | 2.7232 | 2.6730 |
| 4 | 3.8544 | 3.8077 | 3.7620 | 3.7171 | 3.6299 | 3.5460 | 3.4651 |
| 5 | 4.7826 | 4.7135 | 4.6458 | 4.5797 | 4.4518 | 4.3295 | 4.2124 |
| 6 | 5.6972 | 5.6014 | 5.5081 | 5.4172 | 5.2421 | 5.0757 | 4.9173 |
| 7 | 6.5982 | 6.4720 | 6.3494 | 6.2303 | 6.0021 | 5.7864 | 5.5824 |
| 8 | 7.4859 | 7.3255 | 7.1701 | 7.0197 | 6.7327 | 6.4632 | 6.2098 |
| 9 | 8.3605 | 8.1622 | 7.9709 | 7.7861 | 7.4353 | 7.1078 | 6.8017 |
| **10** | 9.2222 | 8.9826 | 8.7521 | 8.5302 | 8.1109 | 7.7217 | 7.3601 |
| 11 | 10.0711 | 9.7868 | 9.5142 | 9.2526 | 8.7605 | 8.3064 | 7.8869 |
| 12 | 10.9075 | 10.5753 | 10.2578 | 9.9540 | 9.3851 | 8.8633 | 8.3838 |
| 13 | 11.7315 | 11.3484 | 10.9832 | 10.6350 | 9.9856 | 9.3936 | 8.8527 |
| 14 | 12.5434 | 12.1062 | 11.6909 | 11.2961 | 10.5631 | 9.8986 | 9.2950 |
| 15 | 13.3432 | 12.8493 | 12.3814 | 11.9379 | 11.1184 | 10.3797 | 9.7122 |
| 16 | 14.1313 | 13.5777 | 13.0550 | 12.5611 | 11.6523 | 10.8378 | 10.1059 |
| 17 | 14.9076 | 14.2919 | 13.7122 | 13.1661 | 12.1657 | 11.2741 | 10.4773 |
| 18 | 15.6726 | 14.9920 | 14.3534 | 13.7535 | 12.6593 | 11.6896 | 10.8276 |
| 19 | 16.4262 | 15.6785 | 14.9789 | 14.3238 | 13.1339 | 12.0853 | 11.1581 |
| **20** | 17.1686 | 16.3514 | 15.5892 | 14.8775 | 13.5903 | 12.4622 | 11.4699 |
| 21 | 17.9001 | 17.0112 | 16.1845 | 15.4150 | 14.0292 | 12.8212 | 11.7641 |
| 22 | 18.6208 | 17.6580 | 16.7654 | 15.9369 | 14.4511 | 13.1630 | 12.0416 |
| 23 | 19.3309 | 18.2922 | 17.3321 | 16.4436 | 14.8568 | 13.4886 | 12.3034 |
| 24 | 20.0304 | 18.9139 | 17.8850 | 16.9355 | 15.2470 | 13.7986 | 12.5504 |
| 25 | 20.7196 | 19.5235 | 18.4244 | 17.4131 | 15.6221 | 14.0939 | 12.7834 |
| 26 | 21.3986 | 20.1210 | 18.9506 | 17.8768 | 15.9828 | 14.3752 | 13.0032 |
| 27 | 22.0676 | 20.7069 | 19.4640 | 18.3270 | 16.3296 | 14.6430 | 13.2105 |
| 28 | 22.7267 | 21.2813 | 19.9649 | 18.7641 | 16.6631 | 14.8981 | 13.4062 |
| 29 | 23.3761 | 21.8444 | 20.4535 | 19.1885 | 16.9837 | 15.1411 | 13.5907 |
| **30** | 24.0158 | 22.3965 | 20.9303 | 19.6004 | 17.2920 | 15.3725 | 13.7648 |
| 31 | 24.6461 | 22.9377 | 21.3954 | 20.0004 | 17.5885 | 15.5928 | 13.9291 |
| 32 | 25.2671 | 23.4683 | 21.8492 | 20.3888 | 17.8736 | 15.8027 | 14.0840 |
| 33 | 25.8790 | 23.9886 | 22.2919 | 20.7658 | 18.1476 | 16.0025 | 14.2302 |
| 34 | 26.4817 | 24.4986 | 22.7238 | 21.1318 | 18.4112 | 16.1929 | 14.3681 |
| 35 | 27.0756 | 24.9986 | 23.1452 | 21.4872 | 18.6646 | 16.3742 | 14.4982 |
| 36 | 27.6607 | 25.4888 | 23.5563 | 21.8323 | 18.9083 | 16.5469 | 14.6210 |
| 37 | 28.2371 | 25.9695 | 23.9573 | 22.1672 | 19.1426 | 16.7113 | 14.7368 |
| 38 | 28.8051 | 26.4406 | 24.3486 | 22.4925 | 19.3679 | 16.8679 | 14.8460 |
| 39 | 29.3646 | 26.9026 | 24.7303 | 22.8082 | 19.5845 | 17.0170 | 14.9491 |
| **40** | 29.9158 | 27.3555 | 25.1028 | 23.1148 | 19.7928 | 17.1591 | 15.0463 |
| 41 | 30.4590 | 27.7995 | 25.4661 | 23.4124 | 19.9931 | 17.2944 | 15.1380 |
| 42 | 30.9941 | 28.2348 | 25.8206 | 23.7014 | 20.1856 | 17.4232 | 15.2245 |
| 43 | 31.5212 | 28.6616 | 26.1664 | 23.9819 | 20.3708 | 17.5459 | 15.3062 |
| 44 | 32.0406 | 29.0800 | 26.5038 | 24.2543 | 20.5488 | 17.6628 | 15.3832 |
| 45 | 32.5523 | 29.4902 | 26.8330 | 24.5187 | 20.7200 | 17.7741 | 15.4558 |
| 46 | 33.0565 | 29.8923 | 27.1542 | 24.7754 | 20.8847 | 17.8801 | 15.5244 |
| 47 | 33.5532 | 30.2866 | 27.4675 | 25.0247 | 21.0429 | 17.9810 | 15.5890 |
| 48 | 34.0426 | 30.6731 | 27.7732 | 25.2667 | 21.1951 | 18.0772 | 15.6500 |
| 49 | 34.5247 | 31.0521 | 28.0714 | 25.5017 | 21.3415 | 18.1687 | 15.7076 |
| **50** | 34.9997 | 31.4236 | 28.3623 | 25.7298 | 21.4822 | 18.2559 | 15.7619 |

# Respuestas a los ejercicios de número impar

## GRUPO 1, pp. 19-20

**1.** $a^3 + a^2b - 2b^3 - 2ab^2$. **3.** $2x^2$ **5.** $2c^2 - cd + 2d + c$.
**7.** $2x^3 - 6x^2 + 5x - 2$. **9.** $3a + 6by - 5cy^2 - dy^3$ **11.** $2x^3 + 7x - 4$.
**13.** $-2x^3 + 2x^2 - x + 10$. **15.** $-4x^2 + 13x - 6$. **17.** 6. **19.** $x - 2y$.
**21.** $-m + 9n$. **23.** (a) $-2$; (b) $-15$. **25.** $-a + 5b - 6c$.
**27.** $6m - n + p$. **29.** $4x^2 - 3$. **31.** $3a^3 + a^2 - a$.

## GRUPO 2, pp. 28-29

**1.** $-16a^3b^3$. **3.** $x^3y^2 - 2xy^3 + 4xy^2$. **5.** $3a^3 - a^2b - 20ab^2 + 14b^3$,
**7.** $a^3 + 8b^3$, **9.** $-m^6 + 2m^5 - 3m^4 + 4m^3 - 3m^2 + 2m - 1$.
**11.** $xyz + axy + axz + ayz + a^2x + a^2y + a^2z + a^3$, **13.** $a^5 - b^5$.
**15.** $a^8 + a^4 + 1$.
**37.** $a^4 - 2a^3b + a^2b^2$, **39.** $a^2x^2 - x^2y^2$. **41.** $a^2 + 2ac + c^2 - b^2$.
**43.** $12x^2 + 2x - 4$. **45.** $27m^3 - 54m^2n^2 + 36mn^4 - 8n^6$. **47.** $x^8 - 1$.
**49.** $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - 2ab + 2ac - 2ad - 2bc + 2bd - 2cd$.

## GRUPO 3, p. 37

**1.** $-2x^2yz$. **3.** $2ax - 4by$. **5.** $2x - 3y$. **7.** $a - 3b$.
**9.** $m^3 - m^2n + mn^2 - n^3$. **11.** $x^4 - x^3y + x^2y^2 - xy^3 + y^4$.
**13.** $x^2 - 2xy - 2y^2$. **15.** $2a^2 - 3ab + b^2$. **17.** $2x - y + 2$.
**19.** $Q = 2a^3 + 2a^2 - a + 1$, $R = -6$. **21.** $a^2 - 2ab + b^2$.
**27.** $x + 2y$. **31.** $2x + y - 2$. **33.** $-51$. **35.** $x^3 + x - 3$.

## GRUPO 4, p. 44

**1.** $2xy^2(x^2 - 3y)$. **3.** $2b^2(2m + 3n)^2$. **5.** $(x + y + a)(x + y - a)$.
**7.** $(m - n + b)(m - n - b)$. **9.** $(3a - 2)(2a + 3)$.
**11.** $(4x - 3)(3x - 5)$. **13.** $(2m - 3n)(5m + n)$.
**15.** $(x + y - 2)(x + y + 3)$. **17.** $(x + 3)(x - 2y)$.
**19.** $2a^2(2x - y)(m + 2n)$. **21.** $(2x - y)^3$.
**23.** $(ab^2 + 3c^2d)(a^2b^4 - 3ab^2c^2d + 9c^4d^2)$. **25.** $(1 + my)(1 + y)(1 - y)$.

**27.** $(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)(x^4 - x^2 + 1)$.

**29.** $(x + y + z)(x + y - z)(x + z - x)\ (y + z - x)$.

**31.** $(2x - 1)(x + 2)(3x - 2)$. **33.** $(a + 2b)(a - b)(3a - 2b)$.

**35.** $(x + 1)(x - 2)(x + 3)$. **37.** $(x^4 - 16)(x + 3)$.

**39.** $m(m - 1)(2m + 3)(m + n)$.

## GRUPO 5, pp. 49-50

**1.** $\dfrac{a}{a - b}$. **3.** $\dfrac{x - y}{x^2 - xy + y^2}$. **5.** $\dfrac{x}{1 - x}$. **7.** $x + 4 - \dfrac{3x + 3}{x^2 + 1}$.

**9.** $\dfrac{x^3 + 1}{x - 1}$. **11.** $\dfrac{3x^2 - 1}{x(x^2 - 1)}$. **13.** $\dfrac{3x}{x^2 - 4}$. **15.** $\dfrac{1}{a^4 + a^2 + 1}$.

**17.** 0. **19.** 0. **21.** $\dfrac{3ax}{2by}$. **23.** $x - a$. **25.** $\dfrac{x - 1}{x + 2}$.

**27.** 1. **31.** $\dfrac{6}{7}$. **33.** 1. **35.** $a - x$. **37.** $\dfrac{2xy}{x^2 + y^2}$

**39.** $\dfrac{x - 1}{x + 2}$. **41.** $1 - x$. **43.** $x$. **45.** $\dfrac{a}{2x^2}$

## GRUPO 6, pp. 55-56

**3.** 8. **5.** $\dfrac{1}{5}$. **7.** $\dfrac{27}{64}$. **9.** $\dfrac{4}{3}$. **11.** $\dfrac{2}{a^2}$. **13.** $m$. **15.** $ma$.

**17.** $x^2$. **19.** $x - y$. **21.** $x + 2 + x^{-1}$. **23.** $x - 3x^{2/3}y^{1/3} + 3x^{1/3}y^{2/3} - y$

**25.** $a - b$. **27.** $m^3 - 1$. **29.** $x^{2/3} - x^{1/3}y^{1/3} + y^{2/3}$.

**31.** $a^{1/3} + a^{1/6}x^{1/3} + x^{2/3}$. **33.** $x^4y^{14}$. **35.** $\dfrac{x - y}{x^2(x + 2y)}$

**37.** $2(4 - x^2)^{1/2}$. **39.** $\dfrac{2xy}{(x + y)^2}$

## GRUPO 7, pp. 61-62

**5.** $-3b\sqrt[3]{b^2}$. **7.** $3a^2x\sqrt{5ax}$. **9.** $\dfrac{5a}{2}\sqrt{6a}$. **11.** $\sqrt{2a}$.

**13.** $2\sqrt{3} - 3\sqrt{2}$. **15.** $\sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{2}$. **17.** $12\sqrt{3}$. **19.** $\sqrt{5}$.

**21.** $\sqrt[12]{32}$. **23.** $\sqrt{6} + 2 - \tfrac{1}{3}\sqrt{15}$. **25.** $\sqrt[3]{2} - \sqrt[6]{432} - \sqrt[6]{2}$.

**27.** $30. - 12\sqrt{6}$. **29.** $9\sqrt{3} - 11\sqrt{2}$. **31.** $2\sqrt{6}$. **33.** 0.

**35.** $6. + 2\sqrt{6}$. **37.** $5 + 2\sqrt{6}$. **39.** $\dfrac{2\sqrt{3} + 3\sqrt{2} - \sqrt{30}}{12}$

**41.** $\dfrac{1 - \sqrt{1 - a^4}}{a^2}$. **43.** $\dfrac{\sqrt{10} - \sqrt{35}}{5}$. **45.** $\dfrac{\sqrt{a}(x + 1)}{b - a}$.

## GRUPO 8, pp. 64-65

**11.** $(x - 2y + 3)(3x + y - 2)$. **15.** $a(x - y)$; $a(x - y)(x + y)(x + 2y)$.

**21.** (a) $\sqrt{5}$; (b) $\sqrt{6}$. **23.** 3.7220508. **27.** $\dfrac{1 + \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{a^2}}{1 - a}$

**29.** $\sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{4}$. **31.** $3 + 2\sqrt{5}$. **33.** $-\sqrt{ab}$.

GRUPO 9, pp. 71-72

**1.** (a) $h = \frac{3V}{\pi r^2}$; (b) $r = \sqrt{\frac{3V}{\pi h}}$. **3.** $d = \sqrt{2A}$. **5.** $1;\ 7;\ \frac{7}{9}$.

**9.** 4; 5; 3. **11.** $3 + 2\sqrt{2}$. **13.** 0; 0; 8; 8. **15.** $5 + 2\sqrt{6}$.

**17.** $\frac{-1}{(x + h + 1)(x + 1)}$. 25. $\frac{6x + 1}{2x + 3}$.

GRUPO 10, p. 80

**29.** —1, 2. **31.** 0.7, —2.7. **33.** 0, 1, 2.

GRUPO 11, p.p. 87-88

**1.** 1. **3.** 5. 5. 7. **7.** $a$. **9.** $m$. **11.** $b$. **13.** 0. **15.** 5. **17.** 2.

19. $\frac{2rs}{r + s}$. **21.** $y = \frac{6 - 3x}{2}$, $x = \frac{6 - 2y}{3}$. **23.** $y = \frac{ab - bx}{a}$, $x = \frac{ab - ay}{b}$.

25. $\frac{A - P}{Pr}$. **27.** $\frac{s - s_0 - \frac{1}{2}gt^2}{t}$. **31.** $\frac{9}{2}$.

GRUPO 12, pp. 89-90

**1.** 9, 12. **3.** 6, 7, 8. 5. 9, 15. **7.** 50. **9.** 16, 24, 32.
**11.** 20 m. **13.** 1⅓ hs. **15.** 24 hs. **17.** 3 hs.
**19.** 42 Km. **21.** 15 min. **23.** 2 de 60%, 4 de 90%.
**25.** 37.5 Kg. **27.** $49\frac{1}{11}$ min. después de las 3.
**29.** A, 6 días; B, 3 días; C, 2 días.

GRUPO 13, pp. 99-100

**1.** (1, 1). **3.** (3, —1). **5.** (0, 0). **7.** No hay solución.

**9.** No hay solución. **11.** $\left(-2, \frac{4}{3}\right)$. **13.** $(2a, b)$. **15.** (4, 3, 2).

**17.** (2, 3,6). **21.** ⅜. **23.** 72. **25.** 300 Km, 50 Km/hs.
**27.** $a = 2$, $b = 3$. **29.** A, 3 días; B, 4 días; C, 5 días.

GRUPO 14, p. 106

**1.** 1, 2. **3.** ⅓, —1. **5.** 2, 3. **7.** 4, —3. **9.** 5, —2.

**11.** $1 \pm \sqrt{2}$. **13.** $\frac{2 \pm \sqrt{5}}{3}$. **15.** (0, —8). **17.** $2 \pm 3i$. **19.** $3 \pm i$.

21. $\frac{a}{b}, \frac{b}{a}$. **23.** $b \pm \sqrt{a}$. **27.** 15 m. por 10 m. **29.** 3 hs., 6 hs.

**31.** 100. **33.** 3.04 segs. **35.** 5 cm., 7 cm.

GRUPO 15, pp. 111-112

**1.** Reales y desiguales: —1; —6. **3.** Complejos conjugados; 2; 3.
**5.** Reales y desiguales; 4; 1. **7.** 4. **9.** —8, 4. **11.** 5.
**13.** $x^2 - 7x + 12 = 0$. **15.** $x^2 - 2 = 0$. **17.** $x^2 - 2x - 4 = 0$.

**19.** $(x-2)(x-5)$. **21.** $(x+1+2i)(x+1-2i)$. **23.** $k=1;\ -2$.
**25.** 3. **27.** 1. **29.** $2,\ -\frac{10}{9}$. **31.** $a=2,\ b=-1$. **33.** $-2$.

## GRUPO 16, p. 117

**1.** $\pm 1, \pm 4$. **3.** 4. **5.** $4, \frac{1}{4}$. **7.** $1, 1, -3 \pm 2\sqrt{2}$.
**9.** $2, -1, \frac{-1 \pm \sqrt{33}}{4}$. **11.** 5. **13.** $3, -5$. **15.** 1. **17.** No hay solución.
**19.** 2. **21.** $\frac{16}{25}$. **23.** $1, -3$. **25.** $16x^2 + 25y^2 = 400$.

## GRUPO 17, pp. 122-123

**1.** min. $= 3$ para $x = -2$. **3.** min. $= 0$ para $x = 3$. **5.** max. $= 4$ para $x = 1$.
**7.** Pos. si $x < 1$ y $x > 4$; neg. si $1 < x < 4$; cero si $x = 1, 4$; min. $= -\frac{9}{4}$ si $x = \frac{5}{2}$. **9.** Pos. para toda $x \neq 1$; cero si $x = 1$; min. $= 0$ para $x = 1$.
**11.** Pos para toda $x$ real; min. $= \frac{3}{4}$ si $x = \frac{1}{2}$. **15.** $\frac{1}{2}$.
**17.** 7 cm. cada uno. **19.** 25 m. por 50 m. **25.** $ax^2 - 6ax + 9a + 5,\ a > 0$.

## GRUPO 18, pp. 128-129

**1.** $(4, 2), \left(\frac{9}{4}, -\frac{3}{2}\right)$. **3.** $(1, 2), (4, -4)$. **5.** $1, -1), (1, -1)$.
**7.** $\left(\frac{5+\sqrt{7i}}{2}, \frac{5-\sqrt{7i}}{2}\right), \left(\frac{5-\sqrt{7i}}{2}, \frac{5+\sqrt{7i}}{2}\right)$. **9.** $(1, 1), (-1, -1)$.
**11.** $-2, -10$. **13.** $\left(\frac{2\sqrt{15}}{5}, \frac{2}{5}\sqrt{10}\right), \left(\frac{2\sqrt{15}}{5}, -\frac{2}{5}\sqrt{10}\right)$, $\left(\frac{-2\sqrt{15}}{5}, \frac{2}{5}\sqrt{10}\right), \left(\frac{-2\sqrt{15}}{5}, -\frac{2}{5}\sqrt{10}\right)$
**15.** $\left(\frac{6\sqrt{13}}{13}, \frac{6\sqrt{13}}{13}\right), \left(\frac{6\sqrt{13}}{13}, \frac{-6\sqrt{13}}{13}\right), \left(\frac{-6\sqrt{13}}{13}, \frac{6\sqrt{13}}{13}\right)$, $\left(\frac{-6\sqrt{13}}{13}, \frac{-6\sqrt{13}}{13}\right)$
**17.** $(4, 0), (4, 0), (-4, 0), (-4, 0)$.
**19.** $\left(\frac{\sqrt{10}}{2}, \frac{\sqrt{6}}{2}i\right), \left(\frac{\sqrt{10}}{2}, \frac{-\sqrt{6}}{2}i\right), \left(\frac{-\sqrt{10}}{2}, \frac{\sqrt{6}}{2}i\right), \left(\frac{-\sqrt{10}}{2}, \frac{-\sqrt{6}}{2}i\right)$
**21.** 5, 2. **23.** 15 m. por 25 m. **25.** $-\frac{p}{m}$.

### GRUPO 19, pp. 133-134

**1.** $(2, 1)$, $(-2, -1)$, $(1, 2)$, $(-1, -2)$.
**3.** $(2, -2)$, $(-2, 2)$, $(0, 2\sqrt{2})$, $(0, -2\sqrt{2})$.
5. $3, 5)$, $(-3, -5)$, $\left(\frac{5}{3}, \frac{13}{3}\right)\left(-\frac{5}{3}, -\frac{13}{3}\right)$
**15.** $(2, 1)$, $(1, 2)$, $(-1, -2)$, $(-2, -1)$.
**17.** $(2, -1)$, $(-1, 2)$, $\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{15}}{2} i, \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{15}}{2} i\right)$· $\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{15}}{2} i, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{15}}{2} i\right)$
**19.** $(4, -3)$, $(-4, 3)$, $(-3, 4)$, $(3, -4)$. **21.** $(4, 2)$, $(-2, -4)$.
**23.** $(1, 5)$, $(-1, -5)$, $(14, -8)$, $(-14, 8)$. **25.** $(0, 0)$, $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{6}\right)\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{2}\right)$
**27.** $(1, 5)$, $\left(\frac{39}{29}, \frac{25}{29}\right)$. **29.** $2, 2$.

### GRUPO 21, pp. 141-142

**17.** $a > -1$, $a \neq 1$.

### GRUPO 22, pp. 149-150

**1.** $x > 4$. **3.** $x > 2$. **5.** $x < -2$.
**7.** Pos. si $-1 < x < 2$;neg. si $x < -1$, $x > 2$; cero si $x = -1, 2$.
**9.** Pos. para toda $x$. **11.** $x > 3$, $x < -2$. **13.** $x > \frac{1}{4}$, $x < -3$.
15. Para toda $x$. **17.** Para toda $x$. **19.** Para toda $x \neq 4$.
**21.** $x \geq 7$. **23.** $x \geq 4$, $x \leq -4$. **25.** $k > 4$, $k < -4$. **27.** $-4 < k < 0$.
**29.** $-5 < k < 5$. **31.** $-2 < x < 0$, $x > 1$. **33.** $1 < x < 2$, $x < -1$.
**35.** $x < -2$, $1 < x < 4$. **37.** $x > 1$. **39.** $-3 < x < 1$. **41.** $-2 < x < 1$.
**43.** $x > 4$. **45.** $-\frac{5}{4} < x < -\frac{1}{2}$, $x > 1$. **47.** $x > -\frac{1}{2}$, $-1 > x > -2$.
**49.** $0 < x < 1$, $x > 2$.

### GRUPO 23, p. 152

1. $-2 < x < 2$. **3.** $1 < x < 3$. **5.** $4 < x < 6$. **7.** $0 > x > -4$.
**13.** $x > 3$. **15.** $1 \leq x < 2$. **17.** $x > -\frac{3}{4}$.
**19.** $x > 4$. **21.** $x > 6$, $2 \leq x < 3$.

### GRUPO 25, pp. 166-167

**1.** $81a^4 - 108a^3b + 54a^2b^2 - 12ab^3 + b^4$.
**3.** $x^6 + 18x^5y + 135x^4y^2 + 540x^3y^3 + 1215x^2y^4 + 1458xy^5 + 729y^5$.
5. $x^8 + 4x^{13/2} + 6x^5 + 4x^{7/2} + x^2$. **7.** $\frac{a^4}{16} - a^2 + 6 - \frac{16}{a^2} + \frac{16}{a^4}$.
**9.** $\frac{x^2}{y^4} - \frac{4x}{y^2} + 6 - \frac{4y^2}{x} + \frac{y^4}{x^2}$. **11.** $a^6 - 4a^3 + 6 - 4a^{-3} + a^{-6}$.

**13.** $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 - 3a^2c - 6abc - 3b^2c + 3ac^2 + 3bc^2 - c^3$.

15. $128a^7 - 448a^6b + 672a^5b^2 - 560a^4b^3$. **17.** $a^9 - 3a^8b + 4a^7b^2 - \frac{28}{9}a^6b^3$.

19. $x^6 - 12x^{11/2}y^{1/2} + 66x^5y - 220x^{9/2}y^{3/2}$. **21.** $1 - x + x^2 - x^3$.

23. $1 + 2x + 3x^2 + 4x^3$. **25.** $1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{16}x^6$. **29.** 1.04060401.

**31.** 0.995. **39.** $792x^{5/2}y^{7/2}$. **41.** $\frac{231}{16}a^5x^6$. **43.** $-252$.

**45.** $\frac{231}{16}a^6b^6\ \frac{231}{32}a^5b^5$. **47.** 8º térm. $= \frac{1215y^4}{2x^4}$. **49.** 5º térm. $= 1820y^{-20/3}$.

## GRUPO 26, pp. 174-175

1. $x = 2,\ y = -3$. **3.** $x = 3,\ y = -1$. 5. $(2, -1), (-2, 1)$.

7. $\left(0, -\frac{1}{2}\right)\left(2, \frac{1}{2}\right)$. 9. $4 - i$. **11.** $-1 + 5i$. **13.** $3i$. **15.** $ai$. **17.** 13.

19. $6 + 8i$. **21.** $-4 - 2\sqrt{6}$. **23.** $-4$. **25.** $-i$. **27.** $\frac{1}{5} + \frac{2}{5}i$.

29. $1 - 2i$. **31.** $-2 + i$. **33.** $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$.

## GRUPO 27, pp. 182-183

**11.** $1 + i$. **13.** $5 - i$. **15.** $-1 + i$. **17.** $8 + 2i$. **19.** $2 - 3i$.
**21.** $1 - 4i$. **23.** $-4i$. **25.** $r = 4,\ \theta = 120°$. **27.** $r = 2,\ \theta = 210°$.
**29.** $r = 7,\ \theta = 180°$. **31.** $r = 8,\ \theta = 240°$. **33.** $6i$. **35.** $-\sqrt{3} - i$.
**37.** $\frac{3}{4} + \frac{3}{4}\sqrt{3}i$. **38.** $-2$.

## GRUPO 28, pp. 188-189

1. $4\sqrt{2} + 4\sqrt{2i}$. **3.** $27i$ **5.** $25(\cos 80° + i \operatorname{sen} 80°)$. **7.** $-8i$.

9. $-\frac{1}{4} + \frac{1}{4}i$. **11.** $-i$. **13.** $-8$. **15.** $-128 + 128\sqrt{3}i$.

**17.** $-16 - 16\sqrt{3}i$ **19.** $-3, \frac{3}{2} \pm \frac{3\sqrt{3}}{2}i$. **21.** $r = \sqrt{2}, \theta = 45°, 165°, 285°$.
**23.** $1 \pm i, -1 \pm i$ **25.** $r = 2,\ \theta = 0°, 72°, 144°, 216°, 288°$.
**27.** $r = \sqrt{3},\ \theta = 15°, 75°, 135°, 195°, 255°, 315°$.
**29.** $r = 2, \theta = 15°, 60°, 105°, 150°, 195°, 240°, 285°, 330°$.
**31.** $r = 1, \theta = 30°, 70°, 110°, 150°, 190°\ 230°, 270°\ 310°, 350°$.
**33.** $\pm 1, -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i, \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$. **35.** $\pm 1,\ \pm i$. **37.** $3, -\frac{3}{2} \pm \frac{3\sqrt{3}}{2}i$.

## GRUPO 29, pp. 196-197

**27.** $r = 4.196,\ \theta = 17°\ 35'$. **29.** $u = \frac{x}{x^2 + y^2},\ v = \frac{-y}{x^2 + y^2}$.

## GRUPO 30, pp. 196-197

**1.** 14. **3.** $-5$. **5.** $-2$. **7.** $y = 3x - \frac{6}{x}$. **9.** $y = 2x^3 - 3x^2 + 5x$.

**19.** 5.5 segs. **21.** 4 segs. **23.** 400 Kg. **25.** 16.7% decr. **27.** 17.4%.decr.
**29.** 5.8% cr.

## GRUPO 32, pp. 216-217

**1.** 42; 242. **3.** $-17$, $-56$. **5.** $\frac{29}{2}$; 52. **7.** $a_n = -16$, $s_n = -44$.
**9.** $n = 14$; $a_n = -15$. **11.** $n = 9$, $d = -5$. **13.** $n = 17$, $a_n = -3$. **15.** 63.
**17.** $-2$. **19.** $-2, 0, 2, 4, 6$. **21.** $-\frac{28}{3}, -\frac{20}{3}, -4, -\frac{4}{3}, \frac{4}{3}$.
**23.** $d = 1$, $a_6 = 0$. **25.** $a_7 = -4$, $s_{12} = -30$. **29.** $n^2$. **31.** $2n^2 + n$.
**33.** 5. **35.** 1, 0. **37.** $a_1 + \frac{n-2}{2}d, a_1 + \frac{n}{2}d$. **39.** $-2n$.
**43.** 78.4 m.; 34.3 m. **45.** 1357.

## GRUPO 33, pp. 221-222

**1.** 1024; 2046. **3.** 4096; 5461. **5.** $\frac{3}{2}$; 94½. **7.** $s_6 = \frac{135}{243}$; $n = 6$.
**9.** $r = 2$; $s_6 = 126$. **11.** $a_1 = 5$; $a_7 = 320$. **13.** $4, 1, \frac{1}{4}$.
**15.** $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 2, 4$. **17.** $xy$. **19.** $r = \frac{1}{2}, a_1 = 12$. **21.** $a_7 = 729$, $s_6 = 364$.
**23.** $s_n = na_1$. **29.** $\left(\frac{9}{10}\right)^8$. **31.** $12\tfrac{73}{1296}$ lts. **33.** 2, 8.

## GRUPO 34, pp. 224-225

**1.** $\frac{4}{9}$. **3.** $\frac{3}{4}, \frac{3}{2}$. **5.** $\frac{8}{5}, \frac{4}{3}, \frac{8}{7}$. **7.** $\frac{7}{2}, \frac{7}{3}, \frac{7}{4}, \frac{7}{5}, \frac{7}{6}$. **9.** $\frac{x^2 - y^2}{x}$. **11.** 3, 5.
**13.** 12. **15.** $2, \frac{8}{3}, 4; -\frac{23}{2}, -\frac{46}{3}, -23$.

## GRUPO 35, pp. 231-232

**1.** 24. **3.** $\frac{3}{2}(3 + \sqrt{3})$. **5.** $\frac{5}{4}(\sqrt{5} + 1)$. **7.** $\frac{7}{9}$. **9.** $\frac{35}{99}$. **11.** $\frac{41}{333}$.
**13.** $\frac{1489}{3300}$. **19.** 15 m. **21.** $\frac{1}{16}$. **27.** 11.

## GRUPO 36, pp. 239-240

**5.** 7, $-17$. **7.** 40, $-12$. **9.** $-\frac{5}{9}$, $-0.8291$. **11.** $x^2 + 2x + 3$, $-8$.
**13.** $x^5 + x^4 + x + 1$, $-1$. **15.** $4x^3 - 2x^2 - 2x + 4$, 5. **17.** No. **19.** Sí.
**21.** Si. **23.** No. **25.** Si. **27.** $x - 2$, $x + 3$. **29.** 3, $-2$.
**31.** $x^3 - 3x^2 + 3x - 2$; 5. **33.** $-4$. **35.** $-5$. **37.** $a = 2$, $b = -1$.

## GRUPO 37, pp. 244-245

**1.** 1, 2, 3. **3.** 0, 4, $-2$. **5.** $\pm 1$, $\pm 2$. **7.** 4, $-3$, $2 < x < 3$, $-1 < x < 0$.
**9.** 2, $-1$, $5 < x < 6$, $-4 < x < -3$. **11.** $\pm 2$. **13.** 1, 1, 1, $-2$, $-2$.
**19.** $1 < x < 2$, $x > 3$. **21.** $x > 1$, $x < -2$. **23.** $-2 < x < 1$, $x > 3$.

## GRUPO 38, pp. 248-249

**1.** $x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$. **3.** $x^4 - x^2 - 16x^3 + 4x + 48 = 0$.
**5.** $x^3 - 3x^2 + 2 = 0$. **7.** $x^4 - 6x^3 + 8x^2 + 2x - 1 = 0$.
**9.** $x^5 - 2x^4 - 6x^3 + 20x^2 - 19x + 6 = 0$.
**11.** $x^4 + x^3 - 11x^2 + 35x - 50 = 0$. **13.** $-1$, $-2$. **15.** $2 \pm i$.
**17.** $\pm\sqrt{3}$. **19.** $\pm 2i$. **21.** $2 \pm \sqrt{3}$.
**23.** $A = 2$, $B = 3$. **25.** $A = -1$, $B = 1$, $C = -1$.

## GRUPO 39, pp. 251-252

**1.** $1 + i$, $-3$. **3.** $2 - i$, 1, 1. **5.** $-\sqrt{5}$, $-1$. **7.** $3 - \sqrt{2}$, 1, 2.
**9.** $-i$, $1 + 2i$, 5. **11.** 0, $2 - \sqrt{2}$, $2 - 2i$. **13.** $x^3 - 4x^2 - 2x + 20 = 0$.
**15.** $x^4 - 4x^3 + 24x^2 - 16x + 80 = 0$. **17.** $x^4 - 3x^3 - 9x^2 + 25x - 6 = 0$.
**19.** $(x - 2)(x^2 + 5x + 7)$. **21.** $(x + 1)(x^2 + x + 1)$.
**23.** $(2x - 1)(x - 2)(x^2 - 2x - 1)$.

## GRUPO 40, pp. 255-256

**1.** 1 pos., 1 neg., 2 complejas. **3.** 2 pos., 1 neg.;1 neg., 2 complejas.
**5.** 6 complejas. **7.** 1 nula, 4 complejas. **9.** $\pm 1$, 6 complejas.
**11.** 8 complejas. **13.** 2 nulas, 3 pos.; 2 nulas, 1 pos., 2 complejas.
**15.** 3 pos., 2 neg., 4 complejas; 1 pos., 2 neg., 6 complejas; 3 pos., 6 complejas; 1 pos., 8 complejas.

## GRUPO 41, p. 260

**3.** 4, $-3$, $\frac{1}{3}$. **5.** $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $-6$. **7.** 3, $-5$, $-\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$. **9.** 0, $\pm\frac{1}{2}$, $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.
**11.** 0, 0, $-1$, 2, $\pm\sqrt{2}i$. **13.** 1, $\frac{1}{3}$, $\pm 3i$. **15.** $-3$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1 \pm \sqrt{7}i}{2}$.
**17.** 4, $-\frac{1}{2} \pm \frac{5}{2}i$. **19.** $-2$. **21.** 3. **23.** $-1$, $\frac{2}{3}$. **29.** 3 cm.

## GRUPO 42, pp. 267-268

**1.** 2.6. **3.** 1.1. **5.** 2.5. **7.** 3.4. **9.** $-1.24$.
**13.** $x^3 + x^2 - 26x + 24 = 0$. **15.** $x^3 - 6x^2 - 12x + 112 = 0$.
**19.** $2x^4 - 6x^3 - 7x^2 + 12 = 0$. **21.** $x^4 + 3x^3 + 2x^2 + x + 1 = 0$.
**23.** $x^3 - 10x^2 + 9x + 56 = 0$. **25.** $x^3 - x^2 - 9x + 9 = 0$.
**29.** $3x^3 + 5x^2 - 34x - 24 = 0$. **31.** $x^4 + 6x^3 + 11x^2 + 10x + 1 = 0$.
**33.** $2x^3 + 3.06x^2 + 1.0606x - 0.989698 = 0$. **35.** $3x^3 - 13x^2 - 18x + 40 = 0$.

## GRUPO 43, pp. 271-272

**1.** 3.21. **3.** 1.25. **5.** 3.19. **7.** 1.095. **9.** 3.264. **11.** 2.157. **17.** 0.28.
**19.** 4.464. **21.** 2.736. **23.** 1.913. **25.** —3.271. **27.** 1.933.
**29.** 1.075 cm., 2.9 cm.

## GRUPO 44, pp. 274-275

**1.** $-\frac{1}{2}, 1, \frac{5}{2}$. **3.** $2, 3, 4; k = 26$. **5.** $2, -2, \frac{1}{4}$. **7.** $-3, -3, 4$.
**9.** $3, \frac{1}{3}, -9$. **11.** $-\frac{1}{2}, -1, -3$. **13.** $1, 3, -2$. **15.** $\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\ -4, -4$.
**17.** $\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, 6, 1$. **21.** $\frac{3}{2}$. **23.** $ab = c$.

## GRUPO 45, p. 82

**1.** $\dfrac{2}{x-2} + \dfrac{1}{x+4}$. **3.** $\dfrac{2}{x+3} - \dfrac{1}{x-3}$. **5.** $\dfrac{2}{x+2} - \dfrac{1}{x-3} + \dfrac{2}{x+5}$.

**7.** $\dfrac{3}{x-3} + \dfrac{2}{2x+1} - \dfrac{5}{x-1}$. **9.** $x + 1 + \dfrac{3}{x-2} + \dfrac{2}{x+3}$.

**11.** $\dfrac{3}{x+1} - \dfrac{4}{(x+1)^2}$. **13.** $\dfrac{3}{x} + \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{2}{x^3} + \dfrac{6}{x+5}$.

**15.** $\dfrac{4}{x-1} + \dfrac{2}{(x-1)^2} - \dfrac{1}{x+1} + \dfrac{3}{(x+1)^2}$.

**17.** $\dfrac{1}{x+2} + \dfrac{2}{(x+2)^2} + \dfrac{1}{x-1} - \dfrac{2}{(x-1)^2}$.

**19.** $2 + \dfrac{3}{x} + \dfrac{2}{x^2} + \dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{(x-1)^2}$.

## GRUPO 46, pp. 285-286

**1.** $\dfrac{2}{x-1} + \dfrac{x-3}{x^2+1}$. **3.** $\dfrac{2x}{x^2+1} - \dfrac{4}{x^2+2}$. **5.** $\dfrac{x-1}{x^2+2} - \dfrac{x-3}{x^2+3}$.

**7.** $\dfrac{4}{x+1} + \dfrac{2}{x-1} - \dfrac{2x+1}{x^2+x+3}$. **9.** $2 + \dfrac{1}{x} - \dfrac{2}{x^2} + \dfrac{x-1}{x^2+x+3}$.

**11.** $\dfrac{x+1}{x^2+x+1} + \dfrac{x-1}{(x^2+x+1)^2}$.

**13.** $\dfrac{3}{x} - \dfrac{4}{x^2} + \dfrac{2x-1}{x^2-x+1} - \dfrac{x+3}{(x^2-x+1)^2}$.

**15.** $\dfrac{2}{x+1} - \dfrac{1}{(x+1)^2} + \dfrac{3}{x^2-x+1} + \dfrac{2x}{(x^2-x+1)^2}$.

**17.** $\dfrac{3}{x-1} + \dfrac{1}{(x-1)^3} + \dfrac{2x-1}{x^2+x+1} + \dfrac{x+2}{(x^2+x+1)^2}$.

**19.** $2x + 1 + \dfrac{3}{x^2+3} + \dfrac{x+1}{x^2+1} - \dfrac{2}{(x^2+1)^2} + \dfrac{2x}{(x^2+1)^3}$

### GRUPO 47, pp. 289-291

**3.** 16. **5.** 24. **7.** 1980. **9.** 20; 25. **11.** 60; 120; 120. **13.** 4; 8; $2^n$.
**15.** $f^n$. **17.** 504. **19.** 421,200. **21.** 13,353,984. **23.** 6720. **25.** 1190.

### GRUPO 48, pp. 293-295

5. (a) 5040; (b) 7. **7.** 10. **9.** 2. **11.** 720. **13.** 51,840. **15.** 560.
**17.** 462. **19.** $\dfrac{(p+q)!}{p!q!}$. **21.** 325. **23.** 240. **25.** 720. **27.** 5760.
**29.** 2520. **31.** 720. **33.** (a) 5040; (b) 1440. **35.** (a)720; (b) 240.

### GRUPO 49, pp. 298-299

**3.** (a) 70; (b) 21. **5.** 8. **7.** 9. **9.** 2. **13.** 1365. **15.** 1001. **17.** 11.
**19.** 720. **21.** (a) 495; (b) 330; (c) 210. **23.** 3150. **25.** 861. **27.** 36.
**29.** 714.

### GRUPO 50, pp. 306-307

**7.** 5775. **9.** $u_1^3 + u_2^3 + \ldots + u_n^3$. **11.** $1 + 3 + 5 + 7$. **15.** 15.
**17.** (a) 16; (b) 16. **19.** (a) 20; (b) 42; (c) 63. **21.** 70.

### GRUPO 51, pp. 316-317

**3.** 3 a 2. **5.** $\dfrac{3}{10}$. **7.** $\dfrac{1}{6}$; 5 a 1. **9.** $\dfrac{1}{4}$. **11.** (a) $\dfrac{1}{4}$; (b) $\dfrac{1}{2}$; (c) $\dfrac{3}{4}$.
**13.** $\dfrac{25}{66}$. **15.** $\dfrac{60}{143}$. **17.** 326. **19.** \$ 6.50. **21.** $\dfrac{1}{12}$. **23.** $\dfrac{20}{77}$. **25.** $\dfrac{5}{108}$.
**27.** $\dfrac{5}{12}$. **29.** \$ 5.50. **31.** 66 centavos. **33.** (a) $\dfrac{11}{850}$; (b) $\dfrac{22}{425}$. **35.** $\dfrac{1}{126}$.
**37.** $\dfrac{2197}{20825}$. **39.** $\dfrac{94}{4165}$.

### GRUPO 52, pp. 322-324

**9.** $\dfrac{25}{216}$. **11.** $\dfrac{1}{72}$. **13.** $\dfrac{14}{15}$. **19.** (a) $\dfrac{2}{9}$; (b) $\dfrac{4}{15}$. **21.** $\dfrac{8}{15}$. **23.** $\dfrac{9}{16}$.
**52.** $\dfrac{9}{16}$. **27.** $\dfrac{5}{12}$. **29.** $\dfrac{4}{17}$. **31.** (a) 0.72; (b) 0.02; (c) 0.18; (d) 0.08.
**33.** (a) $\dfrac{1}{4}$; (b) $\dfrac{11}{24}$; (c) $\dfrac{1}{4}$; (d) $\dfrac{1}{24}$. **35.** $\dfrac{3}{4}$. **37.** A, $\dfrac{6}{11}$; B, $\dfrac{5}{11}$.
**39.** \$ 20, \$ 10, \$ 5.

### GRUPO 53, pp. 333-335

3. $\frac{5}{7776}$. 7. (a) $\frac{216}{625}$; (b) $\frac{16}{625}$. 9. 0.2646. 11. $\frac{7}{128}$. 13. $\frac{13}{3888}$.
15. $\frac{459}{512}$. 17. $\frac{8585216}{9765625}$. 19. $\frac{1053}{3125}$. 23. $\frac{1}{2}$. 25. $\frac{5}{324}$ 27. 5; $\frac{63}{256}$.
29. 4; $\frac{14080}{59049}$. 31. $\frac{63}{256}$.

### GRUPO 54, pp. 342-343

1. —14. 3. —28. 5. $-3ax$. 7. $x^2 - 6x - 3$. 9. 2, —3. 11. (5, —2).
13. (—3, 4). 15. No hay solución.

### GRUPO 55, pp. 350-352

1. 73. 3. 107. 5. 16. 7. 48. 9. 2, 3. 11. (3, 1, 2). 13. (2, 6, —2).
15. (0, 0, 0). 33. $x - 2y - 2 = 0$. 35. 13.

### GRUPO 56, pp. 360-363

9. 7. 11. $1 + x^2 + y^2 + z^2$. 13. —24. 15. 3. 17. 1288.
23. $6x^2 + 6y^2 - 32x - 25y - 34 = 0$. 29. 40. 31. $(a - b)(b - c)(c - a)$.
33. $(a - b)(a - c)(a - d)(b - c)(b - d)(c - d)$.

### GRUPO 57, pp. 372-373

3. (3, —1, 2). 5. (—3, 0, 1). 7. (1, —1, 3, 2). 9. (2, —1, 0, 2, 0).
15. 1:2:—1:3. 17. (1, 2, —1, 1).
19. 1, 12, 5; 2, 10, 6; 3, 8, 7; 4, 6, 8; 5, 4, 9; 6, 2, 10. 21. (3, 2, 1).
23. $k = 1$, (2, 2, —1).

### GRUPO 58, p. 379

1. $\log_2 16 = 4$. 3. $\log^{1/8} \frac{1}{4} = \frac{2}{3}$. 5. $\log_x z = y$. 7. $10^2 = 100$.
9. $10^{-1} = 0.1$. 11. $8^{2/3} = 4$. 13. 3. 15. 4. 17. 10. 19. $\frac{3}{2}$
21. 64. 25. $x = 1 + \log_{10} y$.

### GRUPO 59, p. 384

9. $\log_b (x + 1) + \log_b (x - 1) - \log_b (x + 2) - \log_b (x - 2)$.

11. $\log_b x + 2 \log_b (x + 2) - 4 \log_b (x - 2$.

13. $\frac{1}{2} [\log_b (x^2 + 1) - \log_b (x^2 + 2)]$.
15. 4. 17. 0.72. 19. (a) 3; (b) 4. 21. $x = \log_b y - 2$.
23. $x = \log_b \frac{y - 1}{y}$. 25. $x = \log_b \frac{y - 1}{y + 1}$. 27. $x = \frac{b^y}{b^y - 1}$.
29. $x = \frac{2}{b^y + b^{-y}}$.

### GRUPO 60, pp. 389-390

**5.** 3. **7.** 1, —2. **9.** $\dfrac{\log 5}{2 \log 3 - \log 5}$. **11.** $\ln (1 + \sqrt{2})$. **13.** ln 3.
**15.** $\dfrac{1}{2} \ln 2$. **17.** ln 2. **19.** —ln 2. **21.** $\dfrac{\log ra - \log a_1}{\log r}$.
**23.** $-CR \ln \left( \dfrac{CE - Q}{CE} \right)$. **25.** 4. **27.** 5. **29.** 3. **31.** 3. **33.** 2.
**35.** $x^2 - y^2 = 1$. **37.** $x^3 = ey^2$. **39.** $4x^2 + 4y^2 - z^2 = 0$.

### GRUPO 61, pp. 397-398

**1.** 4.322. **3.** 1.167. **5.** 1.099. **7.** 2.332. **11.** 177.8. **13.** 1.695.
**15.** 2.894. **17.** 1.909. **19.** 159.7. **21.** 7791. **23.** 1.802. **25.** 0.2918.
**27.** 0.8096 $\text{m}^2$. **29.** 12.95 $\text{cm}^2$, 4.380 $\text{cm}^3$. **31.** 16.98. **33.** 2.457 segs.

### GRUPO 62, pp. 406-407

**1.** $ 15. **3.** $ 762.50. **5.** $ 990.90. **7.** 3%. **9.** 6.19%. **11.** 25 años.
**13.** 2½%. **17.** $ 609. **19.** $ 486.72. **21.** $ 4438.55. **23.** $ 2693.80.
**25.** 15.73 años. **27.** 14.07 años. **29.** $j = \left(1 + \dfrac{r}{n}\right)^n - 1;\ r = n[1 + j)^{1/n} - 1]$.
**33.** 1.09344.

### GRUPO 63, pp. 413-414

**3.** $ 3210.81. **5.** $ 6003.05; $ 4055.45. **7.** $ 1940.52; $ 1625.16.
**9.** $ 1484.94. **11.** $ 50,000. **13.** $ 197.20. **15.** 11. **17.** $ 1844.11.
**19.** $ 122.89. **21.** $ 655.55. **29.** $ 111.02.

# Indice

Abscisa, 76
Adición, 2, 13
  de fracciones, 46
  de números complejos, 172
  de radicales, 58
  su representación geométrica, 177
Alfabeto griego, 418
Algebra, su estructura, 8
  de cuaterniones, 9
  de matrices, 9
  de números complejos, 10
  sistemas de números usados en, 2
  su naturaleza, 7
  su teorema fundamental, 245
  sus fundamentos, 1
  sus postulados, 3
Amortización, fondo de, 410
  tabla de, 410
Amplitud, 179
Antilogaritmo, 293
Anualidad, 407
  ordinaria, 407
Anualidades, sus aplicaciones, 410
Argumento, 179
Aproximación de raíces irracionales, 261
Asíntotas, 209

Barra, 13
Bibliografía, 415
Binomio, 12
  irracional cuadrático, 251
  ley del, 326
  su desarrollo, 328
Briggs, sistema de (logaritmos), 385

Cálculo logarítmico, 395
Campo de números, 38
  irreducible, 39
  reducible, 39
Capital, 399
Capitalización continua, 405
  período de, 401
Característica, logaritmos comunes, 391
Cero de una función, 79, 83
Cero, su definición, 3
Circunferencia, su ecuación, 124
Cociente, 4, 30
Coeficiente, 12
Coeficientes binomiales, 163
Coeficiente binomial, 305
  su valor máximo, 305
Coeficientes del desarrollo de la potencia de un binomio, 302
Coeficiente principal, 233
Cofactor de un elemento de un determinante, 344
Cologaritmo, 397
Combinaciones, 295
  complementarias, 296
Combinación lineal, 93
Completar un cuadrado, 103
Coordenadas, sistema unidimensional, 74
  sistema rectangular, 75
Condición necesaria y suficiente, 62
Conjugado, como raíz de una ecuación entera racional, 249
Constante absoluta, 67
Constante de proporcionalidad, 200
Constante de variación, 199, 200
Conversión, período de, 401
Cramer, regla de, 365
Cuadrante, 76
Cuaterniones, 9
Curva, 78
Curva cerrada, 108
Curva de frecuencias simples,
  acumulativas, 33
Curva normal de probabilidad, 333
Curva de probabilidad, 330, 332, 333

De Moivre, teorema de, 184
Denominador, 4, 44

- Depreciación, fondo de, 410
- Descartes, regla de los signos de, 252, 253
- Desarrollo binomial, 159, 164
  - del binomio, 328
- Desigualdad, 135
  - relación de orden, 165
  - su sentido, 136
  - sus propiedades, 136
- Determinantes, 337
  - de cualquier orden, 352
  - del sistema, 339, 364
  - de orden *n*, 337
  - de segundo orden, 338
  - de tercer orden, 352
  - diagonal principal, 338
  - su cálculo, 347
  - su desarrollo, 344
  - sus elementos, 338
  - sus propiedades, 340
- Diagonal principal de un determinante, 338
- Diferencia, 14
  - tabular, 393
- Distribución de frecuencias, simples, 332
  - acumulativas, 332
  - binómica, 333
  - normal, 333
- Discriminante de la ecuación cuadrática, 107
- Dividendo, 4, 30
- División, 4, 30
  - exacta, 36
  - de fracciones, 47
  - de números complejos, 172
  - de subconjuntos, 299
  - regla de los signos, 32
  - sintética, 236
  - su definición, 30
  - su procedimiento, 35
- Divisor, 4, 30

- Ecuación completa, 252
  - condicional, 81, 82
  - con fracciones, 86
  - con radicales, 115
  - cuadrática con una incógnita, 101
  - cuadrática o de 2° grado, 101
  - defectuosa, 85
  - de primer grado, 85
  - de segundo grado con dos variables, 123
  - entera racional, 233
  - entera, sus características, 244
  - idéntica, 81, 82
  - indeterminada, 92
  - incompleta, 252
  - lineal, 85
  - lineal con dos incógnitas, 81
  - reducida, 247
  - su forma canónica, 101
  - su gráfica, 78
  - su fórmula, 103
  - sus miembros, 81
  - sus propiedades, 107
- Ecuaciones de forma cuadrática, 113
  - equivalentes, 83
  - lineales, sistemas de, 363
  - logarítmicas, 288
  - su transformación, 263
- Eje, 75
  - de los números imaginarios, 176
  - de los números reales, 176
- Eliminación, 92
- Elipse, su ecuación, 124
- Enteros, 2, 3
- Exponente, 5
  - cero, 54
  - fraccionario, 53
  - negativo, 54
  - racional, 54
- Exponentes, sus leyes, 25, 33, 45, 51, 52
- Expresión algebraica, 9, 11, 12
  - cuadrática, su reducibilidad, 110
- Extensión de una gráfica, 207
- Extremos de la progresión geométrica, 220
  - de una progresión aritmética, 216

- Factorización, 39
- Factorial, 160
- Factor de racionalización, 60
- Fondo de amortización, 410
- Forma polar, 179
  - completa de un número complejo, 189
- Fórmula del binomio, 159
  - de la ecuación de 2° grado, 104
- Fracción impropia, 45
  - propia, 45
- Fracciones, 4, 44
  - compuestas, 48
  - decimales periódicas, 231
  - parciales, 277
  - simples, 44, 45
- Frecuencia, su definición, 312
- Función algebraica, 72, 73
  - de varias variables, 69

  explícita, 69
  implícita, 69
  inversa, 69
  multiforme, 69
  uniforme, 78
Función aritmética, su gráfica, 117
  continua, 376
  cuadrática, 101
  exponencial, 375
    su gráfica, 376
    sus características, 376
  lineal, 81
  racional entera, 81
  logarítmica, 377
    su base, 378
    su gráfica, 378
  racional entera, 73
    exponencial, 74
    irracional, 73
    logarítmica, 74
    trascendente, 74
    trigonométrica, 74
  su cero, 79
  su clasificación, 72
  su definición, 68
  su notación, 69
  su representación gráfica, 77

Grado de los polinomios, 12
Grado de un término, 12
Gráfica de una ecuación, 78
  de un polinomio, 140
Grupo, 189

Hipérbola, su ecuación, 125
Horner, método de aproximación de 268

Identidad, 81, 82
Inecuación, 135, 136
Inecuaciones cuadráticas o de segundo grado, 143
  lineales, o de primer grado, 142
  su representación, gráfica, 143, 144
Inducción matemática, 153
Indice, 52
Interés continuo, 405
  compuesto, 401
  simple, 399
  tasa de, 399
  período de, 399
Intercepción de una curva, 206
Interpolación lineal, 261
  de logaritmos, 393
Inversión, 353

Ley asociativa de la multiplicación, 21
    de la adición, 13
  conmutativa de la adición, 13
    de la multiplicación, 21
  del binomio, 326
  de los radicales, 57
  de los exponentes, 25, 33, 45, 52
Límite, 226
  Llave, 12
Localización de un punto, 76
Logaritmo, 375
  cambio de base, 382
  módulo, 382
  sus características, 377
  su definición, 377
  sus propiedades fundamentales,
  sus sistemas, 385
Logaritmos decimales, cálculo con, 395
  naturales, 385
  tablas de, 390, 420
Lugar geométrico, 78

Mantisa, 391
Matrices, 337
Matriz, 9
Máximos, 120
Máximo común divisor, 65
Medio aritmético, 216
  armónico, 223
  geométrico, 221
Menor, 344
  denominador, común, 47
Método de Horner, 268
Mínimos, 120
Mínimo común múltiplo, 43
Minuendo, 14
Módulo, 179
  del sistema de logaritmos, 382
  logarítmico, 386
Monomio, 12
Monto, 400
  compuesto, 401
  tablas de, 424
Monto de una anualidad, 407
Monto de una anualidad, tablas de, 426
Mortalidad, tabla de, 315
Multinomio, 12
Multiplicación, 2
  sus leyes, 21
  de números complejos, 172
  de radicales, 58
  propiedad conmutativa, 9

  regla de los signos, 24
Multiplicador, 21
Multiplicando, 21

Neper, sistema de (logaritmos), 385
Numerador, 444
Números complejos, 6, 169
    su forma canónica, 172
    su representación polar, 178
    su representación rectangular, 175
    conjugados, 107, 171
    hipercomplejos, 9
    imaginarios puros, 170
    irracionales, 5
    negativo, 171
Números negativos, 15
  correspondiente, 15, 16
Números no negativos, 18
  positivos, 15, 16
  racionales, 4
  reales, 6

Ocurrencias, número de, 313
Operaciones racionales, 65
  algebraicas, 7, 11
Oportunidad, 312
Ordenada, 76
Origen, del sistema de coordenadas, 75

Parábola, su ecuación, 118, 124
  valor máximo, 118
  valor mínimo, 118
  vértice, 18
Parámetro, 67
Pascal, triángulo de, 163, 304
Paréntesis, 13
  rectangular, 13
Período de anualidad, 407
  de interés, 401
Permutaciones, 287
  su número, 291
  circular o cíclica, 293
Polinomio, 12, 73
  homogéneo, 12
  su gráfica, 240
  sus características, 244
Postulados, 1, 2
Potenciación, 5
Potenciación de números complejos, 183
Potencia de un número, 5
Probabilidad, 309
  a *posteriori,* 313
  a *priori,* 311
  curva de, 330, 332, 333
  empírica, 313
  estadística, 313
  definiciones, 310
Proceso algebraico, 8
Producto, 3, 21
  de fracciones, 47
Progresión armónica, 222
  aritmética, 214
  geométrica, 218
  su diferencia, 214
  su razón, 218
  su suma, 219
  geométrica infinita, 226
Progresiones, 213
Proporcionalidad, constante de, 200
Propiedad conmutativa de la multiplicación, 9
  divisora, de la igualdad, 30
  distributiva, de la multiplicación, 9
  sustractiva de la igualdad, 14
Pruebas repetidas, 324

Racionalización de denominador, 57, 60
Radicación, 5
  de números complejos, 185
Radical de una raíz, 5
Radicales, 56
  su orden, 56
  sus leyes, 57
Radicando, 56
Raíces extrañas, 84
Raíces y coeficientes, sus relaciones, 272
  racionales, 256
  irracionales, 261
  su naturaleza, 249
Raíz de índice, 52
  de multiplicidad, 242
  de una ecuación, 82
  de una ecuación, su número, 245
  principal, 52
Radicales semejantes, 58
Razón, 199
Recíproco de fracciones, 47
Recíproco, 32
Redundante, 84
Reducibilidad de la expresión cuadrática, 110
Regla de Cramer, 365
  de los signos de Descartes, 252, 253

Representación geométrica de la suma de números complejos, 177
  polar de números complejos, 178
Residuo de la división, 36

Secciones cónicas, 124
Signos radical, 52
Signos de radicales, 114
Serie infinita, 163, 228
  convergente, 228
  divergente, 229
  geométrica, infinita, 228
  su suma, 228, 230
Simplificación de fracciones, 46
  de radicales, 57
Sistema compatible de ecuaciones lineales, 94
  de Briggs (logaritmos), 385
  defectuoso, 369
  dependiente, 95, 367
  de ecuaciones lineales, 363
  de ecuaciones de segundo grado, 125
  de ecuaciones lineales, 92
  de ecuaciones simétricas, 131
  de logaritmos, 385
  de números usados en álgebra, 2
  de números racionales, 4
  de números reales, 5, 6
  de números complejos, 7
  eliminante, 371
  natural (Neperiano) de logaritmos, 385
  homogéneo, 99
  incompatible, 367
  incompatible de ecuaciones lineales, 95
  no homogéneo, 367
  redundante, 370
Solución algebraica, 233
  común, 92
  de una ecuación, 82
  gráfica de ecuaciones lineales, 94
  por radicales, 233
  trivial, 367
  única, 93
Subconjunto, 170
  división en, 299
Subradical, 56
Sucesión, 213
  finita, 213
  infinita, 213
Sucesos compuestos, 318
  dependientes, 319
  independientes, 318
  mutuamente, excluyentes, 321
  simples, 313
Suma, 3
  algebraica, 12
  notación para, 302
Sustracción, 14
  su definición, 14
  de fracciones, 46
  de números complejos, 172
  su representación gráfica, 178
Sustraendo, 14

Tabla de amortización, 411
  de logaritmos, 390
  de logaritmos naturales, 420
  de mortalidad, 315
  de monto compuesto, 424
  de monto de un anualidad, 426
Término de la anualidad, 407
Tasa de interés, 399
  efectiva, 404
  nominal, 402
Teorema del binomio, 159
  de De Moivre, 184
  fundamental del álgebra, 245
  del factor, 236
  del residuo, 235
Teoría de las ecuaciones, 233
Término algebraico, 11
  máximo del desarrollo del binomio, 328
  principal de un determinante, 353
  racional entero, 12
  semejantes, 12
  su grado, 12
Transformación de ecuaciones, 263
Transposición de términos, 85
Triángulo de Pascal, 163, 304
Trigonometría, definiciones, 416
  fórmulas, 417
  tablas de logaritmos, 420
Trinomio, 12

Unidad, 32
  Imaginaria, 6, 170

Valor absoluto, 15
  de un número complejo, 179
Valor actual, 400
  de una anualidad, 409
  del monto compuesto, 402
Valores críticos de inecuaciones, 144
Valor más probable, 329
Variable, 67

  su dominio, 67
  compleja, sus funciones, 194
  dependiente, 68
  independiente, 68
Variación, 199
  funcional, 199
  especial o proporcional, 199
  directa, 199
  inversa, 200
  combinada, 200
  conjunta, 200
  en las funciones algebraicas, 206
Variación en signo, 253
Vectores, 191
Vínculo, 13

Yarbrough, 318

—o0o—

La edición, composición, diseño e impresión de esta obra fueron realizados
bajo la supervisión de GRUPO NORIEGA EDITORES.
Balderas 95, Col. Centro. México, D.F. C.P. 06040
2226920000904632DP9212I

# ¿QUE ES AGA, SEGAP, ETC.?

www.gnosisTR.com

La **ASOCIACIÓN GNÓSTICA Samael Aun Weor** es una institución creada con el fin de conseguir la superación del hombre a través del estudio del Ser y del saber.

Su objeto de estudio es el hombre, su origen, aquello que es, las culturas creadas por él y el universo en el que habita. Como base de este estudio tenemos al Gnosticismo y sus principios universales.

El término "gnosticismo" recoge en el significado mismo de la palabra la idea de sistemas o corrientes dedicados al estudio de la Gnosis.

La palabra "gnosis" viene del griego "gnosis", que significa "conocimiento". La Gnosis es el conocimiento iluminado reservado a una élite.

La Gnosis es una función muy natural de la Conciencia, una Philosophia Perennis et Universalis. La Gnosis es el principio inteligente que en cada tiempo se oculta tras el simbolismo y en forma de filosofía responde a estas tres eternas preguntas: ¿porqué? ¿cómo? ¿donde?

La Gnosis es una profunda emoción superior que nos conduce a la búsqueda de todo lo bello y sublime del arte magistral o Ars Regia de la naturaleza. La ciencia gnóstica es matemática en la investigación y exacta en la expresión.

En definitiva, la Gnosis es aquel principio eterno cósmico revestido con las formas religiosas de cada raza, pueblo o cultura, de acuerdo a la idiosincrasia presente en cada tiempo. Una doctrina de síntesis, con valores completamente propios que permiten al buscador sincero llegar a la esencia del saber universal.

www.gnosisTR.com

Si después de leer esta información, le interesa recibir por correo electrónico nuestro curso por correspondencia, le invitamos a enviar su solicitud al correo gnosistr_rd2@yahoo.es, con gusto les enviamos las monografías.

Adjuntamos un enlace que explica el objetivo de dichas monografías:

**Siga el enlace para bajar la monografía en formato PDF:**
http://www.mediafire.com/?md23mmijnat

**Siga el enlace para bajar la monografía en formato WORD:**
http://www.mediafire.com/?gtomd4zny5q